UNIVERSITE LUMIERE LYON II

INSTITUT DES SCIENCES ET PRATIQUES D'EDUCATION ET DE FORMATION

Thèse de doctorat en Sciences de l'Education

Présentée et soutenue publiquement par

Dominique Marin

le 17 juin 2003

CONTRIBUTION A UNE REFLEXION SUR L'IDEE DU VRAI DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES EN CLASSES DE QUATRIEME ET TROISIEME DE COLLEGE

Directeur de thèse : Michel Develay, Professeur en Sciences de l'Education - Lyon II.

Table des matières

[31] La dimension méthodologique est intégralement traitée en partie 4 au chapitre 1.

Remerciements.

Cette recherche n'aurait pu voir le jour, sans la contribution de nombreuses personnes à qui je souhaite adresser mes plus sincères et chaleureux remerciements.

J'éprouve une profonde reconnaissance intellectuelle envers « mes maîtres du CEPEC » sans qui je n'aurais pu découvrir le champ des Sciences de l'Education. Par la qualité de leur enseignement, et par leurs compétences ils m'ont donné le goût pour la recherche et la possibilité de poursuivre dans cette voie.

Pour leurs conseils et leur lecture critique je souhaite remercier tout particulièrement Solange Boéro, Pierre Gillet, Jean-Jacques Landelle, Daniel Olinger et Jacqueline Verdier ainsi que tous mes collègues du CEPEC, pour leur soutien amical régulier et précieux.

Ce travail n'aurait pu prendre corps sans la direction éclairée de Michel Develay, à qui j'adresse ma profonde gratitude. Il a su me maintenir vers ce cap que décrit Morin où « toute connaissance acquise sur la connaissance devient un moyen de connaissance éclairant la connaissance qui a permis de l'acquérir ».

J'adresse aussi mes remerciements aux enseignants de l'ISPEF de Lyon, Jacqueline Gautherin, Charles Gardou et Philippe Meirieu pour la richesse de leurs apports intellectuels.

La contribution d'acteurs indispensables pour mener cette entreprise expérimentale est vivement saluée. Je pense à la promotion des collégiens de La Sidoine qui était en quatrième en 1999. Je pense aussi à tous les enseignants anonymes qui ont bien voulu me prêter leur concours.

Pour leurs talents informatiques, je n'oublie pas ce que je dois à Bruno Devauchelle, François Catrin, Robert Delavaux et Bertrand Bony. Je rends grâce à leur professionnalisme et à leur aide efficace lors de la résolution de problèmes en tous genres.

Enfin, je remercie tout spécialement ma mère et ma fille pour leur soutien constant et affectueux. Par leur regard bienveillant, elles m'ont prodigué d'irremplaçables encouragements tout au long de ces années : précieuses manifestations pour adoucir les doutes de la recherche.

A la mémoire de mon père, cartésien convaincu et chaleureux platonicien.

RESUME en français

Au sein de la société actuelle, le doute et l'incertitude se sont immiscés au plan des idéaux. Révolue l'époque dominée par une vision déterministe où l'homme était abordé en terme de structures, de fonction ou de lois de développement. Une nouvelle représentation de l'humain s'impose désormais. Le désordre et l'indéterminisme fondent une autre vision du monde.

A ce titre, la problématique de la thèse interroge les conditions pour qu'un enseignement des mathématiques puisse aider les élèves de 4ième et de 3ième de collège à construire l'idée du vrai autrement qu'en l'orientant vers la performance à savoir prouver.

La recherche affiche l'ambition de conduire à un usage possible de l'idée du vrai pour une épistémologie des mathématiques scolaires à partir des représentations des élèves et d'apports théoriques relevant de considérations à la fois philosophique, historique et épistémologique sur l'idée du vrai.

Adossée à une perspective constructiviste et interactionniste de l'apprentissage, l'élaboration de principes régulateurs qui en découlent fonde une modélisation du traitement du vrai dans l'enseignement des mathématiques au collège au service d'une culture scientifique scolaire émancipatrice.

Le paradigme de recherche dans lequel s'inscrit la thèse est celui de la recherche action et c'est pourquoi une proposition de principes d'action (s'articulant sur les principes régulateurs) est avancée, sans occulter sa mise à l'épreuve en terme de déplacement de l'idée du vrai au travers des représentations des élèves.

ABSTRACT

Within our present society, doubt and uncertainty have interfered in our ideals.

The period when man was to be considered in terms of structures, functions, and development laws has definitely come to an end. A new idea of human beings is becoming imperative. Our new vision of the world is now based upon disorder and indeterminacy

On grounds, the problemacy of this thesis is to examine the appropriate conditions for a helpful teaching of maths applied to pupils of secondary schools, 3rd and 5th forms mostly. The problem is how they can be helped to build up the notion of truth without focusing on the insistent need towards proof searching achievement.

This research aims at leading to a possible use of the idea of truth for an epistemology of school mathematics based upon pupils' mental representations on the one hand , and theoretical and historical values about the notion of truth , on the other hand.

Along with a constructivist and interaction's prospect of learning, the elaboration of following, regulating principles lays the basis for a " modelisation " of the approach of truth in mathematics teaching in secondary schools with the view of a new, scientific school culture.

The paradigm of this thesis subscribes to ' recherche-action' principles. Consequently, several principles for action have been put forward, insisting on experimental testing on pupils' ways of considering the concept and studying the evolution of the notion of truth in their mental representation safter a two years' experimentation.

DISCIPLINE : Sciences de l'Education

MOTS-CLES :

preuve - hypothèse - doute - idée du vrai en mathématiques - situations fondamentales - représentation - obstacle - constructivisme - épistémologie - éthique - émancipation - recherche action.

introduction

Le vouloir est infini et l'exécution restreinte, le désir sans bornes et l'acte esclave de la limite. W. Shakespeare, Troïle et Cresside, III,2, traduction française P. Leyris, J.J. Pauvert - 1961. p.78

A l'instar des grecs, qui représentaient pour Périclès le seul peuple pour qui la réflexion n'inhibait pas l'action, et en vertu de *« l'aptitude réflexive de l'esprit humain, qui le rend capable en se dédoublant de se considérer lui-même, cette aptitude que certains auteurs comme Montaigne ou Maine du Biran ont admirablement exercée, devrait être chez tous encouragée et stimulée »* [1] , nous assumions en sourdine, le parti pris de la recherche. Guidée par la soif d'échapper au milieu anxiogène de la salle des professeurs et poussée par le désir d'oxygénation par rapport au vécu professionnel quotidien. Mais ce nouveau statut, s'il orchestra un processus de décentration n'aliéna pas pour autant le foisonnement de questions vives, parfois mêmes enchevêtrées les unes aux autres. En outre, il obligea à clarifier les interrogations jusqu'à les réduire pour en extraire l'ultime problématique.

Pour apprécier l'émergence de notre problématique, l'important est de montrer comment s'est tramée notre réflexion, au fil du temps qui se tisse dans notre histoire de praticien.

C'est une invitation à éclaircir notre situation de professeur de mathématiques en collège, pour comprendre le fond sur lequel s'est forgée cette thèse.

[1] MORIN E. - *La tête bien faite* - Edition du Seuil. 1999 . p.57

Ce travail a pris corps au moment même où l'incertitude se trouve de plus en plus logée au cœur des choses, laissant le champ libre à un monde des possibles selon une expression poppérienne.

Au sein de la société actuelle le doute et l'incertitude se sont immiscés au plan des idéaux. Révolue l'époque dominée par une vision déterministe où l'homme et la société étaient abordés en terme de structures, de fonctions ou de lois de développement. Une nouvelle représentation de l'humain s'impose désormais.

Le désordre et l'indéterminisme fondent une autre vision du monde dans lequel la réflexion épistémologique devient une nécessité pour penser et construire une post - modernité vivable.

Et cet état de fait se prolonge dans le champ de la réflexion éducative car « *l'école ne constitue pas un isolat* » comme le ponctue A. Prost [2] qui accentue le propos en livrant que « *la réflexion sur l'école tourne court si l'on oublie que la société lui assigne des fonctions précises par rapport à des populations déterminées* » [3] . Donc la question du sens de l'école est plus que jamais posée et à travers elle, c'est aussi la question du sens des savoirs et de leur usage qui est visée.

Dans la République de Platon, les savoirs sont d'ordre politique. Les savoirs auraient pour vocation de mettre de l'ordre dans les têtes, dans les âmes et entre les individus. Certes. A condition d'envisager l'incorporation de l'ordre par les savoirs à l'aune d'un paradigme éducatif visant l'enrichissement de la pensée.

Car en somme, dans cette volonté d'exclusion du doute qui est volonté de mise en ordre dans différents domaines, la logique aristotélicienne fut constamment sollicitée au point que, par exemple, Thomas d'Aquin employa précisément le raisonnement aristotélicien pour prétendre assurer la véracité des questions de foi. Gare au scientisme.

Dimension politique, soit, mais soucieuse du respect de la portée conative des savoirs qui transmute la mise en ordre, en pouvoir de mieux armer l'esprit pour argumenter l'action. Car les savoirs ont d'autres fonctions que celle de remettre le monde en ordre. Ouverture donc vers l'inéluctable question des savoirs opérants.

A ce sujet, la voie que propose J.P Astolfi [4] invite à défendre l'idée d'introduire des savoirs impliqués, saillants et passionnels. Substituer un savoir chaud à un savoir froid interpellant la résonance du sujet (la situation problème est alors évoquée). Susciter le regard nouveau sur les choses pour déclencher la dimension « illuminative » des savoirs (retentissement de la philosophie bachelardienne du non). Renouveler la saveur des savoirs.

Sur le même ton, « l'interrogation illimitée » que suggère Castoriadis [5] oblige à envisager une éducation dont les fruits (les savoirs, les postures et les attitudes)

[2] PROST A. - *Education, société et politiques* - Edition du Seuil. 1997. p.9

[3] Ibidem p.9

[4] Lors du colloque : *Les politiques des savoirs* - Université Lumière Lyon 2 - Institut des sciences et pratiques d'éducation et de formation - 28-29 juin 2001.

nourrissent l'idéal que l'individu agisse en connaissance de cause et non sous l'emprise des passions ou des préjugés. Une éducation qui accomplit la mise en forme progressive des échanges entre l'homme et le monde et commande l'esprit vers le développement d'une pensée dynamique. Pour contrecarrer l'habitude à suivre ou à voter pour des options que d'autres lui présentent.

Eloge donc à la pensée critique qui vise à *« poser un jugement éclairé sur la valeur ou l'authenticité d'une source d'information, d'une idée, d'un argument, ou d'une opinion* » [6] . Et en écho à Castoriadis, nous prenons à notre compte que la liberté c'est l'activité car dans notre société l'incertitude règne au plan même du statut de la vérité, résultat sans doute de l'émergence des pensées révolutionnaires de Copernic, Darwin, Freud, Heisenberg et Gödel.

Mais, le savoir est-il substance ou le savoir ne peut-il être que relation, produit et résultat [7] ? Le savoir est-il chosification ou rapport au monde ? En exemplifiant : le savoir, est-ce l'utilisation avec dextérité du théorème de Pythagore ou le savoir est-ce ce que permet d'envisager le théorème de Pythagore sous l'angle de l'humain ? Interrogations qui orientent ostensiblement vers la question de comprendre comment un objet de savoir peut il être source de savoirs ? Et nous affichons un parti pris en notre détermination à défendre que la centration sur des « objets canoniques » d'une science peut ouvrir un regard nouveau sur d'autres objets dont l'usage est fréquent en son sein. Vigilance épistémologique en somme.

Les sciences et leurs objets véhiculent des croyances, des mythes et de l'imaginaire : les mathématiques n'y échappent pas. Avec l'exemple de la preuve, la croyance d'atteindre le vrai est forte, générant le mythe que les mathématiques détiennent les clés du vrai, et l'imagination de rêver que toute connaissance scellée du sceau de la logique aristotélicienne se pare du label du vrai. Et l'exemple de Thomas d'Aquin de resurgir.

D'aucuns seront peut-être surpris de la double appartenance, de la question du vrai, tant il est immédiat de le rapprocher avec des problématiques plus philosophiques. Mais nous nous défendons d'entretenir une quelconque étanchéité entre mathématiques et philosophie dans la mesure où la praxis implique une idée de valeur, et que la philosophie est la conscience de la science [8] .

Donc, la question du vrai, traitée dans le domaine des mathématiques gagne à être éclairée par une réflexion hors de ce champ, aussi sommaire [9] soit elle. Par exemple, quel

[5] *Pour un individu autonome* in le Monde diplomatique septembre 2000.

[6] POIRIER - PROULX L. M. - La r*ésolution de problème en enseignement - Cadre référentiel et outil de formation* - Edition De Boeck . 1999 . p. 60.

[7] SCHLANGER J. - *Une théorie du savoir* - Edition Vrin. 1978 cité par Charlot B. in *Du rapport au savoir - Eléments pour une théorie* - Edition Economica. 1997 p.70.

[8] L'idée n'est pas neuve, Rabelais en son temps le clamait déjà.

[9] Nous ne sommes pas philosophe.

retentissement pourrait-il advenir (en mathématiques) de cet amalgame platonicien entre vrai et bien, qui érige la vérité comme une norme théorique et pratique au point de sous entendre que celui qui sait ce qui est, sait ce qui doit être ? Posture idéaliste qui met en œuvre une conception dogmatique de la vérité en donnant à voir l'être comme se détachant de lui-même pour ne devenir que sujet rationnel. Négation des affects, des pulsions et du caractère même d'humanité en somme. Le monde objectif existerait-il en dehors de la conscience qui en détermine les propriétés ? Le réel est-il une idée pure, auquel cas, nous ne pouvons être assurée que de l'existence de nos pensées et de nos perceptions ?

Quelles conséquences, l'identification de la vérité à la valeur, produirait-elle en mathématiques ? Vérité, comme résultant d'un jugement de valeurs relatif au sujet qui les énonce, à l'époque dans laquelle il vit, par rapport à une culture dans laquelle il est immergé.

Quelle onde de choc pour la question du vrai en mathématiques que de rabattre l'identification du vrai à l'objectivité ? Alors que ce qui est, l'est précisément par ce que nous sommes, c'est-à-dire contingent d'apriorisme temporel et spatial où le phénomène version kantienne est rencontre entre une chose et nos sens.

L'idée que connaissances et sujet sont indépendants ne requiert pas notre assentiment et nous adhérons franchement à la conception qui met en valeur le rôle constitutif du sujet dans l'acquisition de ses connaissances, de sorte que le sujet ne peut être isolé du phénomène observé. En d'autres termes nous avançons en nous appuyant notamment sur le principe d'Heisenberg, que le sujet réintègre le processus reliant connaissances et réalité par la construction théorique qui habite son observation. Et sous l'influence de Desautels, nous n'avons aucun embarras à suivre l'option qui met en valeur que la science ne fournira jamais une adéquation parfaite ou vraie entre les éléments d'un monde objectif et les connaissances qu'elle forgera. Et pour autant, à parler ainsi du réel

construit, ouvre t-on une brèche au sophisme, courant marqué par la possibilité, à propos d'une même chose, d'affirmer sa vérité et son contraire ? La thèse s'emparera bien sûr de cette question qui pour l'instant, est volontairement laissée sans réponse.

Notre statut de professeur dans le second degré nous confronte à ces interrogations sur le sens de l'école et sur le sens des savoirs, et plus généralement à propos du statut du vrai. Nous avons donc souhaité les aborder à partir de l'enseignement des mathématiques au Collège.

G. Kuntz pose une question centrale qui envenime depuis longtemps la question scolaire dans son ensemble : qui veut-on former, des ingénieurs ou des citoyens responsables ? Autre manière d'entamer la polémique entre instruire ou éduquer, polémique qui ne tient pas. Nous affirmons qu'il n'y a pas de disjonction entre les deux. Les savoirs visent à former aussi bien l'expert que le citoyen éclairé .

Souci d'émancipation démocratique, donc, à condition que l'enseignement des mathématiques ne consiste pas à fixer des formes, au détriment du sens des contenus. A condition aussi, que les mathématiques ne deviennent pas un instrument au service de l'exercice d'un pouvoir oligarchique sur le modèle des Pythagoriciens qui, d'après C. Hannaford [10] , formaient une véritable société fermée, cloisonnée et très aristocratique.

Si la problématique instruire et éduquer est évacuée, il n'en reste pas moins, comme se plaît à le rappeler G Kuntz, que dans l'enseignement, il faut des résultats rapides et faciles à évaluer. Et pourtant, *« on gagne en compréhension et en autonomie en affrontant les questions profondes et difficiles contenues dans les mathématiques enseignées. La perte d'efficacité initiale par rapport à un cours classique est ensuite compensée par une compréhension en profondeur des notions qui fait de l'étudiant un scientifique (contrairement à ceux qui récitent des cours non maîtrisés et qu'on évalue sur des problèmes banalisés et répétitifs). L'apprentissage des mathématiques structure l'esprit : il construit des liens entre les connaissances, parfois de façon surprenante. Mais leur enseignement est tributaire de l'environnement social et économique. Faute de s'en préoccuper, les réveils pourraient être là aussi douloureux* » [11] . De la complexité des objets à enseigner dépendra alors la qualité des apprentissages mathématiques.

Mais il est une autre question vive touchant aux mathématiques et à l'image que l'enseignement donne de cette science jouissant d'un prestige quasi éternel. Prestige lié lui-même à la certitude de l'omniprésence de cette science au quotidien et de sa faculté de résolution de problèmes en tout genre. Or René Thom dessine une autre image qui ne s'apparente guère à celle que s'obstine à défendre l'enseignement des mathématiques en

évoquant « *cette dégénérescence relativement rapide des possibilités de l'outil mathématique lorsqu'on va de la physique vers la biologie [qui] est certes connue des spécialistes, mais [dont] il est fort peu mentionné aux yeux du grand public* » [12] . Et l'idée d'Astolfi de se profiler à nouveau : savoirs impliqués (qui interpelle l'élève), saillants (dimension illuminative), passionnels (renouvelle la saveur et tremplin pour transmettre une passion...celle des mathématiques). Et ce leitmotiv aristotélicien qui veut que l'homme soit un animal qui désire le savoir.

Alors, en vertu du principe que la première des politesses d'une étude critique doit être de ne pas ignorer ses objets, nous affichons le souci de lier réflexion et activité afin de faire des propositions qui s'appuient sur des observations : entrelacement en somme de connaissances scientifiques et de connaissances expérientielles qui ne surgissent pas du néant mais d'une pratique.

Activité, maître mot dans le registre didactico-pédagogique, qui relance les débats autour de la nature des savoirs à enseigner, de la manière de les acquérir et ravive la question de leurs finalités. Que doit-on apprendre et comment ? L'enseignant doit-il avoir « *le point de vue du jardinier où seul le résultat compte »* [13] ? Dès lors « *pourrait être déclarée convenable, toute pratique centrée (peu importe comment) sur la construction du sens, l'explication du pourquoi et du comment »* [14] *.* Nous n'évacuons pas la nécessitéde

[10] HANNAFORD C. - *Les mathématiques ou la démocratie* - in APMEP n° 423. 1999. P.487

[11] KUNTZ G. - *Point de vue sur l'enseignement des mathématiques* - in APMEP n° 415. 1998. p. 194

[12] THOM R. - *Penser les mathématiques - Séminaire de philosophie et mathématiques de l'ENS* . Edition Seuil . 1982 . p. 254.

[13] BRAUNS E. BARRA R. - *Nouveaux postulats pédagogiques - Attention danger !* - in Cahiers pédagogiques n° 299 . Décembre 1991.

penser les conditions du comment, afin que l'acte d'enseignement ne relève pas d'une éthique de l'intérêt immédiat. Etre attentif aux conditions du comment, afin que l'acte pédagogique prenne ses distances vis à vis de la science poiétique, ou science de la production, en usant des propos de F. Imbert relatant les distinctions d'Aristote (dans le livre A de la métaphysique). Se soucier des conditions du comment, précisément pour garantir à l'acte d'enseignement sa proximité avec une science pratique. Science pratique qui considère les actions non productives de l'homme, les praxis, tout à la fois production d'objets matériels et de savoirs auto-production de l'homme lui-même tant « *la praxis c'est moins ce que l'homme fait et le comment de ce faire que ce qui fait l'homme se faisant* » [15] .

Lors, s'acquitter d'exercices et de tâches scolaires rituels est-ce s'engager dans une activité d'apprentissage ? Renvoyer systématiquement la science à la technique favorise t-il l'activité « d'interrogation illimitée » ? Des voix s'élèvent, comme celles de Beautier et Rochex [16] pour avertir que l'usage scolaire d'une définition semble se borner à sa mémorisation par cœur et à sa régurgitation occasionnelle, sans qu'on consacre du temps à la questionner, à préciser le dit et le non dit. Car enfin, le langage n'est pas qu'outil d'expression d'une pensée qui lui serait extérieure mais bien constitutif de l'élaboration de la pensée. Et l'interrogation récurrente de demeurer : à quoi servent les mathématiques ? A restaurer l'avènement de l'idée éducative par l'exigence de l'instruction.

Dans cette première partie de l'introduction, la sélection des questions cruciales, dont la liste est non exhaustive, a vocation à situer nos préoccupations de recherche en fonction des themata qui nous animent. De faire entrevoir l'élaboration d'une pensée qui ne sera pas générale mais qui éclairera une activité qui doit donner du sens à l'homme en veillant à « *échapper simultanément à la clôture de la recherche sur le vrai et à l'enfermement de la recherche sur le bien* » [17] .

Cette recherche en Sciences de l'Education qui se veut l'élucidation d'une action censée selon la formule de P. Meirieu, ne pourra pas, de par sa nature même, se priver de référents différents. C'est pourquoi, d'après la première partie de cet exposé, l'on pourra remarquer la convocation des trois champs théoriques : didactique, pédagogique et éthique.

Enfin, il s'agit de mentionner la chronologie de la thèse qui rend compte de la mise en perspective de trois pôles différents parce que, en matière d'éducation et de formation, sont convoquées trois séries de données hétérogènes. Le pôle axiologique qui caractérise les finalités éducatives et les valeurs promues par les propositions que nous

[14] Ibidem.

[15] GRANIER J. - *Penser la praxis* - Edition PUF 1980 . p.137

[16] BAUTIER E. et ROCHEX J.Y. - *L'expérience scolaire des nouveaux lycéens - Démocratisation ou massification* - Edition A. Colin. 1998. p.51

[17] DEVELAY M. - N'y-a-t-il pas mieux à faire que de prouver ?- *La recherche en Education - Vers une nouvelle alliance - La démarche de preuve en dix questions.* (Sous la direction de C. Hadji) . Edition ESF . 1998 . p 75.

avançons. Puis le pôle scientifique correspondant à notre étayage théorique. Et le pôle praxéologique, spécifique des Sciences de l'Education qui évite à la recherche de n'être que spéculation et qui représente un apport pour l'action contribuant à la validité du modèle élaboré.

La première partie met en scène, successivement au cours des trois chapitres, deux protagonistes du triangle didactique face à la question de l'enseignement de l'idée du vrai pour faire émerger un problème.

Le concept de représentation est ici central dans la mesure où ce sont à travers les représentations que seront abordés le sens et la forme que peut prendre la question du vrai chez les élèves (qui est notre préoccupation principale). La question du vrai chez les enseignants servant de toile de fond (elle-même confortée par des études complémentaires validées et présentes en Annexes 1 et 2). Et c'est en regard des représentations des élèves que nous poserons le problème.

La deuxième partie, avec ses quatre chapitres, marque alors la nécessité de se centrer sur l'objet d'étude de la recherche, l'idée du vrai, pour l'approcher sous des angles différents qui lui donnent sens.

Elle s'empare de la question du vrai à partir d'une perspective large (convocation du champ philosophique) tout en se resserrant, peu à peu par l'intermédiaire des approches historique et épistémologique au sein des mathématiques, sur une épistémologie scolaire en mathématiques.

Avec le souci permanent de veiller à plus enchevêtrer des points de vues théorique et pragmatique qu'à ne les juxtaposer simplement. C'est pour cette raison que nous avons émaillé certains chapitres de propos d'élèves.

La troisième partie consiste à livrer l'élaboration d'une modélisation de l'usage de l'idée du vrai dans le champ scolaire telle que nous la concevons, illustrée par des propositions didactiques.

Elle s'arc-boute sur un contexte institutionnel (les programmes scolaires) et théorique (notre conception de l'apprentissage enseignement des mathématiques) afin de permettre l'élaboration de principes pour la prise en compte de l'idée du vrai dans l'enseignement des mathématiques, qui oriente vers le dépassement du traitement du vrai tel qu'il se conçoit actuellement dans l'enseignement.

La quatrième partie est consacrée à la mise à l'épreuve des principes élaborés pour en étudier les conséquences dans le champ scolaire en mathématiques à partir de l'analyse des cahiers de bord des élèves au cours de trois périodes de l'année de troisième.

Sera abordée, la question de la validation de l'hypothèse de recherche qui est définie en lien direct avec les principes antérieurement élaborés. C'est pourquoi l'hypothèse de recherche trouve sa place dans cette partie. Si elle est inclus dans le chapitre réservée à la dimension méthodologique c'est pour souligner que les choix méthodologiques sont dépendants de la nature de la recherche et de celle de l'hypothèse de recherche considérée.

partie 1. de l'emergence d'un probleme

Un horizon n'est rien d'autre que la limite d'un regard Rossiter Raymond Prière pour une agonie in Guillen M. - Invitation aux mathématiques - Des ponts vers l'infini - Edition Albin Michel - 1992 - p.95.

Les sciences révèlent constamment à l'homme des aspects de l'univers inaccessibles aux seules ressources du sens commun. Pour mener à bien sa tâche, chaque science particulière dispose d'un vocabulaire spécialisé à l'aide duquel sont exprimés les concepts qui lui sont propres et dont elle a besoin pour décrire, cataloguer, qualifier les faits qui tombent sous sa juridiction.

Ainsi donc, la preuve la démonstration appartiennent au vocabulaire des mathématiques pour exprimer l'idée du vrai. Quelles conceptions les enseignants ont-ils de l'idée du vrai ?

Les mathématiques constituent des lieux où la pensée avance méthodiquement.. Depuis le Lycée de Platon, les enseignants utilisent les mathématiques pour enseigner à penser. Cette science fut longtemps un chemin d'accès à la vérité. Mieux, au 19ième siècle et en outrant quelque peu le propos, la vérité est mathématique ou n'est pas [18] . Mais quelle que soit la méthode sollicitée, les mathématiciens se heurtèrent toujours à des paradoxes et même l'espoir de trouver la vérité sinon dans les mathématiques, du moins dans les métamathématiques (logique) fut ruiné. Qu'en est-il de l'idée du vrai chez

[18] BERUT Olivier - in Pratique math. n° 19 - *Le Théorème de Gödel : initiation à la relativité mathématique ou du mariage de la philosophie et des mathématiques* - p. 15.

les élèves ?

L'introduction constamment grandissante du souci de la logique, de la cohérence dans les fondements et dans les démarches de toutes les parties des mathématiques depuis la fin du 19^{ième} siècle a parfois modifié profondément le sens et la pratique de l'enseignement des mathématiques. Mais il s'agit de craindre aujourd'hui que le sens du problème ne soit devenu pour les collégiens celui d'une simple application d'un système de propositions qui se déroule in abstracto, sans que le jugement ne soit jamais sollicité. L'élève se trouvant dans une situation paradoxale de s'approvisionner en solution à des problèmes qu'il ne se pose même pas. Et l'on peut aussi craindre, que cette formalisation par laquelle les mathématiques ont gagné tant de rigueur réduise sa valeur de culture au jugement. Réfléchir sur l'enseignement de la question du vrai, c'est s'interroger sur le statut du vrai dans l'enseignement, c'est penser cette question afin que la raison s'investisse tant la raison ne se constitue que par ses propres actions. Mais quelles questions cela pose t-il ?

Chapitre 1. Les enseignants et l'idée de vérité.

De tout temps la problématique existentielle a hanté l'esprit des hommes : d'aucuns se sont penchés sur l'origine de la vie ; d'autres se sont orientés du côté du sens de l'existence ; certains ont réfléchi aux finalités de l'existence .

Pour penser l'homme, les sciences humaines proposent des approches théologique, biologique, philosophique, sociologique, anthropologique, psychologique. A partir de la diversité de ces points de vue se construisent des « réalités » différentes légitimées par les présupposés de départ (le modèle théorique dans lequel il s'inscrit) et il devient évident qu'on ne peut se satisfaire de la convocation d'un seul paradigme déterministe. Paradigme entendu comme un ensemble de croyances partagées par et inscrites dans une communauté scientifique donnée, en référence à un champ unique. Cette unicité de vision renverrait invariablement à un réductionnisme. Et pourtant, la tentation est forte de se laisser entraîner vers la science positive affichant l'ambition d'atteindre l'homme en toute « objectivité » car « *il y a l'espoir et la conviction que les conceptions positives deviendront de plus en plus clairement le seul élément d'entente des hommes entre eux, parce que les sciences sont dorénavant la base spirituelle [...]*» [19] .

On ne peut aller contre le chaos, contre l'aléa. Dès lors y aurait-il une science capable de maîtriser la tyrannie du hasard ? De l'universel de la science se déduit-il un universel du genre humain ? Comment cela se pourrait-il ? Les concepts de l'une seraient-ils dans le sillage de l'autre ?

Une science formelle, qui, à l'aide de méthodes universelles viendrait à bout de ces incertitudes qui planent en l'homme et autour de lui. Une science capable d'ouvrir le chemin d'accès à la vérité car bien équipée d'une logique irréfutable.

[19] KERLAN A. - *La science n'éduquera pas - Comte, Durkheim, le modèle introuvable* . Edition Peter Lang. 1998 . p. 7.

Voilà qu'émergerait une idée des mathématiques, discipline toute indiquée pour percer les mystères du monde dans lequel vit l'homme, puisque, par essence, elle a vocation d'étudier les propriétés des êtres et de s'intéresser aux relations entre ces derniers. Certes, depuis les Grecs le projet existe qu'une science, les mathématiques, permette de venir à bout des incertitudes du cosmos.

Mais quel est le rapport entre l'être mathématique et l'être humain ? En quoi les mathématiques peuvent-elles renseigner le second en travaillant sur les premiers (êtres mathématiques) ? Les sciences humaines ont alors revisité cet espoir d'atteindre la vérité.

Les mathématiques peuvent-elles faire accéder à la vérité (laquelle ?) et d'ailleurs l'idée même de vérité absolue et intemporelle peut-elle tenir ? Dans quelle mesure ces questions-là habitent elles l'univers mental des enseignants ?

Concevoir aisément qu'un ensemble de règles évoluent au fur et à mesure de certaines réfutations des précédentes, ce qui ouvre le champ à l'élaboration de nouvelles règles elles mêmes sujet à réfutation selon Lakatos, avec cette idée de Whitehead, que la science est plus changeante que la théologie ; cela interpelle t- il véritablement les professeurs de mathématiques ? Alors pourquoi la liaison vérité et mathématiques persiste t-elle ?

Le concept de rigueur, érigé comme une caractéristique suprême réclamerait sans doute qu'on le manipule avec modération, surtout depuis Gödel, qui montra que de toutes façons, quel que soit l'ensemble des axiomes choisis au départ, et quel que soit l'ensemble des règles cohérentes pour utiliser la symbolique mathématique nécessaire, du moment que le système est assez grand pour englober l'arithmétique, on ne pourra jamais démontrer que toutes les propositions sont vraies. Donc il en existera toujours une qui sera dite indécidable. Cela veut dire que l'on doive accepter dans sa pensée des phrases qui ne sont ni vraies ni fausses dans un système donné au départ, et qu'il faille un nouveau postulat (donc un nouveau système) pour que ces phrases puissent posséder une valeur de vérité. Il n'existe pas de système mathématique absolu et fermé qui engloberait toutes les mathématiques une fois pour toutes. Deux théories mathématiques peuvent être vraies et en contradiction. L'évocation des géométries euclidienne ou riemanienne en est une illustration. La question des infinis en est une autre. Existe t-il un infini intermédiaire entre l'infini des nombres entiers et celui des réels ? Cette question est en réalité indécidable dans le système où elle a surgi. Elle réclame une réponse arbitraire qui changera la théorie initiale en deux théories différentes et exclusives. En somme, Gödel a démontré l'impossible accès à la Vérité. Seul un chemin relatif permet d'accéder à une vérité.

Mais les enseignants de mathématiques ont-ils conscience de la portée de ce théorème ? L'idée d'indécidable (même) en mathématiques nourrit-elle leur conscience ? Si, comme nous le pointerons par ailleurs, la notion de doute commença à s'immiscer dans le milieu des savoirs savants, qu'en est-il dans le savoir enseigné [20] ?

Enseigner les mathématiques ne garantit pas la neutralité et déborde les

[20] En Annexe 1 figure une étude Brousseau G. et Antibi au sujet de la démonstration chez les enseignants comme arrière plan de la recherche.

préoccupations strictement didactiques. En effet, des enseignants prônent les vertus émancipatrices des démarches de preuve : la logique au service de la lutte contre tout dogmatisme ; l'existence d'une thèse sans doute critiquable qui fait coïncider la naissance de la démonstration avec celle de la démocratie chez les grecs au V^ième^ siècle avant notre ère donne du crédit à cette tendance. Certains, et c'est la tendance technisciste, vantent les mérites des démarches algorithmiques comme moyens permettant de s'adapter à des situations sociales avec efficacité. Marc Bailleul, dans son étude sur les représentations des professeurs de collège sur les mathématiques et leur enseignement relate que « *les enseignants de collège ont une perception de l'attente institutionnelle, basée prioritairement sur des savoir-faire, des habiletés que l'élève doit posséder à sa sortie de collège. La théorie, la compréhension des problèmes que ces savoirs permettent de résoudre ne sont perçus, à travers le discours institutionnel, que comme une « toile de fond » et non comme la finalité de l'enseignement des mathématiques* » [21] . D'autres encore, accordent à la « pensée mathématique » une portée universelle en faisant des mathématiques un outil d'interprétation du monde et de formation de l'esprit. En effet, « *il existe des enseignants de collège chez qui la lecture du discours officiel se traduit par : l'enseignement des mathématiques est en charge de « faire grandir » des élèves, préadolescents et adolescents du point de vue intellectuel, à travers des activités de résolution de problèmes, dans un milieu ouvert et motivant, ceci dans la droite ligne de la « formation intégrale de l'enfant » des instructions de 1946* » [22] .

Une étude restreinte [23] issue du terreau expérienciel des enseignants a montré que l'idée de vérité est très prégnante dans la pensée des enseignants de mathématiques.

Nos interrogations portaient sur ce qu'il cherche derrière sa volonté quasi systématique d'installer l'idée de vérité (via la démonstration) dans ses cours. Et que se cache t-il derrière le rapport qu'il entretient avec cette notion de vérité ?

Pour mettre à l'épreuve la pertinence de nos interrogations, nous avions bâti un questionnaire fondant aussi notre recherche en regard du terrain : ce questionnaire n'a aucune prétention en matière de représentativité mais a vocation à approfondir l'observation d'un certain existant.

Ces questionnaires recueillis sont significatifs d'une part dans leur difficulté pour les obtenir et d'autre part, dans leurs contenus.

Nous avons obtenu successivement : 15 réponses sur 42 envois postaux destinés à des enseignants de collège appartenant à des régions différentes (Rhône Alpes - Nord Est - Sud). Puis 4 réponses sur 10 et enfin 0 sur 18 questionnaires remis soit par l'intermédiaire de collègues formateurs soit directement par nous - même (après un stage composé d'enseignants Rhône-alpins). Force est de constater que penser l'idée du vrai dans le cadre d'un enseignement des mathématiques en collège provoque vraisemblablement des résistances. Certains invoquent que la question du vrai n'a pas à

[21] BAILLEUL M. - *Recherches en didactique des mathématiques* - Volume 15/2 - Edition La pensée sauvage. 1995. p.87

[22] Ibidem

[23] Etude relative à notre DEA en sciences de l'éducation à Lyon II.

être interpellée en mathématiques et que « c'est une préoccupation uniquement métaphysique ». D'autres enseignants ne comprennent pas du tout ni le sens, ni l'utilité des questions posées comme si la question du vrai en mathématiques allait de soi : « en mathématiques on démontre tout ce que l'on affirme, alors... ». Une troisième catégorie refuse d'entrer dans cette réflexion : « la spéculation ne faisant pas partie de leurs attributions ; ils ont bien assez d'autres choses à faire » [24] . En revanche, les enseignants se livrant à cette réflexion dans le cadre de ce questionnaire s'avèrent très loquaces.

Lors des entretiens que nous avons menés auprès de professeurs de lycée nous avons pu constater le même désintérêt par rapport à la question et la difficulté à les mobiliser par rapport au thème.

Le choix des questions se justifie par l'orientation de ce que nous cherchions à étudier : la

représentation de l'idée du vrai chez des enseignants et par le souci de lisibilité des questions. La prédominance des questions ouvertes montre notre vigilance à induire le moins possible la formulation des réponses des enseignants et notre volonté de recueillir des propos éclairants pour ce que nous voulons observer.

Ce questionnaire ne tient pas une place primordiale dans notre recherche dans la mesure où son traitement ne vise ni à mettre en valeur des corrélations ni à valider des hypothèses de recherche. Le matériau recueilli veut seulement asseoir un certain contexte dans lequel s'inscrit la recherche pour en accroître le sens et préserver une proximité avec le terrain. Questionnaire sans but de démonstration mais servant de simple vérification d'un présupposé : chez les enseignants de mathématiques, la question du vrai fait-elle partie de leurs préoccupations et sous quelle forme se présente t-elle ?

Dans l'annexe 2, figurent les contenus bruts recueillis, relatifs à chaque question en livrant les propos originaux des enseignants, sans aucune modification.

Prend corps, dans ce qui suit, la description de cet existant pour mettre en évidence certaines représentations des enseignants, par rapport à cette notion de vérité, afin de risquer quelques interprétations visant à mettre du sens dans les données recueillies ponctuellement.

[24] Les expressions entre guillemets relatent les propos des enseignements pris sur le vif .

Aperçu global du questionnaire distribué aux enseignants	
Des motivations et des finalités accordées à l'enseignement des mathématiques.	
	Pourquoi avez-vous choisi d'enseigner les mathématiques ?
	Quelle est (sont) la (les) finalité(s) que vous attribuez à l'enseignement des mathématiques ?
	Pourquoi défendez vous ces finalités ?
Des enseignants et leurs représentations de la notion de vérité.	
	Dans votre enseignement quelle place tient la recherche de la vérité ?
	très importante ? importante ? peu importante ? négligeable ?
	Pouvez vous justifier votre point de vue ?
	Quel sens accordez-vous au mot vérité en mathématiques ?
	Comment peut-on accéder à la notion de vérité en Mathématiques ?
	Donnez trois mots liés à la notion de vérité , dans le champ des mathématiques.
	Pensez-vous que la notion de vérité soit « tenable » en Mathématiques ?
	Veuillez justifier votre point de vue

1. Des motivations et des finalités accordées à l'enseignement des mathématiques.

La nature de cette question joue le rôle d'identification des enseignants qui ont répondu favorablement à notre questionnaire. Ils ne sont pas différenciés par leur ancienneté, ou leur sexe ou leur niveau d'étude mais par le rapport qu'ils entretiennent avec leur matière.

- Pourquoi avez - vous choisi d'enseigner les mathématiques ?

On peut observer que les enseignants concernés se divisent en deux groupes : certains ont véritablement choisi d'enseigner les mathématiques et se sont déterminés au départ par « passion » ou « par amour » ou par « réussite et désir d'enseigner » (les mathématiques). D'autres, ont été poussés par des raisons d'ordre conjoncturel ou liées au hasard pour devenir ce qu'ils sont, c'est-à-dire, professeurs de mathématiques [25] .

[25] Sur cette question des motivations des professeurs de mathématiques nous renvoyons le lecteur aux travaux de Jacques Nimier. Nous avons joint en Annexe 2c2 un document à ce sujet :utilisation de l'objet mathématique dans la structuration de la personnalité ce qui relativise le caractère aléatoire dans le choix de la discipline d'enseignement.

- Quelle est (sont) la (les) finalité(s) que vous attribuez à l'enseignement des mathématiques ?

Trois types de finalités sont énoncées.

- *Une finalité à dominante humaine et sociale* : la logique et la rigueur au service de l'homme.

En effet, sont fréquemment associées aux termes de logique et rigueur des expressions telles que, « insertion dans la société , « être clair au niveau de la communication », « mieux discerner le monde qui nous entoure », « école de formation humaine », « donner du sens à leur vie »,« permettre à mes élèves de suivre un enseignement supérieur (école d'ingénieurs) », « schémas de raisonnements applicables dans toute situation autre que mathématique ou scolaire ».

Autrement dit, l'enseignement des mathématiques vise à développer, via la logique et la rigueur, et le raisonnement (invoqué par la moitié des enseignants concernés) des attitudes personnelles permettant à l'homme de s'adapter dans la société et de développer de l'humanité. Tendance dans laquelle entrent les réponses des enseignants A2, A4, A5, A6, A10, A13, A15 ; A16 ; A17 ; A18 disponibles en Annexe 2.

Il semblerait qu'au niveau des finalités l'idée de la logique et de rigueur soit associée au bien de l'homme.

- *La finalité à dominante intellectuelle et sociale* : la logique, la rigueur, pour satisfaire des fins uniquement professionnelles.

En remplaçant le terme humaine (précédemment employé) par intellectuel, nous voulons signifier que les apport des mathématiques doivent viser ici, une efficacité professionnelle future, mais le domaine des valeurs morales ne semble pas être particulièrement interpellé . Cependant, la dimension de l'humain est tout de même prise en compte si l'on considère le point de vue qui consiste à penser que la formation mathématique intervient de manière à produire une action efficace dans le domaine socio-professionnel. La référence à l'idée « aucune profession n'échappe à l'emploi des mathématiques », revient à chaque fois dans les propos des enseignants A7, A9, et A12. Le souci d'associer les mathématiques à un devenir humain témoigne bien de la préoccupation des enseignants à relier une activité mathématique, non pas à une finalité d'ordre uniquement spéculatif. Simplement, les mathématiques ne visent pas le même registre chez l'homme que précédemment.

- *La finalité à dominante intellectuelle :* les dimensions humaine et sociale s'effacent en ce sens qu'il semblerait que faire des mathématiques consisterait à développer « le sens de la logique », « le sens critique », « une certaine rigueur dans le raisonnement » mais à une fin non précisée. Le sens de leur développement ne transparaît pas. C'est comme si la logique, la rigueur étaient uniquement au service des exigences internes aux mathématiques.

Cas des enseignants A1, A3, A8, A11, A14, A19.

- Pourquoi défendez vous ces finalités ?

Parmi les enjeux essentiels celui qui domine nettement est l'enjeu humaniste visant « l'épanouissement de l'homme » qui se décline selon plusieurs résonances.

La première, selon une résonance politique avec des versions différentes :

- citoyenne (A2 ; A4 ; A5 ; A9)
- idéaliste (A6 ; A7 ; A13)
- nécessité vitale (A8 ; A10 ; A14 ; A19)

La seconde, selon une résonance « construction de la personne ».

Les mathématiques, envisagées comme discipline participant à la formation de l'homme dans sa singularité au sens où elle contribue à forger la personnalité : A3 (avec la touche universalisme des mathématiques) ; A15 ; A16 ; A17.

La troisième, selon une résonance utilitariste : A11 ; A12 ;

La dernière, avec une réponse du style « profession de foi » car stipulée ainsi : « parce que j'y crois »: A1.

2. Des enseignants et leurs représentations de la notion de vérité.

Les questions visent successivement à confirmer ou non si la question du vrai fait partie de la préoccupation des professeurs de mathématiques. Ensuite, une question renseigne sur le sens que les enseignants accordent à la notion de vrai au sein de leur matière. Une troisième a pour but de faire émerger comment les enseignants envisagent le mode d'accès au vrai. La dernière question en leur demandant une association de mots avec le vocable vérité permet d'ébaucher en quelque sorte leur rapport au vrai (renforcé par la quatrième question).

- Dans votre enseignement quelle place tient la recherche de la vérité ? très importante ? importante ? peu importante ? négligeable ?

Les réponses recueillies renforcent le fait que l'attachement à l'idée de vérité, chez les enseignants de mathématiques n'est pas un leurre .

Cet indicateur n'est pas très riche en soi, et notre attention portera sur les justifications qu'apportent les enseignants de manière à comprendre le sens véhiculé derrière cet attachement.

- Pouvez vous justifier votre point de vue ?

Les convictions qui fondent l'importance attachée à l'idée de vérité sont de tous ordres.

D'abord, sont présents des *impératifs épistémologiques.*

Les mathématiques sont associées à une science exacte. En mathématiques il n'y aurait pas de place pour plusieurs vérités. La vérité est vue comme principe premier des mathématiques ou enfin la vérité est appréhendée comme résultant d'un processus. Il s'agit d'une vérité spécifique en lien avec la notion de prémisse assumée.

Ensuite, il existe des convictions relevant d'une *visée pédagogique ou didactique*.

Cette recherche de la vérité est importante dans le développement de chaque individu. Elle contribue à l'apprentissage de la critique par le biais de l'explication .

Il existe des convictions induisant des moyens d'accès à la vérité. Appel est fait à la preuve. Référence à l'argumentation. Convocation du type de logique (« basique », binaire). Nécessité de posséder un « bagage » pour parvenir à cette vérité.

Enfin, sont visibles des convictions fondées sur la *caractérisation de la vérité.*

Au singulier ; relative ; locale, évolutive ; contingente de règles et théorèmes ; non apparente ; attachée à une valeur morale ; solution la plus exacte possible (comme substitut à LA vérité).

Signalons également que l'importance de la notion de vérité trouve sa justification de part son association avec le caractère outil des mathématiques.

La recherche de la vérité est alors importante en regard à ce qu'elle renvoie aussi bien dans le champ des mathématiques que dans celui de la philosophie (vérité non apparente) ou de la morale. La croyance en l'association mathématiques et vérité ressort même si les propos recueillis laissent apparaître que la vérité n'a plus un caractère absolu.

· Quel sens accordez-vous au mot vérité en mathématiques ?

Les principaux sens accordés au mot vérité font ressortir : justesse ; universalisme ; résultat ou non d'une vérification ; en contradiction avec ses attentes ; vérité locale (voire relative) ; en référence à un modèle ; objectivité (rompt avec l'opinion ou sans nier un certain consensus) ; raison d'être des mathématiques ; « chose » dans l'absolu inaccessible ; changeante (relative aux points de départ).

La multiplicité des sens témoigne de la variété des registres dans lesquels s'inscrit le sens du mot vérité. La vérité en mathématiques est investi du pouvoir d'accès au juste et à l'universel. Elle résulte d'un processus (caractérisé par la vérification, voire le contre exemple qui pourrait être un autre type de vérification) ou s'en émancipe pour n'être perçue qu'en soi (comme non résultant d'une vérification). A contrario, la vérité est résolument associée au local, au relatif donc en étroite liaison avec les prémisses de départ (allusion au modèle) et même envisagée comme pouvant être inaccessible. Tandis que l'on voit aussi apparaître que la vérité peut être associée à la sophia, comme une rupture avec les apparences, puisque en contradiction avec ses attentes, et en rupture avec l'opinion. Le mode d'accès à la vérité est donc coûteux. La persistance de l'association mathématiques et vérité est à nouveau vérifiée (raison d'être des mathématiques).

· Comment peut-on accéder à la notion de vérité en Mathématiques ?

Les appels à l'effort, la rigueur, au raisonnement (déductif en particulier), aux preuve et démonstration, à la logique sont nombreux. Apparaissent également la référence aux règles et critères (voire objectifs et infaillibles). La notion de modèle surgit timidement ainsi que l'évocation de l'exemple et du contre exemple avec la démarche essais / erreurs.

- Donnez trois mots liés à la notion de vérité , dans le champ des Mathématiques.

Les mots clés proposés renvoient essentiellement aux associations vérité / chemin d'accès via le raisonnement et la preuve ; aux associations vérité / garant de la vérité par le biais des propriété, axiome, théorème ; aux associations vérité / nature de la vérité versus justesse, limpidité, objectivité (peu nombreuses).

- Pensez - vous que la notion de vérité soit « tenable » en Mathématiques ?

OUI		Sans réponse
A1- A2- A3 - A6 - A7 - A8- A9 - A10 - A16 - A17 - A19.		A4 (permettez moi de ne pas répondre directement)
		A5 (sens de « tenable « non compris)
		A11 (sens de tenable non compris)
		A12 ni oui ni non
		A13 ni oui ni non A18 : pas de réponse

- Veuillez justifier votre point de vue.

Parmi les onze enseignants qui ont répondu par l'affirmative, il y en a six qui justifient leur point de vue en référence au caractère local (au sens de contingente de prémisses assumées au départ) ou limité de cette vérité (un seul enseignant fait référence au théorème de Gödel). Un enseignant semble considérer que la vérité est immuable et ne fait pas allusion au rôle du modèle dans la reconnaissance de la vérité (A7).Un enseignant (A10) considère que la logique vrai / faux constitue un handicap pour penser le quotidien. La réponse des enseignants (A1, A4 et A8) n'est pas très éclairante, pour nous.

Le balayage rapide des réponses des enseignants fait ressortir que cette notion de vérité ne laisse pas indifférents ceux des enseignants qui ont répondu. La variété de leurs points de vue est sans aucun doute intéressante pour notre recherche dans la mesure où elle nous permettra de mieux nous positionner.

Bien-sûr, la pertinence des propos recueillis doit être interrogée, ne serait-ce que par le fait même qu'ils sont issus de questionnaires : dans quelle mesure l'ordre des réponses a t - il suivi l'ordre des questions posées ? Certaines formulations ou la place que certaines d'entre elles occupent n'ont-elles pas été des facteurs induisant des réponses ? La manière dont nous avons traité le matériau recueilli peut prêter à critiques.

3. Essai d'interprétations

Que peuvent signifier les représentations de l'enseignant avec cette notion du vrai, tant il nous semble que ce rapport peut vraisemblablement influer le comportement didactico-pédagogique du professeur de mathématiques.

Nous suggérons que les représentations sont en filiation avec les idées défendues par les logiciens du Cercle de Vienne dont l'idéal de conceptions repose sur des arguments à la fois d'ordre logique et social. Pour le Cercle de Vienne, la science est fondée sur la démonstration rigoureuse (donnant accès à la vérité) et le recours aux faits d'observation peut faire progresser la connaissance du monde. Nous nous référons donc au Cercle de Vienne pour deux raisons. D'une part parce que les enseignants sont en quête d'un monde de certitudes que représentent les idées mathématiques et que d'autre part, le monde de certitudes logiques fournit une quiétude morale. La vérité logique donne accès à la vérité monde.

Ce mouvement résolument anti métaphysique, étroitement lié aux sciences accordait un grand pouvoir à la logique et attachait une importance à la liaison entre les sciences, le social et la philosophie (la « carte de visite » des principaux adhérents à ce groupe en témoigne). Une citation de P. Jacob dessine assez bien leur optique quand il livre que « l*es membres du Cercle de Vienne ressentent vivement l'imminence de la crise, partout proclamée. Dans la préface à La Construction logique du monde (1928), son premier grand livre, Carnap témoigne de sa sensibilité à la culture de son temps. Au sentiment de la crise il veut répondre en soulignant la responsabilité morale d'une pensée rigoureuse [...]. Dans un contexte apocalyptique, les membres du Cercle de Vienne réincarnent la philosophie des Lumières. Ils s'élèvent au nom de la science, contre l'obscurantisme. Ils attribuent une valeur morale autant qu'intellectuelle au savoir scientifique, comme en témoigne leur passion de l'unité de la science et leur penchant pour l'encyclopédie. Ils ne doutent pas que le progrès scientifique favorise le progrès social ».*[26] Bien que ce mouvement se désagrège assez rapidement et par ceux là mêmes qui voulurent défendre cette tentative de justifier scientifiquement le monde, il n'en reste pas moins qu'il symbolise cet attachement des hommes à cette « soif » de certitudes.

Derrière cet attachement à l'idée de vérité pointe à l'extrême une valorisation du savoir scientifique. Des propos d'enseignants, mis en évidence précédemment, associant mathématiques, vérité et homme crédite le point de vue d'unir science (mathématiques), logique et social.

Ce qui impliquerait que le vrai ne se décrète pas, qu'il ne relèverait pas non plus de l'évidence, mais qu'il découlerait de l'acte de preuve, scellement de toute scientificité pour appréhender le monde donc le social. Car l'attachement à l'idée de vérité est aussi en lien avec une aspiration à l'ordre et à la logique comme valeurs d'une société. Les propos des enseignants tiennent souvent en otage la science et le social. Le Cercle de Vienne considère que tout discours en dehors du champ scientifique est vide de sens ou réduit à des faux problèmes. On veut ériger la logique comme science indépendante. Pour évacuer tout désordre, en mathématiques par exemple, l'on essaie de combiner axiomatisation et formalisation pour mettre en place un édifice mathématique de manière

[26] JACOB P. - *L'empirisme logique* - Edition de minuit - cité par RUSS opus cit. p. 38, 39.

rigoureuse, mais ceux qui optent pour l'invariance optent pour l'ordre social déclare M. Serres .

Nous envisageons cette recherche de caractérisation universelle, présent chez les enseignants de mathématiques par le biais de son attachement à la vérité, comme une quête vers le déterminisme source de quiétude morale.

A travers cette perpétuelle volonté de tout identifier, de tout nommer, l'enseignant n'affiche t-il pas sa tendance à vouloir tout définir, à vouloir tout percevoir ? Cela ne traduit-il pas ce désir de fixer le savoir une fois pour toutes ? « E*n résumé, le préjugé, fréquent chez les professeurs de mathématiques, selon lequel un mot, ou symbole posséderait un seul sens fixé une fois pour toutes et exactement le même partout et toujours est dangereux en mathématiques « une langue mathématique fondamentalement univoque est impossible a écrit Heyting » - Tarski, dans « le concept de vérité dans les langages formalisés » insiste : « nous devons nous résigner à admettre que nous nous trouvons en face non d'un seul concept mais d'une pluralité de concepts différents lesquels sont désignés par un seul et même mot » ».*[27]

L'attachement à la notion de vérité, ne marque t-elle pas cette attirance vers la permanence, ce besoin de sécurité ? Aspiration à un monde où ne régnerait plus, ni la contradiction, ni les désaccords, perçus comme autant d'ennemis pour la quiétude humaine, si tant est que « l*a dissémination des ports [...] s'élargit autant que se concentrent les producteurs de connaissances en écoles rivales. La société enseignante et savante mime dès sa naissance la société tout court. Des villes états se dispersent et s'affrontent sur les rives de la mer: de même la petite cité athénienne de l'Académie, par exemple, sous la direction de Platon, livre des batailles acharnées contre dix sophistes : Hippias [...] ou autres et conclut des alliances temporaires avec des étrangers de Crotone* [...]».[28]

La responsabilité morale d'une pensée rigoureuse chère au Cercle de Vienne n'est pas étrangère à cet attachement à la vérité chez les enseignants. La quête de la recherche d'unité (au travers de sa quête de l'universel) peut aller de pair avec la recherche de la vérité en privilégiant par exemple, la structure sur le sens. La vérité comme entité indépendante du sujet qui la crée, et comme résultante des relations entre les êtres. « *Le structuralisme en mathématiques s'oppose au compartimentage des chapitres hétérogènes en retrouvant l'unité grâce à des isomorphismes* ».[29]

Cette persistance à ne pas douter de l'existence de la vérité que manifestent les enseignants, à l'image des espoirs que fondait le Cercle de Vienne, permet d'étancher sa soif d'Absolu et marque la croyance en un monde des Idées pures ; un monde qui serait immuable, sans changement, où l'on exercerait une activité spéculative à des fins d'idéalisation du monde réel. Détachement du monde sensible « *la conception platonicienne reporte sur le monde mathématique le désir d'absolu et d'éternité de l'esprit*

[27] LOI M. - *Penser les mathématiques* - Edition du seuil - 1982 - p. 119.

[28] SERRES M. - *Eléments d'histoire des sciences* - Edition Bordas - 1989 - p. 63.

[29] PIAGET J. - *Le structuralisme* - Edition PUF - 1968 - p. 5 .

humain » [30] qui renvoie à l'idée que science, social et philosophie sont liés. Ce détachement serait source de quiétude morale.

Lors, après cette tentative abordant le retentissement de l'idée du vrai sur l'enseignant il s'agit de poursuivre l'étude visant à établir un état des lieux sur l'idée du vrai en considérant dès lors un versant plus pragmatique, celui que côtoie l'enseignant dans sa pratique.

Interroger cette notion de vérité dans le champ pédagogique scolaire : qu'en est-il de l'idée du vrai chez les élèves ?

Chapitre 2. Représentations de l'idée du vrai chez les élèves de 4ième.

Les représentations des élèves ont été examinées à travers des épreuves données en fin d'année scolaire de quatrième. Elles ont pour but de dresser un état des lieux en vue de bâtir des propositions qui prendront en compte ces observations.

1. Bref aperçu du descriptif expérimental et du mode d'analyse des données [31] .

Nous avons effectué une analyse de tâches au sens de Vergnaud « *par analyse de tâches il faut entendre l'analyse des opérations nécessaires au traitement de la situation et à la solution du problème posé. Ces opérations peuvent être matérielles, perceptives, sociales, etc. ; elles impliquent des opérations de pensée qui sont nécessairement reliées aux caractéristiques conceptuelles de la situation. [...] Elle,* (l'analyse de ces opérations de pensée)*, repose bien entendu sur la connaissance approfondie des concepts mathématiques mais ne s'y réduit pas ».* [32]

Le choix de l'analyse de tâche résulte de la prise en compte de la problématique des situations fondamentales dans notre enseignement qui présuppose une induction forte des situations sur la mise en oeuvre des connaissances de l'élève.

Le matériau [33] que nous observons est composé de trente trois copies d'élèves appartenant à trois classes de 4ième : 4ième A, 4ième E et 4ième B. Les dominantes

[30] APERY - *Penser les mathématiques* - Séminaire de philosophie et de mathématiques de l'ENS - Edition du Seuil - 1982 - p. 59

[31] La dimension méthodologique est intégralement traitée en partie 4 au chapitre 1.

[32] VERGNAUD G. - *Introduction : Didactique et acquisition du concept de volume* - in Recherches en Didactique des mathématiques . Volume 4 / 1 . Edition La pensée sauvage. 1983. p. 24.

[33] Ce matériau est à disposition du lecteur en annexe 3.

didactico -

pédagogiques ne sont pas les mêmes entre les deux premières et la troisième : en 4ième A et 4ième E la perspective d'enseignement apprentissage relève du modèle de la théorie socio-constructiviste tandis que la 4ième B se réclame du modèle transmissif..

Signalons qu'il s'agit d'épreuves ciblées où l'élève doit prendre l'initiative de construire un contexte (c'est-à-dire expliciter l'hypothèse qui permet d'entamer la résolution) pour lui permettre de dire le vrai ou le faux ou encore, d'épreuves où l'élève possède des réponses non identiques mais qui pourront être vraies toutes les deux sous réserve de définir le contexte.

Il s'agit alors pour nous de comprendre les représentations de l'idée du vrai chez ces élèves en regard de la compréhension de la notion de prémisses (ou hypothèses) assumées au départ.

Nous rappelons également que cette étude sur un échantillon d'élèves porte sur les onze premiers élèves de chacune des classes nommées précédemment et que l'intention est de considérer notre analyse en adoptant un point de vue qualitatif : notre vigilance s'oriente donc du côté du sens que révèlent les contenus mais en ne perdant pas le point de vue de Huberman et Miles qui stipule que *« en recherche qualitative on tend à négliger les chiffres. Après tout, la marque distinctive du chercheur qualitatif est qu'il ne se contente pas de décrire quelque chose en terme de quantité, mais cherche à en présenter les qualités essentielles. Cependant [...] le comptage tient une place considérable dans tout jugement qualitatif. Il est important en recherche qualitative de savoir, tout d'abord, qu'il nous arrive effectivement de compter et de savoir à quel moment il est judicieux de s'appuyer expressément sur des fréquences. Il existe trois bonnes raisons de recourir aux chiffres : pour repérer rapidement ce que recèle une importante tranche de données ; pour vérifier une hypothèse ou une intuition ; et pour assurer l'intégrité de l'analyse en se préservant des biais »* [34] *.*

En vertu de quoi nous ferons intervenir parfois, le point de vue quantitatif pour identifier un lien éventuel entre les représentations et les classes dans lesquelles elles sont contextualisées (prise en compte de la variable dispositif didactico-pédagogique).

Signalons pour finir que, parmi tous les élèves présents de 4ième B il y en a eu pratiquement un tiers qui n'a pas souhaité répondre aux questionnaires présentés (soit 9

élèves sur 30). En revanche aucun refus de la part des élèves présents appartenant aux classes de 4ièmeA et 4ième E.

Le support est présenté sous forme d'un questionnaire composé de deux parties : trois résolutions de tâches et deux questions ouvertes.

La passation s'est déroulée durant une séance de une heure face à nous.

2. Analyse des productions de l'échantillon de quatrième.

[34] HUBERMAN A. M. et MILES M. B. - *Analyse des données qualitatives - Recueil de nouvelles méthode* . Edition De Boeck. 1991. p. 384 et 385.

A propos de l'activité 1 (nous renvoyons le lecteur à l'annexe 3)

Il s'agit d'observer la réaction des élèves face à une situation où s'affrontent deux points de vue contradictoires qui pouvaient être vrais en même temps suivant le contexte considéré :

l'élève peut considérer la question dans un contexte particulier, c'est-à-dire pense le vrai en fonction de l'exemple donné en référence implicitement à la prémisse - dont il n'a pas forcément conscience du rôle qu'elle détient - ou en l'explicitant : centième inférieur à cinq ou l'élève peut considérer la question hors contexte particulier de l'exercice (c'est-à-dire en pensant à un nombre n quelconque comme le stipule la première phrase de l'énoncé) qui fait émerger la nécessité d'envisager alors deux contextes (avant de proposer une réponse) : si centième inférieur à cinq ou si centième supérieur à cinq et qui, en fonction de la prémisse sélectionnée implique que suivant le contexte les deux enfants mis en scène dans l'exercice auraient raison.

Autrement dit, nous voulons observer :

· si les élèves recourent à poser des hypothèses avant de se lancer dans la résolution
· si les élèves savent définir un contexte, au sens de poser des hypothèses au départ dans lequel la réponse peut être validée (dans le cas présent cela invite à penser les deux possibilités énoncées ci - dessus)
· si les élèves mobilisent le contre-exemple (ce qui reviendrait dans le cas présent à envisager un nombre n tel que le centième ne soit pas inférieur à 5).

Observations et interprétations

On peut remarquer qu'il y a finalement deux groupes de réponses .

Un groupe, dans lequel les élèves cherchent qui a raison mais ne s'attachent pas à savoir si les deux élèves cités dans l'activité peuvent avoir raison.

Leurs points de vue pourraient se résumer par une première vision qui consiste à penser qu'en mathématiques une affirmation ne peut être que vraie ou fausse et qu'il n'existe qu'une et une seule bonne réponse *tout en laissant la question du contexte dans l'implicite total*.

La seconde met en évidence que ces élèves ont raisonné uniquement dans le contexte particulier de l'exercice sans chercher à en sortir pour examiner les conséquences sur les deux affirmations.

Ce groupe est composé de douze élèves sur trente trois en tout, ventilés respectivement comme suit : trois en $4^{ième}$ E , quatre en $4^{ième}$ A et cinq en $4^{ième}$ B.

Il ressort clairement que pour ces élèves, le rôle et le statut des prémisses assumées au départ, qui permettent de valider ou non un point de vue, sont non explicites et semblent au contraire tellement implicites, qu'ils tendent à gommer le rôle du contexte qui permet précisément de concevoir du vrai ou du faux. Cette méconnaissance expliquerait qu'ils rejettent que deux arguments contradictoires puissent être vrais : le tiers exclu est invoqué mécaniquement certes, mais sans lien avec la notion de contexte.

En outre, on pourrait également penser que le tiers exclu qui sous-tend leurs allégations devient un obstacle plus qu'il ne sert à fonder leurs conclusions. Précisément parce qu'ils ne semblent pas avoir perçu que ce principe ne peut avoir de sens, que si l'on délimite un contexte par un ensemble de prémisses assumées et donc présupposées comme vraies au départ. De sorte que, le tiers exclu signifie qu'alors il ne peut y avoir du vrai et du faux conjointement puisque une affirmation ne peut être vraie et fausse en même temps par rapport à un contexte donné. Dès lors, deux points de vue contradictoires peuvent être vrais en même temps (si les contextes sont différents).

Or les élèves n'ont retenu que seul le vrai ou le faux ne peut se concevoir en même temps et le rôle et le statut des prémisses sont gommés.

Les observations conduisent à repérer que le tiers exclu se comporte comme une vérité révélée : les élèves ne gardent que la représentation du vrai ou faux en ne pointant pas vrai ou faux en fonction de...Autrement dit, le principe de non contradiction serait vécu comme un principe ne prenant pas sens à partir de prémisses assumées au départ, mais comme un principe vrai en soi, indépendamment de toute autre considération.

Reste à se poser la question de savoir si les deux premières phrases de l'activité n'ont pas joué le rôle d'obstacle didactique pour les élèves de ce groupe, auquel cas l'interprétation précédente aurait un autre retentissement.

Cependant sans minimiser l'obstacle didactique évoqué précédemment, nous notons qu'à l'opposé, il existe un autre groupe d'élèves qui envisagent d'étudier les deux points de vues contradictoires et admettent qu'ils puissent être vrais tous les deux.

Cette fois-ci il s'agit de treize élèves sur les trente trois au total : six en $4^{\text{ième}}$ E, trois en $4^{\text{ième}}$ A et quatre en $4^{\text{ième}}$ B.

Ce groupe montre alors que les élèves posent explicitement les prémisses au départ et que c'est en s'appuyant sur ces dernières, qu'ils concluent que les deux élèves de l'activité peuvent avoir raison.

On peut remarquer que leurs réponses contiennent les deux perspectives : considération du contexte particulier de l'activité (où le centième est inférieur à cinq) et dépassement de celui-ci (avec la prémisse si centième supérieur à cinq) ce qui leur permet d'admettre en même temps un vrai, car considèrent un contexte 1, et un faux, car considèrent un contexte 2.

Nous voyons là une différence significative par rapport au groupe précédent ce qui renforce *notre interprétation du tiers exclu comme obstacle à la représentation de l'idée du vrai en regard de la méconnaissance du contexte.*

Nous verrions aussi à travers les propositions d'élèves de ce groupe une meilleure approche également de la notion du « vrai toujours vrai en mathématiques » qui sous-entend vrai relativement à un contexte donné.

En effet, ces élèves en dépassant le cadre du contexte particulier montrent qu'ils sont soucieux de contextualiser leurs allégations en envisageant un autre contexte particulier qui, les deux réunis, permettent de penser le vrai dans une perspective plus globale (réunion des deux prémisses assumées relativement à l'ordre de grandeur du centième).Avec possibilité de définir un vrai à la fois local et généralisé à l'intérieur du local, en cohérence à la fois avec la notion de contexte et de référent (ensemble des principes de rationalité mathématiques). [35]

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que, par rapport aux réponses à l'activité 1 nous avons pris connaissance d'un certain nombre de propositions d'élèves inexploitables.

Soit parce qu'elles renfermaient un certain nombre d'erreurs préjudiciables à notre observation (méconnaissance de la notion de dixième qui rendait la proposition peu compréhensible) soit parce que nous considérons que leur manque de clarté inciterait à plusieurs interprétations possibles.

A propos de l'activité 2 (le lecteur est toujours invité à aller consulter l'annexe 3).

Nous poursuivons ici un double objectif :

- tout d'abord voir si les élèves repèrent les prémisses assumées au départ et lesquelles
- et ensuite comprendre comment ils font pour affirmer le vrai ou le faux.

Observations et interprétations.

Nous remarquons que dans la majorité des cas, les élèves prennent bien en considération une prémisse assumée au départ (qui est représentée par une donnée) mais que, suivant leurs classes d'appartenance, ils sélectionnent soit la bonne soit la mauvaise *(plus spécifiquement dans les classes de 4 ième A et 4 ième B).*

Nous notons que la tendance n'est pas de même nature pour les élèves de la 4ième E puisque ces derniers sont animés non seulement du souci de poser une prémisse au départ mais aussi de vérifier son exactitude (cela concerne sept élèves sur les onze).

Pour les autres c'est comme si ils entamaient leur quête du vrai à partir de ce qui suit immédiatement la demande qui leur est formulée, sans se soucier précisément de leur a priori de départ.

Quant à l'observation de la manière dont ils s'y prennent pour trancher le vrai ou le faux il émerge trois critères que l'on peut résumer de la façon suivante.

- Un premier groupe, composé de trois élèves de 4ième E ainsi que de sept élèves de

[35] Ce que nous entendons par principes de rationalité pourraient être ainsi énoncés ; un interdit absolu : le principe de non contradiction qui dit que l'on n'a pas le droit d'affirmer une chose et son contraire (à l'intérieur d'un contexte défini au préalable); le principe qui prévient du précédent est le tiers exclu : une assertion et son contraire ne peuvent être tous les deux faux (autrement dit, si l'une est vraie alors l'autre est fausse (toujours à l'intérieur d'un contexte défini au préalable) ; un contre exemple suffit pour invalider une affirmation ; pour dire le vrai ou le faux, on s'appuie sur un certain nombre de propriétés, de définitions validées dans le champ mathématique .

4ième A auxquels il faut ajouter quatre élèves de 4ième B, fondent leur décision du vrai ou du faux en prenant en considération comme critères, la validité de la démarche : ils font référence par exemple au fait d'avoir converti par rapport à une même unité (sans pour autant vérifier l'exactitude de la prémisse de départ qui est la « somme des grandeurs » en énoncé).

- Un deuxième groupe majoritairement composé d'élèves de 4ième A et d'un élève de 4ième B ainsi que d'un élève de 4ième E (dans les proportions de quatre élèves sur onze pour les deux premières classes citées et un élève pour la dernière) s'appuient sur la forme pour dire le vrai ou le faux : critique du type d'unité choisie en regard de l'écriture commode ou non du résultat final ou référence à, « on ne doit pas mettre les unités dans les opérations » ce qui, formulé autrement, du type « les opérations se font sur des nombres et pas des grandeurs » aurait conduit à un critère sur le sens, mais ce n'est pas le cas. Ce critère est mis en œuvre à nouveau sans vérification de l'exactitude de la prémisse de départ.
- Le troisième groupe essentiellement constitué d'élèves de 4ième E et auquel nous avons déjà fait allusion (huit sur onze auxquels s'associe un élève de 4ième B) avance d'abord le fait que la prémisse de départ n'est pas exacte pour dire le faux tout en spécifiant qu'avec la prémisse de départ fausse que l'élève a considérée, le résultat de celui-ci pourrait être validé.

C'est à partir de ce dernier groupe que nous avançons quelques unes de nos interprétations car il montre bien l'opposition de posture que nous pouvons constater entre les deux premiers groupes et celui-ci. Et c'est dans cette opposition que l'on remarque que pour un certain nombre d'élèves, la question du vrai des prémisses de départ ne se pose pas.

En d'autres termes, il émerge que pour une catégorie d'élèves l'idée du vrai découle essentiellement de l'application d'un nombre de règles : le contexte de départ (concrétisé ici par la prémisse donnée) ne souffre pas d'interrogations a priori. L'élève cherche un point de départ pour élaborer ou vérifier une démarche mais il ne l'interroge pas précisément. Il ne cherche pas à savoir si cette prémisse est validée avant de commencer.

Nous en concluons que *l'idée même de prémisses assumées au départ, donc validées a priori est à ce point implicite qu'elle ne se prête pas à vérification ou à un questionnement* : c'est l'idée même de la prise de conscience de la nécessité de partir de prémisse validée qui doit être interpellée chez ces élèves.

En outre, cela peut révéler également que l'idée du vrai qui semble habiter un certain nombre d'élèves est *essentiellement basée sur la vision du vrai en soi et non pas du vrai local relativement à un référent et un contexte donnés* ce qui renforce le fait de la méconnaissance du rôle des prémisses assumées que nous avions déjà mis en évidence par l'activité 1.

A propos de l'activité 3 (nous invitons encore le lecteur à consulter l 'annexe 3).

Elle fait écho à l'activité 1 puisqu'il s'agit à nouveau d'observer si les élèves font ressortir les prémisses de départ et dans quelle mesure ils intègrent le rôle d'un référent pour dire le vrai. En outre, elle donne également à voir dans quelle mesure ils admettent que des résultats différents puissent être vrais (en fonction de contextes différents).

Observations et interprétations.

Les résultats, en terme de comportements sont ici très contrastés suivant la classe d'appartenance des élèves.

Tous les élèves de $4^{ième}$ A et $4^{ième}$ E font appel systématiquement à des prémisses différentes (les coefficients) pour admettre que les trois résultats différents puissent être tout de même vrais en même temps à condition de considérer des coefficients donnés.

En outre, ils nomment explicitement leur contexte (en particularisant des coefficients) pour dire le vrai. Nous remarquons de plus que, soit ils construisent leurs prémisses de départ par rapport auxquelles ils fondent leur point de vue du vrai, soit ils affirment ne pas pouvoir décider en mettant en relief le fait qu'il manque précisément des prémisses de départ (il les évoquent mais ils ne posent pas d'eux mêmes ces prémisses).

Cependant en classe de $4^{ième}$ B les observations, même si elles révèlent le fait que ces élèves prennent en considération la possibilité de s'être référé à des prémisses différentes pour expliquer que les résultats puissent être vrais en même temps, la majorité d'entre eux ne concrétise pas jusqu'au bout leur pensée. En effet, un certain nombre invoque que « l'on ne peut pas savoir qui a raison car on ne connaît pas les coefficients ». Ils affichent leur résolution à débusquer *le* résultat vrai au détriment de quels peuvent être les résultats vrais en fonction de...*Cette tendance n'est pas remarquable dans les deux autres classes.*

Conjointement, une petite partie des élèves méconnaît complètement cette nécessité de fixer des hypothèses de départ et ne font pas d'allusion à l'éventualité d'admettre que trois résultats différents puissent être vrais en même temps.

Ces élèves de $4^{ième}$ B affichent donc davantage une volonté de rechercher quel résultat est vrai sur le plan de l'unicité (même quand une allusion existe quant à la nécessité de fixer des prémisses de départ) et véhiculent leur croyance, en un argument d'autorité, qui, seul, pourrait trancher le vrai et en l'espèce ils se réfèrent à la coutume du collège dans lequel ils sont scolarisés : « le DS et le test n'ont pas le même coefficient donc c'est le deuxième professeur qui a raison ».

Il nous semble alors que la prégnance d'une norme institutionnelle pour trancher la question du vrai traduirait davantage une croyance en le vrai comme dépendant d'un argument d'autorité. Comme s'il existait dans l'ultime, un vrai en soi au lieu d'un vrai en fonction de...

Cette tendance à vouloir trancher le vrai du point de vue de l'unicité renforcerait l'idée que chez certains élèves la *représentation du vrai dans l'absolu est très prégnante*.

Cependant, nous pouvons remarquer qu'une majorité d'élèves, toutes classes confondues, ont su mieux s'approprier cette nécessité de poser au départ des prémisses pour avancer le vrai (ou pas) dans cette activité, que dans l'activité 1.

Nous en déduisons d'une part, que le type d'activité qui leur rappelle ce qu'ils vivent du point de vue de leur notation n'est sans doute pas neutre (influence du contrat didactique). D'autre part, cela nous invite peut-être à nous centrer sur l'incidence qu'il peut y avoir à travailler sur le rapport entre modélisation du vrai et la perception du vrai dans la réalité, et à faire apparaître le lien éventuel qu'il peut y avoir entre le rapport aux mathématiques et le rapport au monde via l'idée du vrai (en mathématiques).

Nous constatons également qu'à partir du moment où l'élève a conscience des prémisses assumées au départ, sa compréhension du tiers exclu évolue puisque lors de cette activité 3 une minorité d'élèves réfute l'idée que trois résultats non égaux puissent être vrais en même temps (ce qui établit une rupture nette avec l'observation de l'activité 1).

A propos de l'activité 4 (annexe 3)

La forme de l'activité correspondait en réalité à poser une question ouverte aux élèves de quatrième déjà concernés à propos de la représentation de l'idée du vrai dans sa globalité.

L'intention était donc de pouvoir dresser une sorte de panorama des idées et d'être attentif au vocabulaire et aux contenus des propos des élèves pour en dégager les idées essentielles qui en découleraient.

La forme de l'activité a impliqué un changement dans le modèle d'analyse et de traitement des contenus.

Nous avons suivi successivement trois étapes selon ce que préconise Van Der Maren [36] :

- la première consiste à analyser le matériel pour en extraire les données pour séparer l'information du bruit .
- la deuxième s'est attachée à faire l'examen des données alors obtenues pour les décrire
- la troisième a pour but de réaliser le traitement de ces données pour produire des résultats .

Nous avons ensuite ajouté une étape pour récapituler les représentations en émettant une série de conclusions .

Première étape : extraction des données.

Nous avons déterminé des unités d'analyse correspondantes à chaque phrase écrite par

l'élève (les textes présentés sont dans leur ensemble très courts n'excédant pas sept lignes maximum).

Nous les avons réparties en rubriques différentes par écho analogique [37] , puisqu'ici nous n'avons pas de modèle à priori pour analyser les textes des élèves étant donné le

[36] VAN DER MAREN J. M - *Méthodes de Recherche pour l'éducation* - Edition De Boeck - 2ième Edition - 1996 - p.400 .

format des données de type invoqué.

Ces rubriques sont directement localisées en troisième étape pour pouvoir produire des résultats et symbolisent l'ensemble des représentations types repérées .

Deuxième étape : examen des données.

Nous remarquons que c'est en 4ième E que les textes produits sont les plus longs tandis que par contraste, les textes en 4ième A et 4ième B sont très courts (parfois squelettiques dans cette dernière classe).

Nous relevons que tous les élèves de 4ième E se sont prêtés à formuler des réponses. Dans les deux autres classes des élèves n'ont pas répondu à la question. C'est en 4ième B qu'il y a eu la plus forte abstention.

Un élève a fourni comme réponse « rien » et un autre a expliqué qu'il ne pouvait pas répondre à la question car il ne la comprenait pas : le mot vérité le gênait. Ils appartiennent tous deux à la classe de 4ième A.

Troisième étape : production de résultats.

Après l'analyse des données, il est apparu que le traitement devait tenir compte de la classe d'appartenance des élèves étant donné la différenciation des rubriques rencontrées dans ces trois classes et leur mode de distribution .

Nous les énumérons relativement à chaque classe en donnant à voir pour chaque rubrique les associations faites par les élèves.

Les rubriques en classe de 4ième E :

· le vrai à travers une vision ou un questionnement à tendance épistémologique :

les notion de vrai et d'évolution (qui rompt avec l'idée de vérité intemporelle).

· vrai selon la notion de contexte
· vrai et manière d'y accéder (la preuve)
· vrai comme résultante de plusieurs manières différentes de prouver
· vrai et notion d'acception (qui introduit la notion de consensus liée à l'idée de vérité).
· vrai est le fait de la validation d'une démonstration (allusion ou non aux théorèmes).

· le vrai en référence aux principes de rationalité :

– vrai et contre exemple comme outil pour prouver le faux

[37] Nous spécifions par là en empruntant les propos de Van Der Maren que *« ce sont les passages du texte qui suggèrent les rubriques plutôt quelles n'y répondent : ils éveillent des échos dans les connaissances du chercheur. Les éléments qui permettent progressivement d'identifier le modèle de l'objet, ou d'en construire un modèle composite, surgiront donc au fur et à mesure de l'analyse »* opus cit. p. 429.

- le vrai à travers une vision à tendance conceptuelle :

– substitution de la notion de validité à celle de vérité

- le vrai à travers une vision existentielle de l'idée du vrai :

– vrai et scepticisme quant à son existence ou à la possibilité de l'atteindre (en relation avec le caractère des êtres imaginaires des mathématiques ou avec la négation de l'idée de vérité au profit de la vérité locale ou avec le pouvoir limité des mathématiques).

– vrai et son incarnation dans les mathématiques.

Les rubriques permettent de constater que les élèves ont une vision déjà assez abstraite de l'idée du vrai. La réflexion s'est engagée dans le champ des mathématiques et ne s'est pas développée au - delà.

Les réponses issues d'un questionnement à tendance épistémologique sont prégnantes et distribuées d'une manière relativement homogène dans les apports des élèves.

Les rubriques en classe de 4^{ième} A :

- le vrai à travers une vision ou un questionnement à tendance épistémologique (réduite):

le vrai comme résultant d'une preuve

- le vrai à travers une vision quant à la finalité des mathématiques et à leur usage :

– vrai comme moyen de conférer de l'utilité aux mathématiques dans le quotidien.

– le vrai et son incarnation en les mathématiques

- le vrai comme une résonance à tendance psychologique

vrai soumis aux théorèmes (et autres...) et lien avec la contrainte et la rigidité comme déclencheur de l'association : vrai mauvais.

- le vrai à travers une vision tournée vers l'essai d'une qualification

– vrai et précis ou sûr .

– vrai et sûr de l'exactitude.

– vrai et cohérence (au sens de résultat vu sous plusieurs angles).

Nous remarquons que les représentations ne sont pas situées sur le même plan que pour les élèves de la classe précédente (d'ailleurs il est remarquable de constater que les deux groupes ont en commun qu'une seule rubrique, celle du vrai à travers une vision à tendance épistémologique).

On pourrait dire que le pragmatisme ou des jugements de valeur positionnent les réponses vers des tendances particulières à ce groupe de $4^{ième}$ A.

L'idée de vrai a un côté beaucoup plus fixiste que chez les élèves de $4^{ième}$ E.

Le taux de non réponse est sans doute significatif de la difficulté avec laquelle l'idée du vrai peut cheminer chez les élèves de $4^{ième}$ en général.

Les rubriques en classe de $4^{ième}$ B.

· le vrai à travers une vision quant à la finalité des mathématiques et à leur usage (très réduite):

vrai et règles qui ont fondé les mathématiques.

· le vrai à travers une vision ou un questionnement à tendance épistémologique :

– le vrai comme résultant d'une preuve
– les hypothèses pour prouver quelque chose

· le vrai à travers une vision tournée vers l'essai d'une qualification :

– vrai comme quelque chose de précis
– bonnes réponses
– c'est le concret
– des choses qui sont toujours vraies dans le cycle des mathématiques

Bien que nous puissions constater qu'il existe plus de proximité au niveau des représentations entre le groupe des $4^{ième}$ A et des $4^{ième}$ E qu'il n'y en a entre les $4^{ième}$ E et les $4^{ième}$ B, il semble cependant que la tonalité des arguments invoqués ne soit pas vraiment de la même nature.

Le vrai subit une sorte de « naturalisation » en B alors que le vrai maintient un statut plus conceptuel en A. Pour étayer nos dires, nous nous référons au vocabulaire employé par les élèves dans la rubrique : le vrai à travers une vision tournée vers l'essai d'une qualification, qui montre le recours aux termes « chose » ou « bonnes » ou « concret » comme si le vrai pouvait s'apprécier sous couvert d'expérience.

Quatrième étape : récapitulation.

Nous distinguons les types de préoccupations qui transparaissent à partir des représentations des trois classes évoquées, toute classe confondue.

Il y a des préoccupations tournées vers ce que nous appelons les caractéristiques de l'idée du vrai d'où ressortent les deux oppositions : vrai local ou bien vrai absolu (ou intemporel).

Nous pointons également que pour parler du vrai les élèves peuvent utiliser plusieurs registres : mathématique et épistémologique où l'idée du vrai est appréhendée du point de vue de sa nature, de sa finalité et de son moyen d'accès. Puis un registre pragmatique où l'idée du vrai doit d'abord avoir un statut utilitaire, (l'idée du vrai est alors relayée par l'idée de preuve).

Enfin, le vrai est appréhendé sous sa proximité à devoir entretenir des liens avec le quotidien : l'idée du vrai participe à la vie comme étant au service de...

Il existe aussi des préoccupations tournées davantage vers le mode d'accès au vrai. La liaison forte avec l'idée de preuve fait ressortir l'incidence des programmes officiels qui entretiennent sans doute l'idée, que le vrai est au bout de l'exercice de raisonnement et rien qu'au bout du raisonnement.

L'amalgame entre vrai, accessibilité (voire infaillible, le mot a été trouvé dans les productions d'élèves) et preuve est tout à fait prégnant .

Enfin des préoccupations d'un autre ordre existent à travers une réflexion autour du vrai et validité ou vérité et irréfutabilité qui orientent vers d'autres horizons et incitent à penser qu'il est possible même en collège de susciter une réflexion vers cette idée du vrai en mathématiques.

Les représentations de l'idée du vrai chez les élèves mettent en exergue les idées fortes suivantes :

· Face à deux points de vue contradictoires :

– deux tiers des élèves environ, cherchent qui a raison sous l'angle de l'unicité d'un point de vue en ne faisant aucune mention à la prémisse assumée au départ

ces élèves évoquent en général le tiers exclu pour justifier l'unicité de leur point de vue

· les deux tiers des élèves ne délimitent pas un contexte pour trancher le vrai

Tendance davantage remarquable en 4ième A et 4ième B

· Repérage des prémisses assumées au départ

– difficulté à les identifier toutes
– prise en compte de la notion de prémisse sans le souci de sa validation

Tendance davantage remarquable en 4ième B

· Pour trancher le vrai ou le faux les élèves fondent leur point de vue sur :

– la validité de la démarche
– la forme de la démarche

– la vérification du résultat en regard de la prémisse de départ et de la validité de la démarche

· Images auxquelles renvoient l 'idée du vrai chez les élèves

– prégnance de l'existence du vrai en soi
– accessibilité du vrai rarement mis en doute
– association entre vrai et preuve
– liaison entre vrai et vie courante

Chapitre 3. Fondements,problématique et enjeux de la recherche.

Le projet de consacrer quelques années de sa vie à construire une thèse ne saurait être anodin. Il nous semble que le choix de notre objet s'ancre dans notre « inconscient épistémologique », pour reprendre l'expression de R. Cavaillès, qu'il définit comme ces « images qui pensent mais qu'on ne pense pas », ces images qui sont autant de themata [38] peuplant notre « inconscient nocturne » et qui, sans devoir être explicitées obligatoirement en détail ont orienté sans conteste le travail de recherche auquel nous nous sommes livrée. C'est précisément pourquoi il nous semble opportun de penser *a postèriori* d'où vient cette recherche, dans le but d'esquisser un paysage d'intelligibilité d'autant plus nécessaire si l'on se réfère au champ d'appartenance de cette recherche, les Sciences de l'Education.

1. Quelques raisons « raisonnables et résonantes » de notre intérêt pour la question du vrai en mathématiques.

Lors de notre cursus scolaire et universitaire nous avons été initiée très tôt aux rudiments de la logique formelle, à la théorie des ensembles ainsi qu'à l'étude des structures présentées de façon axiomatique. Nous avons aussi assisté à la disparition de la géométrie traditionnelle (un effet sans doute du provoquant « A bas Euclide » de Dieudonné au colloque de Royaumont en 1959 au profit de l'algèbre linéaire ?). Nous avons été perpétuellement entraînée à la rigueur des énoncés de définitions ou de théorèmes, des écritures mathématiques et des démonstrations. Le cadre de la résolution de problèmes se situait dans le champ des mathématiques pures (vues à la manière bourbakiste sans doute et il est vrai que nous nous sentions bien en Analyse...). Cette précision, consistant à prendre en considération que nous sommes issue du fameux

[38] Nous empruntons cette expression à G. Holton

enseignement qualifié de « mathématiques modernes », suite à la réforme des années 70 initiée par la Commission Lichnerowicz de janvier 1967 .

Certes, le groupe Bourbaki s'est toujours refusé d'endosser quelques responsabilités quant à ladite réforme des mathématiques modernes arguant que ce qui lui importait, était le contenu des enseignements et qu'il se désintéressait de l'aspect didactico-pédagogique. Pour preuve, le projet initial consistait à rédiger un ouvrage se limitant à fixer les contenus de l'enseignement du certificat de calcul différentiel et intégral de la licence de mathématiques. Manuel qui entendait introduire résolument des contenus modernes et novateurs à propos de l'Analyse (fonctions analytiques ; séries de Fourier ; équations différentielles ; intégration ...).

Cependant, l'ambition initiale fut au cours des années largement dépassée, et le traité d'Analyse se transforma en l'écriture de 7000 pages contenues dans dix livres, renfermant chacun un certain nombre de volumes portant sur « Les Eléments de mathématique » (notons le singulier non anodin). Les premiers virent le jour dès 1940, pour se succéder jusque en 1970 à un rythme soutenu. Le dernier volume datant de 1998, 15 ans après la parution d'un précédent en 1983. La présentation axiomatique fut adoptée : énoncés clairs des axiomes de base par rapport auxquels les entités mathématiques en jeu devront se soumettre pour explorer les propriétés et les théorèmes qui en découleront par le biais, dès lors, de raisonnements théoriquement irréprochables. Apparaît alors cette visée bourbakiste de construire un édifice doté d'une profonde unité (clin d'œil au mathématique sans « s »du titre du traité), reposant sur le socle des ensembles et hiérarchisé en termes de structures abstraites (algébrique, topologique...).

On voit bien l'intention générale qui filtre à travers cette volonté d'articuler toutes les bases mathématiques d'une manière systématique : le traité, comme une vaste synthèse, une réorganisation des connaissances mathématiques déjà existantes sous couvert de modernité et d'abstraction. Il s'agit de l'exposé dogmatique d'une théorie (qui a été recueilli avec un franc succès parmi la communauté des mathématiciens, tout en n'occultant pas l'existence, parallèlement, de virulents détracteurs) .

Donc, si ce « mathématicien polycéphal » ne participa pas implicitement à la réforme, il l'influença indirectement puisque « *l'influence de Bourbaki dans ces réformes s'est surtout marquée au niveau de la philosophie des mathématiques qui sous-tendait le choix et l'organisation des contenus mathématiques dans les nouveaux programmes : il s'agissait de bâtir le savoir mathématique des élèves dès les premières classes et même dès la maternelle comme un grand édifice unifié, sur la base de concepts généraux tels que ensemble, ordre, relation, groupe... »* [39] .

Il est vrai que nous n'avons pas souvenir d'avoir entretenu de lien avec le réel au cours de ces entreprises de résolutions purement théoriques : pour autant, notre esprit en est-il ressorti plus honoré [40] ? Non, mais notre propension à naviguer dans les sphères conceptuelles s'en est trouvée que plus exacerbée, cela est une certitude et il est une banalité que de dire que ce rapport aux mathématiques a influencé et notre vision du monde et par là-même notre parcours professionnel. D'autant plus que au cours du

[39] SIERPINSKA A. - *Les « math. modernes » à l'école* in pour la Science p.90

XIXième et au début du XXième siècle la science ne cessa de vérifier qu'elle avait trouvé l'indubitable fondement empirico - logique de toute vérité. Avant que l'on eut compris que le positivisme logique était une chimère, la course à la recherche de la certitude de l'existence du vrai ultime obséda bien des esprits, et les retombées de la théorie d'A. Comte imprégnèrent longtemps les mentalités. Ce paradigme a vraisemblablement fait partie d'un de nos themata dès le début de notre parcours professionnel dans l'enseignement des mathématiques.

Conjointement s'ancrait de plus en plus profondément, pour nous, la conviction que la logique déductive constituait un fondement irrécusable dans la recherche de la vérité. Et ce, au travers d'une croyance forte, qui garantissait la congruence de pensée dans notre relation paternelle tout en nous permettant de nous affronter tout aussi vigoureusement, dès lors qu'était formulée à notre égard l'injonction sans appel, « manque de logique ». C'est ainsi que nous nous trouvions dans la position de Diderot [41] , comme *« frappé*[e] *d'angoisse mathématique c'est-à-dire privé*[e] *du pouvoir de penser personnellement les multiples et singulières voies par lesquelles les mathématiciens touchent à l'ensemble de nos préoccupations humaines »* [42] .

Vécu plus psychologique cette fois-ci qui nous renvoyait à l'implication : de la logique découle la vérité. Implication qui entretenait directement une relation avec des questions ontologiques puisqu'en étendant un mode de pensée fondé sur la déduction et la logique (tandem auquel était rattaché l'image du père), nous pouvions avoir un rapport au monde conforme et par là-même avoir un accès à la vérité : les mathématiques apportaient une réponse à la question de l'universel.

C'est, persuadée du pouvoir incontestable des mathématiques et de leur omniprésence dans tous les champs que nous nous lancions dans l'aventure de l'enseignement, en 1977, ignorant jusqu'à l'existence de l'émergence de la didactique et confondant activité avec activisme pédagogique, mais animée d'un profond désir d'afficher auprès de nos élèves « une présence non magistrale mais humaine » selon les mots de Cousinet.

Ce n'est qu'après de nombreuses années de pratique que nous avons découvert la didactique (la didactique des mathématiques plus particulièrement) et poussé plus profondément notre regard du côté de l'épistémologie, par l'intermédiaire de la découverte des Sciences de L'Education.

Notre mémoire de maîtrise porta sur la place de la démonstration chez les

[40] Nous faisons allusion au titre de l'ouvrage de Dieudonné *« Pour l'honneur de l'esprit humain »* ; titre qui émanait d'une lettre de Jacobi adressée à A.M. Legendre en 1830 : « [...] M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels ; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain et que sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question de système du monde ».

[41] Nous mentionnons la rencontre d'Euler avec Diderot quand Euler lui déclara « Monsieur ($a + b^n$) / n = X donc Dieu existe, répondez ! »

[42] GUILLEN M. - *Invitation aux mathématiques . Des ponts vers l'infini* - Edition Albin Michel . 1995 (traduction française) p.8

enseignants de 4ième et de 3ième de collège. Il s'agissait de comprendre pourquoi certains enseignants accordaient la dévolution de la preuve à leurs élèves et d'autres non et quel sens cela pouvait-il avoir. Notre hypothèse de recherche était ainsi formulée: le fait que le professeur de mathématiques démontre ou fasse démontrer, dépendrait de sa conception en matière d'apprentissage des mathématiques et par-là même, des conceptions de sa discipline. Première orientation de recherche qui fait ressortir notre intérêt pour comprendre cet amalgame entre déduction logique, preuve, et certitude dans le champ de l'enseignement des mathématiques. Se focaliser sur la place de la démonstration (versus

enseignant), c'était déjà s'installer dans l'étude du rapport au savoir dans sa « dimension identitaire », c'est-à-dire du point de vue de l'image que les enseignants confèrent à cette discipline.

L'amorce de cette recherche s'axait sur l'idée de vérité en mathématiques qui découlait tout naturellement semble-t-il du projet didactique (mais pas seulement) qui « *correspond ainsi à ce souci de mieux comprendre et de mieux expliquer le rapport qu'entretient un apprenant singulier avec un savoir particulier »* [43] *.* Le rapport au savoir dont il s'agit est bien ici entendu comme le rapport aux mathématiques des enseignants, appréhendé à travers un rapport à un outil spécifique de leur discipline, la preuve. Et l'on discerne déjà en filigrane, que ce rapport à un outil est examiné pour éclairer à son tour, un autre rapport à un objet qui résulte de l'action de l'outil : l'accès au vrai. Foisonnèrent alors des questions : les enseignants qui démontrent ne considéreraient-ils pas que la démonstration est un chemin d'accès vers la certitude, dont eux, seraient les seuls détenteurs ? Ou encore, les enseignants qui font démontrer leurs élèves ne seraient-ils pas plus tentés de penser qu'avant d'accéder à une certitude, il faut d'abord cheminer vers elle ?

Lorsque nous entamions notre DEA, l'épistémologie poppérienne faisait partie de notre paysage théorique. Le retentissement du théorème de Gödel qui établissait l'indécidabilité logique au sein des systèmes formalisés complexes, nous avait permis de concevoir de plus en plus et de mieux en mieux la crise des fondements de la connaissance mathématique et nous abordions en toute tranquillité l'idée que l'ordre fait place à une combinaison énigmatique d'ordre, de désordre et d'organisation.

C'est dans ce climat mental que naquit notre problématique de DEA ainsi posée : quels sont les enjeux et les déterminations qui se cachent derrière l'attachement à l'idée de vérité chez les professeurs de mathématiques de collège ?

L'idée de vérité était présente et notre recherche prolongea celle effectuée lors de notre maîtrise tout en amorçant celle de notre thèse (bien qu'en marquant une rupture dont nous nous expliquerons par la suite).

Lors, nous avancions comme hypothèse de recherche, que cet attachement existe car derrière une valeur attribuée à la vérité, donc à la maîtrise de la logique, se cache un intérêt fort pour des valeurs d'ordre moral. Nous entrions résolument du côté du sens que

[43] DEVELAY M. - *Vers une socialisation démocratique* - Coordination M. Tozzi - in Cerfee n° 15. Université Paul Valéry - Montpellier III . 1998. p.127

révélait ce rapport à l'idée de vérité chez les enseignants et c'est pour cela que nous

nous sommes essayée à faire intervenir temporairement et à ce moment-là, une autre facette de notre cadre théorique, celle qui interpellait le champ philosophique. Car il s'agissait de comprendre la question du rapport accordée à la logique et aux valeurs

morales. Le rapport au savoir s'orientait vers un rapport à la structure d'une discipline enseignée. Nous touchions là, la question des fondations des mathématiques. Appréhender un savoir, (les mathématiques) c'est penser les questions auxquelles il répond, les méthodes que ce savoir se donne pour atteindre les réponses, ainsi que les grandes notions qui le structurent. Notre rapport aux mathématiques s'inscrit dans la recherche de réponses à la question qui a toujours préoccupé les hommes et qui concerne la quête du vrai.

Mais le rapport au savoir est aussi un rapport objectal, affirme M. Develay qui écrit que « *le rapport au savoir n'est pas un rapport de superficialité. Il est un rapport de profondeur* » [44] Il est tout aussi limpide de comprendre que notre choix de l'enseignement des mathématiques n'a pas été fortuit mais bien en réponse à des questionnements personnels qui nous hantaient déjà à l'époque, et en relation directe, avec l'espoir de pouvoir aborder des réponses à des interrogations intimes. Le rapport aux mathématiques a renvoyé pour nous à la possibilité de rivaliser avec l'image paternelle, symbole de logique, d'absolu et d'intégrité, et d'assouvir un fantasme d'une vision du monde comme creuset d'idéalités cohérentes.

Le rapport au savoir est en relation avec les questions ontologiques. Comme le souligne M Develay, les mathématiques n'ont pas toujours existé. En tant que discipline, il a fallu plusieurs siècles pour y parvenir comme l'ébauche le Larousse 1997 qui fait état de deux naissances des mathématiques : « *en premier s'élaborent donc des mathématiques pratiques, « art » des calculs, ensemble de techniques et de savoir-faire, outils du « gestionnaire » et de « l'ingénieur ». Leur origine remonte aux civilisations babyloniennes et égyptiennes, où ont été retrouvées de multiples traces de ces pratiques des algorithmes, de l'arpentage, etc. Mais ces civilisations n'en ont jamais tiré un corps de doctrine. C'est avec l'éclosion des mathématiques comme science des démonstrations rationnelles, mettant en œuvre une démarche hypothético-déductive et non plus simplement un ensemble de « recettes » de calcul ou de manipulations de figures, qu'apparaît ce qui, pour nombre de praticiens, constitue la seule mathématique. Celle-ci trouve son origine dans la civilisation hellène dont Thalès ou Pythagore furent les premiers représentants à partir du VIième siècle avant JC ».*

En revanche, poursuit M. Develay, « *les interrogations qui en sont à l'origine ont toujours existé et perdurent. [...] Il serait sans doute utile de montrer à quoi sert le savoir enseigné*

(à autre chose, découvriraient alors les élèves qu'à passer des examens) en regardant chaque discipline à travers les interrogations qui lui sont propres. Ce serait une manière de philosopher que d'aller à la rencontre des fondements anthropologiques de chaque discipline » [45] .

[44] DEVELAY M. opus cit. p.128

Autrement dit, s'intéresser à l'enseignement de l'idée du vrai sous l'angle du rapport au savoir (rapport aux mathématiques qui en découle) en lien avec des questions ontologiques participe à ce que les élèves découvrent le sens de ce qui leur est enseigné pour leur donner l'occasion de penser leur rapport au monde.

C'est pourquoi l'image des mathématiques que nous défendons s'associe à celle que décrit

Hannaford quand il livre que « s*i nos élèves vivent notre enseignement comme une aventure personnelle au pays de l'intelligence et de la discipline, héritée de toute l'humanité et partagée avec elle, c'est l'idée démocratique elle-même que nous leur enseignons, en même temps que la confiance en eux, la liberté, le respect des autres et la générosité »* [46] . Et pour la renforcer (par opposition), nous empruntons au même auteur les propos qui suivent, « m*ais si nous enseignons les mathématiques comme un système fermé - fermé d'emblée c'est-à-dire trouvant dès le départ sa propre fin dans une réalité dépassant l'entendement de la majorité, c'est alors un modèle très différent que nous imposons à nos élèves. Au lieu de liberté, nous leur montrons des limites. Au lieu de confiance en eux-mêmes, nous leur enseignons la subordination. Au lieu de générosité, nous privilégions l'obéissance. Au lieu d'un monde de possibilités différentes, depuis les bornes les plus étroites jusqu'à la plus entière liberté (et où ils peuvent exercer leur choix, en acceptant ses conséquences naturelles), nous ne leur offrons qu'une seule combinaison d'idées, découlant toutes d'un seul ensemble de règles se suffisant à lui-même, en l'appuyant de notre puissante autorité morale, logique et intellectuelle. [...]. Les mathématiques enseignées ainsi sont d'essence totalitaire. Par voie de conséquence logique et analogique, elles justifient le recours aux idées totalitaires dans d'autres domaines, particulièrement, bien - sûr, en politique, où l'autorité absolue cherche sans cesse à prendre la place de la pensée et de la responsabilité autonome ».* [47] Il est donc clair qu'en ce qui nous fondons ce rapport au monde dans l'association mathématiques et idée de « socialisation démocratique » [48] .

Le lecteur aura remarqué le glissement successif des termes : certitude, vérité et vrai, glissement qui serait finalement à considérer comme des indicateurs de notre propre changement sous l'angle du rapport aux mathématiques qui nous a traversée tout au long de notre parcours. Ces pôles d'intérêt qui se sont succédés au cours de nos recherches à travers la question du rapport au savoir dans ses quatre dimensions témoignent de deux faits.

Le premier met en exergue la métamorphose au sujet de notre conception même des mathématiques, tant du point de vue de leur nature que de leur visée et de leur enseignement, et qui résulte du déplacement progressif de notre regard vers le champ de

[45] DEVELAY M. opus cit p. 129

[46] HANNAFORD C. in Bulletin de l'APMEP n° 423 Septembre - Octobre 1999 p. 485 et 486

[47] Ibidem p. 486

[48] Nous empruntons le titre à M. Tozzi

l'épistémologie et de la didactique. L'idée de certitude a laissé la place à celle de vérité. En somme, à partir de la conviction pleine et entière de ce que l'on tient pour vérité, nous nous sommes penchée sur l'idée de vérité qui introduit la nuance supplémentaire de conformité avec ce qui est ou ce que l'on définit comme tel. La préoccupation de prendre en compte le réel construit en regard de la vérité a pris le pas sur la croyance non questionnée de ce qui a valeur de vérité (certitude). Au risque que cette idée de vérité puisse paraître comme trop relever (parfois) de l'ordre du métaphysique. Car à l'instar de Prigogine, nous sommes convaincue de la nécessité d'établir un pont entre l'expérience philosophique et l'expérience scientifique puisque la science nous donne une idée de l'univers dans lequel nous sommes. Mais la position de l'homme dans l'univers sera toujours le point de départ de la philosophie *. A*ussi délimiterons-nous notre objet de recherche à « l'idée du vrai » dans le cadre de l'enseignement des mathématiques, certes, tout en ne nous détachant pas complètement du regard philosophique, dans la manière de l'aborder (d'autant plus si l'on tient compte d'un des enjeux de notre recherche).

Dès lors user de l'expression « l'idée du vrai » [49] pour cerner notre objet d'étude participera d'un parti pris méthodologique tout imprégné d'une vigilance épistémologique.

Et c'est sur cette tonalité que nous choisirons de tracer les grandes lignes de questionnement que réfracte cette question du vrai, à l'enseignante que nous sommes.

Nous faisons nôtre la pensée de Charlot quand il dit qu'« *il n'est pas de savoir qui ne soit inscrit dans des rapports de savoir. Le savoir est construit dans une histoire collective qui est celle de l'esprit humain et des activités de l'homme, et il est soumis à des processus collectifs de validation, de capitalisation, de transmission ». En tant que tel, il est le produit de rapports épistémologiques entre les hommes. Toutefois, les hommes entretiennent avec le monde, et entre eux (y compris lorsqu'ils sont «hommes de science ») des rapports qui ne sont pas seulement épistémologiques. Aussi les rapports de savoir sont-ils, plus largement des rapports sociaux. Ces rapports de savoir sont nécessaires pour constituer le savoir mais aussi pour le soutenir après qu'il a été construit : un savoir ne reste valide que tant que la communauté scientifique le reconnaît comme tel, qu'une société continue à considérer qu'il s'agit d'un savoir ayant de la valeur et méritant d'être transmis »* [50] . Dit à la manière de Schlanger [51] , le savoir est une relation, un produit et un résultat.

2. Du questionnement à la problématique.

La question du vrai, au sein des mathématiques, peut-elle constituer un objet

[49] Pour des questions de style (éviter des répétitions), les expressions « question du vrai », ou « notion de vrai » ou « l'idée de vérité » pourront se substituer à « l'idée du vrai ». Le refus de l'usage de l'expression « le vrai » relève d'un parti pris théorique.

[50] CHARLOT B. - *Du Rapport au Savoir - Eléments pour une théorie* - Edition Economica . Collection Anthropos Poche Education . 1997 . p 73.

[51] SCHLANGER J. - *Une théorie du savoir* - Edition Vrin. 1978. p.16

d'enseignement (donc être reconnue en tant que savoir - produit) dans le cadre d'un enseignement en collège ? Comment cette idée du vrai (comme savoir produit et savoir résultat) interpelle t-elle d'autres savoirs, d'autres rapports de savoir, et la lecture du monde pour l'élève ? En mathématiques, quels rapports entretiennent « le vrai » et la preuve ? Que transporte, du point de vue axiologique, ce désir de travailler la notion de vrai avec des élèves de collège ?

Face à ce questionnement, l'idée du vrai ne peut être circonscrite uniquement au champ didactique. Par exemple, que penser du vrai dans les mathématiques du point de vue de sa relation entre les éléments constitutifs de cette matière (sur quoi porte le vrai ? ; quel sens pour l'expression « une conjecture est vraie » ?). Analyser le vrai des mathématiques pour décrire le monde (en tant que résultat : les mathématiques sont-elles un modèle adéquat ? Dans quels cas le modèle affiche t-il ses limites?). Que dire du lien entre « vrai » et preuve en mathématiques ? (à quelles conditions « le vrai » est-il produit par la preuve et résulte de la preuve ?).

Immergée dans ses pratiques, l'enseignant au quotidien n'opère pas souvent une distanciation par rapport à ces dernières et son « terreau expérienciel » [52] favoriserait une auto légitimation de ses actions. La salle des professeurs d'un collège, déversoir des lamentations de toutes sortes, résonne souvent de propos désabusés voire même de sentences expéditives lorsqu'il s'agit de répercuter les réactions des élèves, en mathématiques en particulier. Et les enseignants de mathématiques de découvrir, qu'a contrario de l'enseignement, l'apprentissage ne se décrète pas.

Nombreux sont les ouvrages (et les recherches) en didactique des mathématiques qui portent sur l'enseignement de la preuve [53] témoignant ainsi de la difficulté de l'entreprise d'un double point de vue : celui de l'enseignement et celui de son apprentissage car la logique pour prouver en mathématiques ne relève pas de la logique courante. Les représentations de l'idée du vrai et la manière dont les élèves conçoivent cette question rendent compte de la difficulté éprouvée.

Mais s'intéresser à l'enseignement de la preuve (voire, devoir s'y plier conformément aux instructions officielles) ne peut se passer d'une réflexion épistémologique sur le rôle et les finalités de l'exercice de la preuve associé à la nécessité de penser la finalité des savoirs mathématiques.

S'emparer de la question du vrai relèverait de cette vigilance, et pourtant nous avons eu beaucoup de difficultés pour obtenir des réponses à nos questionnaire de la part des enseignants de mathématiques.

Imprégnée par notre histoire personnelle et immergée tout autant que l'enseignant lambda dans ce fameux « terreau expérienciel » nous avons opté pour une décentration, qui s'apparente au défi d'enseigner à penser les mathématiques autrement. Autrement qu'à travers cette vision qui donne à voir les mathématiques comme un simple exercice de gammes auquel l'élève ne peut échapper ; autrement qu'à travers un arsenal de règles

[52] GERARD C. - *Au bonheur des maths. De la résolution à la construction de problèmes* - Edition l'Harmattan . 1999 . p.8

[53] A cet égard, nous rappelons qu'en Annexe 1 figure un état des lieux sur la démonstration d'après Brousseau et Antibi.

et de principes auxquels on ne peut se soustraire ; autrement qu'au travers d'une vision dogmatique des mathématiques science qui régenterait l'esprit de l'homme sans lui donner le pouvoir de réflexivité et devant laquelle l'on n'aurait d'autre choix que de se prosterner.

Penser l'enseignement de l'idée du vrai participerait à cette option qui viserait à associer bonheur et mathématiques, « le bonheur comme creuset d'une identité » via le renvoi de l'apprentissage vers la dimension interactive de l'élève et de son environnement.

Dans le programme de recherche de l'INRP en cours d'élaboration (documents de janvier 2000) nous avons pu repérer une phrase significative d'une tendance qui semble se confirmer : « *cette direction de travail viserait à regrouper des recherches qui se situent dans la perspective d'un rééquilibrage des savoirs à enseigner en faveur des savoirs d'action (Barbier 1996) dans le but de permettre une meilleure structuration des connaissances et des savoirs. Il semble que ce qui est en jeu dans l'évolution que l'on voit actuellement se dessiner dans les nouvelles orientations disciplinaires c'est d'ouvrir l'enseignement vers un autre rapport savoir/action que celui qui domine la posture savante. Dans ce nouveau rapport la relation savoir / action s'inverse en quelque sorte et la connaissance se met au service de l'action. Le projet du sujet n'est plus ici le projet épistémique mais un projet pragmatique. L'action sur autrui, sur le monde, vise à obtenir un état de choses jugé et anticipé comme plus satisfaisant. En ce sens le sujet est plus qu'un acteur, il réalise, il matérialise (de façon parfois irréversible*). [54]

En ce qui concerne le projet de recherche n°2 du Département Didactique des disciplines un titre a particulièrement retenu notre attention : argumentation et régimes de vérité des savoirs scolaires d'autant plus si nous soulignons également la phrase, « *l'introduction en classe d'un véritable débat ne peut pas ne pas profondément affecter le statut de la discipline scolaire et du type d'interaction didactique qu'elle implique ».* Elle fait référence à la volonté d'interpeller le statut d'une discipline ce qui n'est pas étranger à notre préoccupation, tout au contraire.

En outre, *« l'histoire du vrai est ainsi balisée par deux conceptions opposées : le dévoilement du réel et une construction de l'esprit. La pensée grecque classique conçoit la vérité comme dévoilement du réel d'abord caché aux sens : c'est ce qu'exprime le mot qui en grec signifie vérité : aletheia. La vérité est atteinte au terme d'une démarche de découverte*

qui permet à l'esprit de voir l'essence des choses. C'est la connaissance - contemplation (theoria en grec) qu'illustre l'allégorie de la caverne de Platon. Cependant, mettre le fondement de la connaissance dans la saisie intellectuelle (ou intuition) de natures simples comme le fait la philosophie cartésienne c'est encore concevoir la vérité comme

découverte d'une réalité extérieure à l'esprit. Et il est significatif que dans une telle perspective la question préliminaire concerne le chemin à faire emprunter à l'esprit pour qu'il parvienne à cette découverte du vrai : chemin pédagogique de l'allégorie de la

[54] COLOMB J. - document INRP - Structuration des savoirs et dispositifs d'enseignement - in Pôle 6 . 2000 .

caverne, chemin méthodologique du Discours de la Méthode. Il fait attendre le XVIIIième siècle et la philosophie critique de Kant pour que la question se déplace du « comment trouver le vrai ? » au « que puis - je connaître ? » et que le vrai soit conçu comme ce que l'esprit construit à l'aide de ses catégories et concepts. Le changement apparaît assez radical à son auteur pour qu'il fasse le parallèle avec la révolution copernicienne » [55] *.*

Cette citation pour faire comprendre où se situe notre propre questionnement par rapport à l'idée du vrai. Nombreux sont les travaux de didactique des mathématiques qui traitent effectivement du « chemin pédagogique » pour atteindre le vrai au sein de cette discipline. Les actes de ce colloque à eux seuls, traduisent l'intérêt pour ce sujet. Nous pourrions également faire référence bien-sûr aux incontournables travaux sur la preuve de Balacheff [56] (1992). Puis, les centres d'intérêt se sont focalisés également sur ce qui se trouve en amont de la preuve. Nous pensons plus précisément à la thèse de C. Margolinas sur l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques (1993), où la validation tient encore une place importante. Evoquons enfin les travaux de L'IREM de Grenoble au sujet du vrai et du faux au collège et au lycée (1997) où, cette fois-ci, l'enseignement des principes de rationalité est au centre des travaux.

Notre perspective s'inscrit dans la filiation des derniers travaux cités, où il ne s'agit pas de penser l'enseignement de l'idée du vrai au travers de son instrumentation (la preuve) mais de penser l'enseignement du vrai en regard de ses principes fondateurs. C'est plus le versant de l'enseignement du « que puis-je connaître (du vrai) » et par là-même comment cela me renseigne t-il sur la question du vrai en mathématiques qui caractérisent notre interrogation. L'on voit bien combien cette direction peut rebondir sur une interpellation de l'édifice mathématique tout entier, au risque de mettre en péril le pouvoir de la démonstration puisque « *l'enchaînement des conséquences est nécessaire, mais la vérité de la conclusion est soumise à celle des points de départ. Les mathématiques*

constituent une connaissance hypothétique inférieure en valeur à la connaissance non hypothétique du philosophe qui procède dialectiquement en remontant jusqu'au principe qui n'est soumis à aucune condition. Les mathématiques ne sont pas le plus haut degré du savoir » [57] *.*

Et pourtant, tout enseignant de mathématiques ne peut pas ne pas être fortement sensibilisé à l'intérêt de développer un enseignement autour de la démonstration.

Car en premier lieu, nous y voyons un intérêt lié aux enjeux mêmes de la démonstration ; enjeu épistémologique qui vise à travers l'activité de la démonstration, à faire comprendre une des caractéristiques des mathématiques, à savoir, valider des énoncés. Enjeu qui est aussi associé à l'idée que la démonstration est un outil pour construire de la rationalité autrement dit, en lien direct avec la recherche du vrai. Enjeu

[55] GUICHARD J. - *La démonstration mathématique dans l'histoire* - Actes du 7ième colloque inter - IREM - Epistémologie et histoire des mathématiques - 12 et 13 mai 1989. p. 39

[56] Nous faisons référence aux travaux dans : *Initiation au raisonnement déductif*. Edition PUF. 1992.

[57] GUICHARD J. opus cit. p.43

humaniste enfin, puisque la démonstration permet d'initier les élèves aux capacités d'argumentation et de confrontation d'arguments qui sont susceptibles d'affermir ou d'accroître des qualités de discernement.

En second lieu nous pointons un intérêt lié au statut de la démonstration. Il est vrai que cette dernière est un peu la raison d'être de l'enseignant des mathématiques, du moins en France, puisque sur le plan mondial la tendance serait de considérer qu'enseignement de masse et démonstration sont incompatibles. Prôner l'enseignement de la démonstration ce serait à notre avis entrer dans un paradigme disciplinaire qui considère cet objet comme un outil dans la résolution de problèmes, autrement dit, un des moyens de passer des connaissances déclaratives aux connaissances procédurales.

En troisième lieu, nous soulignons un intérêt lié à la finalité de la démonstration. Cet enseignement permettrait de jeter un regard épistémologique sur les mathématiques scolaires à condition de ne pas détacher la notion de preuve d'avec l'aboutissement de cette dernière : l'idée d'accès au vrai.

Dans l'activité d'un enseignant de mathématiques, l'enseignement centré sur la démonstration va de soi, mais la question de l'idée du vrai, en revanche, passe sous silence car « *le vrai mathématique est absolument certain, compte tenu de la vérité de ses points de départ et de la nécessité de l'enchaînement de ses raisons ».* [58] A-t-on jamais mis en rapport dans l'enseignement, l'idée que les mathématiques sont une connaissance absolue avec le fait que la vérité de ses points de départs est en dehors d'elles ? La preuve ne fonctionne t-elle pas comme la résonance du vrai, contribuant ainsi à l'extension des mathématiques, mais sans jamais devoir être questionnée au-delà de l'outil et en amont des principes sur lesquels elle s'appuie ? Comment interroge t-on dans l'enseignement la notion de vérité en regard de la validité d'une démarche ?

L'idée du vrai devrait être centrale dans l'enseignement des mathématiques, et ceci, d'autant plus avec les notions de débats mathématiques et de résolution de problèmes, qui, depuis plus d'une vingtaine d'années font leur entrée dans les programmes. Parallèlement nous pourrions nous demander pourquoi cette question du « que puis-je connaître du vrai en et par les mathématiques » ne fait pas l'objet de recherches didactiques plus nombreuses. Non plus sous l'angle de son instrumentation (démonstration - preuve) mais du point de vue de la nature du vrai ? A t-on jamais abordé avec les élèves la question du rôle et du statut des prémisses ?

La difficulté de bon nombre de professeurs de mathématiques à former à la preuve n'invite t-il pas à penser autrement la difficulté : est-ce donc l'outil preuve uniquement qui pose problème où est-ce un « quelque chose » au-delà de la preuve ? Que se cache t-il derrière la dextérité ou non à accéder au vrai ? Comprendre les mathématiques, aimer les mathématiques se résume t-il simplement à la performance à prouver ou bien est-il nécessaire de percevoir ce qui se joue à travers l'exercice de la preuve ? Pense t-on dans les situations d'enseignement ce que véhicule la notion de preuve ?

A l'heure où les programmes de mathématiques (de 1995) font référence explicitement à cette notion de citoyenneté, quelle image des mathématiques convient-il

[58] GUICHARD J. opus cit. p .45

de renvoyer au travers de l'acte d'enseigner ? Comment rendre compte de l'omniprésence des mathématiques tout en donnant à voir leurs limites ? Quel intérêt y aurait-il à faire réfléchir les élèves sur cette phrase que d'aucuns qualifieraient de provocatrice, « *les mathématiques ne sont pas une science - elles ne peuvent pas plus prouver qu'infirmer l'existence de choses réelles. De fait, le souci majeur des mathématiciens est la conformité de leurs créations avec la logique, non avec la réalité ». Cela ne veut toutefois pas dire que les inventions mathématiques n'ont aucun rapport avec les choses réelles. Elles en ont dans la plupart des cas, peut-être même dans tous. La concordance entre les idées mathématiques et la réalité naturelle est même si vaste et fermement démontrée que cela demande quelque éclaircissement. Soyez bien convaincus que cette concordance n'est pas la conséquence des efforts des mathématiciens pour être réalistes ; tout au contraire, leurs idées sont souvent très abstraites et semblent initialement n'avoir aucun rapport avec le monde réel. Et pourtant les idées mathématiques sont bien appliquées en fin de compte dans la description des phénomènes réels... »*. [59]

Tout ce questionnement dont la vertu est de délimiter le problème qui nous intéresse nous conduit alors à formuler la problématique simple, qui fait l'objet de notre thèse :

à quelles conditions un enseignant de mathématiques peut-il aider les élèves de 4ième et de 3ième de collège à construire l'idée du vrai autrement qu'en l'orientant vers la performance à savoir prouver ? Pour quel bénéfice ?

3. Enjeux de la recherche.

Il nous paraît fondamental de clarifier la résonance de cette thèse afin de mieux instruire sur sa finalité plutôt que de tenter de fixer son appartenance typologique, en procédant par dichotomie entre recherche fondamentale et recherche appliquée, ce qui n'éclairerait pas sa visée et traduirait mal la place modeste qu'elle tente d'assumer.

Nous avons mené une recherche action contribuant, nous l'espérons à *« énoncer et* [à] *légitimer un nouveau projet pour modifier, sinon transformer, les pratiques de l'école ».* [60]

L'enjeu de cette recherche est triple.

- Enjeu épistémologique aussi et surtout, à travers la volonté de « faire penser » les élèves au sujet du statut du vrai au sein même des mathématiques.
- Enjeu didactique, certes, en visant que cet enseignement de l'idée du vrai que nous défendons ait quelques retombées, notamment en ce qui concerne les idées que les élèves peuvent se faire de la preuve, et sur la pratique des enseignants.
- Enfin, il y a l'enjeu ultime, l'enjeu politique qui déborderait les deux premiers : faire que l'enseignement de l'idée du vrai ait une incidence émancipatoire chez l'élève

[59] GUILLEN M. opus cit. p.10 et 11.

[60] VAN DER MAREN J.M. - *Méthodes de recherche pour l'éducation* - Edition De Boeck - 2ième édition. 1996. p. 63.

car un sujet qui interprète le monde résiste à la domination » [61] , ce qui marque une visée mais ne pourra faire l'objet d'une validation, celle-ci ressortissant du long terme. Visée qui esquisse l'horizon vers lequel nous destinons l'enseignement de l'idée du vrai comme conquête d'une possible socialisation démocratique, sans afficher la naïveté de « *croire que la socialisation se maîtrise comme une réaction chimique* » [62] . En restant aussi vigilante par rapport au fait que l'on puisse être scolairement socialisé sans l'être démocratiquement si l'on développe« *la soumission à la parole et à l'injonction des maîtres, aux règles de l'institution sans explication ni négociation, au dogme des savoirs » [63] .* Tant seul le questionnement de la règle peut construire de la démocratie et tant « *il ne peut y avoir de rapport démocratique au savoir dans le dogmatisme, qui engendre le fanatisme des idées et des actes* » [64] . Le pas est alors franchi qui introduit que l'on envisage « *l'appropriation des contenus non comme la transmission d'un héritage, mais comme une construction ou réélaboration collective, qui doit concerner tous les apprenants* » [65] .

Notre choix envisagé pour la nature de notre recherche a été grandement induit par notre posture préalable, enseignante et formatrice [66] qui incitait bien évidemment à la pratique réflexive.

Nous sommes consciente, dès lors, de l'éventuel reproche dû à la nature même de cette recherche.

Reproche qui pourrait lui être adressée concernant la limite spatio-temporelle de son impact. Certes, nous avons élaboré cette thèse tout en étant confrontée à des contraintes dont nous ne pouvions pas faire l'économie. Contrainte pédagogique : nous avions en charge des élèves qui ne devaient point souffrir de notre triple posture (enseignante à temps complet (18 heures)- formatrice ponctuellement - chercheur le reste du temps). Contrainte institutionnelle qui nous obligeait à respecter le cadre des instructions officielles et qui nous forçait à nous plier devant l'attribution des classes, décidée par notre chef d'établissement (d'une année à l'autre sans préavis).

Néanmoins (et d'autant plus) nous avons toujours cherché à nous entourer de précautions méthodologiques sérieuses de manière à garantir une scientificité des propos avancés. Nous en rendons compte dans notre chapitre méthodologie.

Nous ne saurions conclure sur les enjeux sans résister à citer les propos de F. Imbert, «ainsi, il y a praxis dès lors que s'ouvre un champ propice aux apprentissages, à des modalités d'apprendre qui ne s'épuisent pas sur des productions - les leçons, les devoirs, les examens etc... - mais qui se posent comme fins immanentes exprimant l'activité autonome du sujet dans son appréhension au monde » [67] car, « si la fabrication réclame

une figure d'auteur, d'agent capable d'assurer la prévisibilité et la réversibilité de ses tâches de production, l'action se propose de faire avec des « acteurs » des sujets singuliers qui s'engagent et se rencontrent sur la base de l'imprévisibilité de ce qui peut

61 CHARLOT B. opus cit. p. 34.

62 BEILLEROT J. - *Vers une socialisation démocratique* - coordonné par M. Tozzi. Cerfee n°15 . Université p. Valéry Montpellier III . 1998 . p.12.

63 TOZZI M. ibidem p.93.

64 TOZZI M. ibidem p.96

65 ZAKHARTCHOUK J.M. ibidem p. 133

66 Notre centre de formation est le CEPEC (Centre d'Etudes Pédagogiques pour l'Expérimentation et le Conseil).

67 IMBERT F. - *L'impossible métier de pédagogue* - Edition ESF. 2000. p. 57

advenir de leur rencontre et de leur interaction » [68] .

[68] IMBERT. F ibidem p.76

partie 2. a propos de l’idee du vrai :de la philosophie des mathematiques a une epistemologie scolaire de cete discipline

La vérité est une reconnaissance d’un système commun de validation I. Lakatos Preuves et réfutations - Essai sur la logique de la découverte mathématique - Edition Hermann - 1984 - p.XX

Dans la première partie achevée, nous pensons avoir montré :

D’abord, que les enseignants attachent de l’importance à cette notion pour des raisons d’apprentissage. A l’école, on apprend la vérité car elle s’oppose à l’erreur, à la subjectivité ; la vérité est assimilée à l’objectivité du réel en étant étroitement reliée avec la notion de preuve. En outre, parce que la vérité s’oppose au mensonge, à la ruse et à la contrainte persuasive, des raisons de citoyenneté justifient que cette question puisse être centrale dans l’enseignement des mathématiques. Enfin, cette notion est considérée comme essentielle par les enseignants pour des raisons d’usage professionnel.

Ensuite, du côté des élèves, la question du vrai tient une place importante du point de vue de la prégnance de l’existence du vrai en soi. Les élèves mettent rarement en doute son accessibilité dans la mesure où ils l’associent étroitement avec la preuve. L’importance qu’accordent les élèves à cette notion ressort également dans la liaison qu’ils établissent entre le vrai et l’objectivité du réel : pour la vie courante, la recherche du vrai est importante.

Enfin, depuis la maîtrise et le DEA, notre recherche a évolué progressivement pour aboutir à un questionnement sur le traitement de la question du vrai dans l'enseignement des mathématiques.

Une formation mathématique ne peut pas se permettre d'ignorer les modes de construction du savoir qui se sont mis en place au cours de l'histoire. Aussi, devient-il nécessaire d'éclairer conceptuellement la notion du vrai. Cet éclairage s'orchestrera en quatre mouvements.

Nous nous intéresserons d'abord à un aperçu dans le champ philosophique ; ensuite, nous rétrécirons notre analyse pour relater comment, au fil de l'histoire, les hommes se sont emparés de la question du vrai pour observer l'évolution des conceptions dans le champ des mathématiques. Puis pour donner de l'épaisseur à notre objet d'étude nous nous focaliserons sur une approche épistémologique. Toutes ces approches nous permettront alors de penser un usage possible de l'idée du vrai pour une épistémologie des mathématiques scolaires.

Chapitre 1. Le vrai et sa résonance dans le champ philosophique : un aperçu.

L'universalité scientifique ne résiste pas à l'épreuve du temps. Elle se limite à l'accord de tous les chercheurs à un moment donné, excepté dans les domaines en crise. Mais il n'en va pas de même pour la philosophie. Par essence, cette discipline a vocation à s'interroger à propos de la vérité tout en notant que dans le même temps, sa capacité à atteindre la vérité est mise en doute, faute de méthode de contrôle des hypothèses avancées. « *Se réclamant de Bachelard, Desanti préconise une tâche critique qui s'installe dans le contenu des énoncés scientifiques et travaille au « voisinage » de ceux-ci. Il n'est pas sûr que cette attitude, qui fait corps avec l'activité scientifique, permette d'échapper au risque de reproduction du discours scientifique mais elle a au moins un avantage direct : celui de pouvoir être adoptée, du niveau le plus humble de connaissances en mathématiques jusqu'au niveau le plus élevé, pour s'instruire de la science, et par conséquent de la raison dans les actes où elle se constitue* » [69] .

Si nous ne revendiquons pas la position du philosophe nous insistons tout de même sur le bien fondé de cette approche en reprenant unecitation de J. Dieudonné (dont nous rappelons l'appartenance au groupe Bourbaki). *« Certes, la philosophie semble s'être détachée de plus en plus de la science et méconnaît maintenant son esprit, ignorant l'antique tradition de Thalès et de Platon. Cette tradition était encore vivace en France à la fin du 19 ième siècle, comme en témoigne le premier numéro de la revue de Métaphysique et de morale publié en 1883, où Xavier Léon soulignait la prédilection des philosophes pour les sciences mathématiques ce grand art aux ressources inépuisables,*

[69] CLERO J. P. - *Epistémologie des mathématiques* - Edition Nathan - 1990. p.4

issu, à l'instar de la philosophie, de l'esprit humain. Mais aujourd'hui cette sève nourricière de la spéculation philosophique est ignorée par la plupart des philosophes, devenus presque muets à son égard. Les mathématiciens eux, se cantonnent souvent dans les aspects techniques de leur art et méprisent ce qui leur paraît être un vain bavardage, sans se rendre compte que plus une science progresse et plus elle a besoin d'un champ réflexif, d'une conscience au sens de Husserl pour rester authentique. Car la science ne constitue pas un monde à part comme le prétendent certains positivistes contemporains ; elle plonge ses racines dans la culture d'un peuple, et la nourrit en retour. Isoler une théorie du mouvement d'idées qui l'a amenée, des intentions qui l'on accompagnée, la considérer seulement comme un corps de théories à prouver, c'est remplacer une pensée vivante et significative par une pensée morte, c'est ignorer le frémissement de l'esprit qui l'a conçue [70] *.*

J.Russ [71] , dresse une espèce de panorama, fort complet semble-t-il, des courants et mouvements de pensées qui ont traversé le 20ième siècle qui selon elle « *appartient, en effet, aux figures et formes tracées par Nietzsche : c'est avec lui que débute réellement la pensée moderne (certains diront post moderne), que l'on entre dans la « clairière désenchantée de la post modernité ».* [72] C'est, à travers ces courants que nous avons essayé de repérer la manière dont l'idée de vérité était véhiculée. Cherchant à identifier des liens entre les préoccupations de l'homme et cette notion du vrai sous l'angle philosophique nous lançant donc à la quête du sens. La convocation de ce regard nous fournit autant d'outils d'interprétation nous permettant ultérieurement de lire la récolte de sens issu du terrain.

Parole d'élève* [73] *. Réfuter les premières thèses mathématiques, c'est réfuter le monde actuel, car les mathématiques sont étroitement liées à la physique donc à toute la technologie. A partir de là, on peut dire que si on est arrivé au monde actuel, alors il y a forcément de la vérité à la base.

Si nous n'entamons la recherche des conceptions philosophiques du vrai qu'au XXième siècle alors que cette question est posée par les pré-socratiques c'est d'abord, que « *de leur œuvre, il ne reste que des fragments* » [74] . Ensuite, parce qu'il nous semble que derrière les grandes théories du XXième siècle se cachent des théories philosophiques comparables à celles des grands précurseurs que peuvent être, Parménide, Héraclite,

[70] DIEUDONNE J. - *Penser les mathématiques* - Séminaire de philosophie et de mathématiques de l'ENS . Edition du Seuil - 1986 - p. 8

[71] RUSS J. - *La marche des idées contemporaines* - Edition Armand Colin - 1994

[72] HABERMAS cité par RUSS J. opus cit. p. 11.

[73] Le paradigme de recherche dans lequel la thèse s'inscrit étant la recherche action, nous émaillerons notre texte de paroles d'élèves afin d'entretenir une proximité entre la réflexion spéculative et notre terrain d'observation, au travers les représentations des élèves sur l'idée du vrai que nous recueillons, par écrit, au cours des deux ans de l'expérimentation. Toutes les paroles des élèves sont contenues dans les documents appartenant aux Annexe 7 et Annexe 9.

[74] HUISMAN D. - Les pages les plus célèbres de la philosophie occidentale. De Socrate à Foucault. Edition Perrin. 1989. p.23

Protogoras, ou encore Zénon, Empédocle, Thalès et Anaximène. En ce sens qu'ils ne s'intéressent pas seulement aux spéculations sur l'être et la nature mais qu'ils se penchent aussi « *sur l'homme fait de chair et de sang, sur ses passions, sa souffrance, ses doutes, son destin* » [75] . La quête de la sagesse comme D. Huisman le montre va même s'exalter pour Parménide en mettant « *en scène un héros qui parvient, à travers un voyage initiatique, jusqu'à la Vérité* » [76] . Autant de similitudes qui permet de penser que les philosophes modernes s'inspirent, se nourrissent et prolongent une réflexion déjà présente à une époque qui va du « *VIIième siècle au Ivième siècle avant JC* » [77] .

Le choix de Nietzsche réclame aussi une justification. Mobiliser ce philosophe permet de faire un lien avec le Cercle de Vienne. La pensée de Nietzsche tout comme les prétentions du Cercle de Vienne traduisent le retournement de la volonté de puissance : la science (nouveau Dieu) cesse de désigner l'acte explicatif par excellence tout comme Nietzsche annonce que « *le Dieu chrétien et le supra sensible sont déchus de leur souveraineté* » [78] .

C'est pourquoi, nous reprenons cette idée forte consistant à remarquer que la recherche de la vérité apparaît comme un substitut après la mort de Dieu. En effet, à l'aube du 20ième siècle l'homme se lance à la poursuite d'un nouvel Absolu, recherchant une nouvelle idole à « adorer ». On assista alors au passage de la quête religieuse vers une quête de légitimation du réel, et ce, à travers la science (référence au Cercle de Vienne).

L'influence de la pensée de Nietzsche dans la pensée moderne étant consacrée il apparaît que celui-ci n'adhère pas aux trois prédicats ontologiques du vrai selon l'Idéal métaphysique :

- prédicat 1 : la vérité est substance.
- prédicat 2 : la vérité est permanence.
- prédicat 3 : la vérité est rationalité. [79]

Contre le premier, Nietzsche argue que la vérité ne vaut, que parce qu'elle est issue de relations entre les êtres. La vérité n'est pas substance puisque l'être en soi n'existe pas. Ce sont les relations qui fondent l'être.

On ne peut pas, ne pas faire le rapprochement avec le courant hilbertien en mathématiques qui appréhende les mathématiques sous l'angle structural. En effet, dans la démarche axiomatique moderne, les notions premières (en géométrie par exemple, point, droite, etc...) sont considérés comme des entités abstraites dont la signification concrète importe peu. Hilbert lui-même aurait illustré cet aspect, par une boutade célèbre,

75 HUISMAN D. ibidem p 25

76 HUISMAN D. ibidem p.24

77 HUISMAN D. ibidem p.23

78 RUSS J. opus cit. p 12

79 GRANIER J. - *Le problème de la vérité dans la philosophie de Nietzsche* - Edition du Seuil - 1966 . p.60

selon laquelle on pourrait tout aussi bien remplacer les mots « point », « droite », « plan », par les mots « chaise », « table », « chope de bière » respectivement. Seules importent les relations entre les entités premières, relations qui fondent les axiomes. Il s'ensuit alors que les propriétés qui se déduisent à partir d'une telle théorie formelle ont alors un caractère général.

Contre le deuxième, Nietzsche soutient que « *l'aspiration à la vérité est le masque d'une simple volonté de sécurité ontologique. L'homme cherche la vérité : un monde qui ne puisse ni se contredire, ni tromper, ni changer, un monde vrai - un monde où l'on ne souffre pas or la contradiction, l'illusion, le changement est la cause de la souffrance* ». [80] Quand on s'empare de cette réflexion, on ne peut que basculer vers l'évolution des conceptions du vrai au sein des mathématiques pour en analyser la portée. L'aspiration au vrai entretiendrait le parallèle avec la recherche d'un monde lisse, d'où la contradiction se voit pourchassée au titre qu'elle n'assigne à l'homme que de la souffrance.

Contre le troisième, Nietzsche affiche son scepticisme en déclarant qu'à l'endroit de la « *logique : tentative de comprendre le monde réel d'après le schéma de l'Etre que nous avons construit... Je me méfie de tous les gens à système ...la volonté du système est un manque de loyauté* ». [81] Si la défiance du philosophe rappelle la tentative vaine, des courants logiciste et formaliste à prouver la consistance des mathématiques, notre émettons une réserve à considérer que pour autant, leurs revendications attesteraient un manque de loyauté. La quête du vrai au sein des mathématiques ne peut pas ne pas revendiquer des approches qui nécessitent que des règles soient fixées : que l'entreprise soit totalisante, certes, mais la convention mathématique fait aussi œuvre d'objectivisme.

En revanche, nous n'avons pas de peine à nous rallier à un des points de vue de Nietzsche, quand il associe la volonté de la recherche du vrai comme une aspiration de l'homme à l'accession d'un monde où règne l'ordre et la permanence. La recherche du vrai attise l'assurance contre la souffrance qui résulte du changement.

Les réticences qu'affiche le philosophe, comme ce rejet de la croyance en des vérités éternelles ou encore cette méfiance vis à vis de la globalisation (système) font encore resurgir des problématiques soulevées dans le champ mathématique. La pensée du philosophe, à laquelle nous nous adossons oriente résolument ses critiques contre la cible du modèle dogmatique, entrave au libre cours de l'histoire. Nietzsche rompt les amarres avec quelques figures emblématiques du monde philosophique et scientifique en confiant que *« ce qui nous sépare le plus radicalement du platonisme et du leibnizionisme c'est que nous ne croyons plus en des concepts éternels, à des âmes éternelles, et la philosophie dans la mesure où elle est scientifique et non dogmatique, n'est pour nous que l'extension la plus large de la notion « d'histoire ». L'étymologie et l'histoire du langage nous ont appris à considérer tous les concepts comme devenus, beaucoup d'entre eux comme encore en devenir; de telle sorte que les concepts les plus généraux étant les plus faux doivent aussi être les plus anciens. « L'Etre », « la substance », « l'absolu », « la chose » la pensée a inventé d'emblée et de toute antiquité*

[80] NIETZSCHE cité par GRANIER J. opus cit. p. 63.

[81] Ibidem p. 67.

ces schèmes qui contredisent le monde du devenir [...] *Les prédicats d'identité et de permanence que la métaphysique rattache à l'essence du vrai ne font que traduire le dépit qu'éprouve l'homme de ne pas maîtriser l'écoulement du temps et ne pas régenter à sa guise les réalités mouvantes du devenir* ». [82] En cela la pensée nietzschéenne nous éclaire.

J.Russ avance l'hypothèse que la période 1930 - 1960 est un monde ancré puissamment dans le 19ième siècle. Pour preuve, Apollinaire déclarant dans son poème Zône , « a *la fin tu es las de ce monde ancien...Tu en as assez de vivre dans l'Antiquité grecque et romaine* ». Clin d'œil au poids de cet héritage social et culturel dont l'homme a du mal à s'extraire « *malgré ces transformations* [allusion aux mutations scientifiques et techniques] *sans précédent, quelques exemples nous permettent de discerner, sous l'apparente évolution, sous les devenirs et les flux, sous les métamorphoses techniques, des plages immobiles, stables, des habitudes d'être, de penser et d'agir héritées de l'ancien temps, des permanences, tout un sol fixe et pétrifié servant de base à l'ensemble* ». [83]

Parole d'élève. D'après ce que j'ai compris, la vérité à des limites et peut à tout moment être remise en question. Je le découvre car je pensais que les théorèmes, les notions mathématiques étaient intouchables.

D'un côté l'éclosion des avancées techniques et scientifiques et de l'autre, la force de pesanteur d'une pensée antique assurant la croyance en la pérennité de formes stables. Et pourtant.

La période judicieusement sélectionnée par J. Russ caractérise certainement un moment charnière en ce sens puisqu'elle fait côtoyer les derniers soubresauts du Cercle de Vienne (la « mort » de ce mouvement auquel nous nous sommes intéressé antérieurement étant situé aux alentours de 1931) avec le retentissement des déclarations de Gödel. Si bien que l'esprit scientiste, qui a perduré bien évidemment au-delà de la mort symbolique du mouvement auquel il se rattache, en est malgré tout ressorti quelque peu écorné. L'immanence de la fin du néo positivisme (science des faits) offrait un tremplin pour l'envol vers un renouveau de la pensée du vrai. L'idée même qu'en sciences l'incertitude existe pouvait triompher, alors même que la visée initiale du Cercle de Vienne était de parvenir au contraire, à une certitude quant aux fondements, des mathématiques.

Le paysage où reposait cette dialectique classique où le Beau s'élevant au-dessus de l'utile, conduirait au Vrai puis enfin au Bien avait maintenant du mal à se reconstruire tant l'idée du vrai devenait elle-même problématique.

Reconstruction difficile puisque ce nouveau paysage avait reçu les échos de la phénoménologie qui vit le jour avec Husserl (philosophe et mathématicien :1859 -1938). Son intention était de s'attaquer à l'établissement des fondements de la connaissance des sciences, à partir de la philosophie comme source originaire. Il lutta contre le psychologisme car « *il refuse de réduire, par exemple, la vérité de l'objet mathématique à*

[82] Ibidem p. 63.

[83] RUSS J. opus cit. p. 21.

de simples données psychologiques. Une vérité mathématique n'est - elle pas indépendante du sujet qui la révèle et qui la manifeste dans l'ordre des pensées ? l'idée même de vérité ». [84] Il décida donc de poser les questions ultimes à la raison (celle de la vérité de l'esprit) et en revint à dire que d'*une manière générale le psychologisme semble voué aux contradictions et même à un paradoxe interne : relativisme tendant à dissoudre toute objectivité, il débouche sur un scepticisme où meurt* une science de l'esprit visant les essences qui seules permettaient de comprendre les faits. Il créa l'eidétique, la science des essences.

C'est la « conscience pure » qui donnera le sens du monde (et donc l'accès à la vérité).Husserl fonda l'espoir d'établir une science universelle. La conscience, affirme t-il n'est pas un contenant mais une tension vers les choses. Cela représente plus largement la notion de vécu de conscience. La conscience est la « conscience de quelque chose »; « *c'est une certaine évidence universelle appliquée à l'essence de la conscience en général, cette conscience nous intéressant tout particulièrement dans la mesure où c'est en elle, et en vertu de son essence que la réalité « naturelle » accède à la conscience. Nous poursuivrons cette étude aussi loin qu'il est nécessaire pour obtenir à l'évidence à laquelle nous avons visé, à savoir que la conscience a, en elle même un état propre* [...] ». [85]

Il y a chez Husserl, selon nous, l'idée qu'il existe dans l'homme réel un être à part entière et qui est sa conscience ce qui lui permet d'appréhender le monde puisque c'est à travers un contact intentionnel (de la conscience) qu'il percevra le monde. Un élément nous frappe, dans les expressions mêmes de Husserl en son recours systématique aux termes de « universelle », « pure », « essence », qui rappellerait bien cette volonté (par le biais de la recherche du vrai : recherche de l'essence) d'accéder à un domaine en quelque sorte aseptisé d'où le contradictoire serait absent. D'autant plus lorsque Husserl s'exprime sur la vérité, il fait référence à la raison théorique, à l'évidence, à la vérité théorique [86] autant d'agents du « maintien de l'ordre ».

La pensée de Husserl se poursuivit avec celle de Heidegger (1889-1976) mais l'on commença à discerner que les préoccupations philosophiques se « déplaçaient » ; il ne s'agissait plus de faire des investigations pour rechercher les fondements de la connaissances donc d'accéder à une vérité liée aux sciences, mais plutôt de s'orienter vers

une quête de l'Etre qui mit en évidence la problématique de l'être et du temps. On ne parla plus de vérité déterminée par un savoir scientifique, mais on s'attaqua au problème du temps et de l'existence pour essayer d'approcher la vérité de l'être. C'est comme si la philosophie, amorçait un virage, afin de recentrer ses problématiques (et la question du vrai en l'occurrence) à l'intérieur de son domaine. La philosophie se distancia des sciences tout comme les mathématiques s'émancipèrent de leur souci d'adéquation au

[84] RUSS J. opus cit. p. 45.

[85] HUSSERL - *Idées directrices pour une phénoménologie* - Edition Gallimard - 1995 - p. 107 et 108.

[86] Ibidem opus cit. paragraphe 139 p. 468 à 471.

monde physique.

Avec Jaspers (1883-1969), phénoménologue aussi, on assiste à une pensée de l'existence qui va s'appuyer sur une critique du savoir objectif car il soutenait que « *en philosophie [...], il y va d'une vérité qui, là où elle brille, atteint l'homme plus profondément que n'importe quel savoir scientifique* ».[87] Assurer la primauté à la réflexion philosophique (sur celle de la science) fut l'urgence du moment. Elle seule, peut prétendre à cette volonté de savoir en établissant une centration sur l'expérience. La raison impose de convenir des limites de la science puisque l'unité du savoir scientifique s'avère être un leurre.

S'annonce alors un autre concept représentatif du vingtième siècle celui de liberté, focalisant sur l'interrogation de l'existence engagée librement dans le monde. Problématique résolument philosophique qui écarte pour un temps la question du vrai.

La liberté loin de se prouver s'éprouve. Une centration sur l'humain s'opère qui va s'accentuer avec la pensée existentialiste de Sartre (1905-1980). Liberté exacerbée puisque pour Sartre, tout est acte et la conscience est « comme néant d'essence », (ce qui marque une rupture avec Husserl). « *La liberté , ce fondement infondé est à la racine de tout choix* ».[88]

La philosophie semble donc laisser de plus en plus de côté ses préoccupations spéculatives en matière de vérité scientifique pour se centrer de manière beaucoup plus pragmatique sur l'homme en soi. Mais ce n'est que de courte durée puisqu'à la fin des années cinquante c'est l'éclipse des courants humanistes au profit d'un autre :le structuralisme .Ce quifaitdéclarer à Pingaud que *« la philosophie, qui triomphait il y a quinze ans, s'efface aujourd'hui devant les sciences humaines et cet effacement s'accompagne d'un nouveau vocabulaire. On ne parle plus de« conscience » ou de « sujet », mais de « règles », de « codes », de « systèmes »; on ne dit plus que l'homme « fait le sens » mais que le sens « advient à l'homme »; on n 'est plus existentialiste mais structuraliste* ».[89]

Amorce d'une déconstruction conceptuelle ? Peut-être. Le structuralisme se centre sur les relations qui articulent des ensembles d'êtres alors que l'existentialisme privilégiait le sens de l'être. Mais alors, le structuralisme comme pensée qui dissipe l'homme ?« *L'analyse structurale fait prévaloir les strates, les discontinuités, les séries multiples et discontinues. La mise à distance de la catégorie de totalité inaugure la « déconstruction* » des *grands récits unificateurs* [...] *A l'histoire une régie par la catégorie de totalité, Lévy Strauss substitue des histoires plurielles étrangères à toute globalité* [...] Même *une histoire qui se dit universelle n'est encore, nous dit Lévi Strauss qu'une juxtaposition d'histoires locales* [...] *Le structuralisme émiette et dissipe le sujet, il défait totalement l'idée d'un sujet donateur de sens. On ne peut plus penser, avec le structuralisme que dans le vide de l'homme disparu* ».[90]

[87] JASPERS K. - *Introduction à la philosophie* - Edition Plon - cité par RUSS J. opus cit. p. 67.

[88] RUSS J. opus cit. p.58.

[89] In L'Arc n° 30 cité par RUSS opus cit. p. 139.

Nous avançons qu'il y a comme une espèce de paradoxe dans cette pensée structuraliste en ce sens que ce courant « émiette » l'homme, donc le met en retrait en tant que sujet acteur en quelque sorte, comme pour mieux se préoccuper de lui précisément. En effet, le structuralisme fait songer à l'idée que l'intelligibilité de l'homme est saisie en tant que structure, donc en tant qu'homme - système (de transformations) mais par là - même c'est reconnaître à l'homme ses singularités, puisque s'il y a système, il y a lois .

De plus, le structuralisme renouerait avec les courants qui cherchaient à établir des vérités mais avec la différence qu'il s'agirait ici, de vérités locales et non plus absolues. La question des hommes prévaut sur celle de l'Homme comme si la position philosophique revendiquait le singulier pour faire le deuil de l'universel. Passage du Vrai au vrai.

Symptômes de la maladie de notre temps, le nihilisme instaura la crise des fondements si l'on suit J. Russ : *« l'Absolu se voit ainsi mis à distance et le monde désenchanté privé de puissances sacrées et d'idoles* [...] *Les hommes récupèrent leur existence, ils ne sont plus faits par les dieux mais producteurs d'eux mêmes* [...] *Ilya Prigogine ne voit-il pas dans le monde d'aujourd'hui le lieu d'une insécurité radicale* ». [91]

L'homme moderne baignerait dans un monde où tous les modèles de légitimité, tous les fondements absolus se sont évanouis aussi bien du côté des sciences (le milieu du 20ièmesiècle marque la crise du savoir), que dans les domaines des sciences humaines (la pensée complexe ou systémique étant dominante et s'affirmant comme anti pensée déterministe ou totalisante).

En somme, comme le dit G. Balandier *« la modernité, c'est le mouvement plus l'incertitude »*.

C'est dire si l'idée de vérité dans le domaine philosophique s'estompe pour faire place aux véritéS .

Comme le fait remarquer J. Granier, « c*e qui est à l'œuvre, même chez ces véritables amis de la vérité, les philosophes, c'est une finalité souvent ignorée d'eux mêmes : ils veulent a priori une certaine vérité de telle ou telle nature et bien souvent ils trahissent leurs besoins les plus intimes en suivant le chemin qui est le leur pour aller à leur vérité* ». [92] Certes, nous avons pu observer que le vrai relevaient de variations telles que vérité / réel, ou vérité / bien ainsi que vérité / rationnel / logique et encore vérité / être. En d'autres termes, le vrai renvoie au moins à deux registres différents. Ceux de la logique et de la morale et s'applique sur des objets et dans des contextes particuliers. Mais en est-il autrement dans les sciences ?

« A *ses yeux* [ceux du philosophe], *les valeurs qu'il tient pour supérieures doivent être d'une extraction plus noble que les valeurs inférieures, elles doivent se rattacher à une sphère ontologique radicalement distincte* ». [93] Donc, même certains philosophes

[90] RUSS J. opus cit. p. 140.

[91] Ibidem p. 177.

[92] GRANIER J. opus cit. p. 38.

s'affrontent à la question du garant de la vérité. Serait convoqué par exemple, la métaphysique qui considère que la vérité est en soi, et qu'elle appartient à un monde intelligible qui serait l'antithèse du monde sensible et réel. Ce dernier étant trompeur voire mauvais. Cela rappelle fortement le platonisme : la vérité est immanente comme appartenant à un monde des Idées pures. Mais là encore, invoquer la logique, le raisonnement ou l'intuition pour légitimer le vrai en mathématiques entretient-il une réelle distance avec la manière dont s'y prend la philosophie en convoquant des modèles qui lui sont propres ?

Ce panorama des grands courants de pensées du 20ième siècle montre que cette idée de vérité est présente dans les préoccupations des philosophes à des degrés différents et sous des angles différents. Elle traverse bien notre monde contemporain, même (et encore) dans ce champ. Nous mesurons l'imbrication de la spéculation philosophique avec les préoccupations scientifiques et réciproquement.

Il semble également que cette notion de vérité soit souvent liée au problème de l'être, ou de l'existence. Cela renseigne donc, qu'aborder cette question du vrai déborde du champ restreint des mathématiques tant la présence de l'homme, même dissimulée, est toujours sous-jacente. Ce qui ne fait qu'accentuer le renvoi aux deux champs logique et moral en matière de vérité auxquels nous avons déjà fait allusion.

Pour finir, nous oserons avancer que la pensée de Nietzsche est à la philosophie ce que la pensée de Gödel est aux mathématiques : en effet, dans ce renoncement aux valeurs éternelles et absolues que prône Nietzsche il y a comme un avant goût en philosophie de ce qui s'est passé dans le champ des mathématiques. Nietzsche n'introduirait il pas une « rupture épistémologique » dans le champ de la philosophie ? En tous cas, Nietzsche comme précurseur de la pensée moderne nous semble donc une prémisse que nous assumons pleinement d'autant plus que « [...] *la pensée comme la réalité est toujours en mouvement et les concepts mathématiques sont des notions en perpétuel devenir constamment enrichis et remaniés par de nouvelles abstractions* » [94] .

Synthèse globale du survol de la notion de vrai dans le champ de la philosophie du 20 ième siècle.

- Focalisation sur la vérité des fondements de la connaissance

étude de la vérité de l'esprit : la recherche du vrai devient la recherche de l'essence (courant husserlien)

- Passage à la vérité de l'être

détournement de la vérité déterminée par un savoir scientifique (courant de Heidegger)

- La question du vrai est évacuée par les courants humanistes

[93] GRANIER J. opus cit. p. 40.

[94] LOI M. - opus cit. p. 119.

- centration sur la notion de liberté (l'existentialisme Sartrien)
- Introduction du structuralisme et de la notion de vrai local

Chapitre 2. Le vrai en mathématiques : approche historique.

Dans un contexte social qui fait de la pensée l'instrument et le fondement du pouvoir, où le discours éprouve sa puissance de conviction dans l'usage de ses règles, nous avançons que l'idée du vrai tient en otage aussi bien la rationalité que la démocratie. La rationalité d'abord, puisque nous inscrivons l'idée du vrai au sein des mathématiques, science démonstrative par excellence. Et la démocratie aussi, puisque l'idée du vrai vise l'idéal d'élever chacun au-dessus de lui-même pour participer à l'émergence de son émancipation. Mais,« l*es mutations de l'idée de preuve vont de pair avec des transformations de sens et des formes d'accès au sens de la matière mathématique travaillée* ». [95] Quelles conséquences pour l'idée du vrai ? C'est ce que nous nous proposons d'éclairer au fil de l'histoire de la pensée des hommes.

En suivant M. Legrand [96] , nous considérons que les mathématiques sont aussi importantes pour l'homme par la façon dont elles lui permettent de penser le monde que par les résultats qu'elles établissent. La pensée mathématique n'est pas la pensée naturelle ni même son prolongement, elle est autre et c'est essentiellement cette autre façon de penser les questions qui est un savoir utile, utilisable, car c'est ce savoir qui peut permettre au sujet de changer ses représentations sur le monde, de concevoir une autre façon de poser des problèmes et d'envisager ses capacités à les résoudre. Ce qui nous intéresse, c'est de comprendre comment les hommes se sont emparés de la question du vrai dans le but de l'éclaircir conceptuellement.

Parole d'élèves. Je pense que l'histoire de l'homme est en rapport direct avec l'histoire de cette science que sont les mathématiques.

A propos de la place du vrai dans la pensée mathématique nous entendons donner un éclairage à la fois sur la nature de ce que les hommes considèrent comme vrai au fil des siècles, sur la fonction que remplit cette notion de vrai et sur les moyens proposés pour distinguer le vrai. Nous n'affichons aucune ambition d'exhaustivité mais notre intention est plutôt de faire ressortir quelques pensées paradigmatiques qui ont jalonné l'histoire des mathématiques. Notre parti pris est d'emprunter un itinéraire chronologique qui s'origine dans les commencements des mathématiques, environ au IVième millénaire avant notre ère, pour s'achever au XXième siècle sans pour autant que les périodes retenues

[95] ROUCHE N. - *Amener à l'évidence ou contrôler des implications ?* - in *La démonstration mathématique dans l'histoire* . Actes du 7[ième] colloque inter-IREM. Epistémologie et histoire des mathématiques. 1990. p.9.

[96] LEGRAND M. - *Recherches en didactique des mathématiques - La problématique des situations fondamentales.* Volume 16/2. Edition La pensée sauvage.1996. p.248.

puissent faire l'objet d'une datation précise. Il est clair que l'on ne peut affirmer avec exactitude le moment historique où des changements de pensée sur la question du vrai s'opèrent. En revanche, nous avons pu déceler les moments de rupture de certains courants ce qui permet d'établir une succession de périodes pendant lesquelles s'affirment ce que nous avons nommé précédemment les pensées paradigmatiques. C'est pourquoi, la façon de les nommer met en exergue ce que véhicule l'idée du vrai durant la période considérée. Ces périodes présentent une hétérogénéité du point de vue de leur durée qui peuvent regrouper plusieurs siècles ou seulement la moitié d'un.

a) Le vrai au service d'un mode de vie.

Les balbutiements des mathématiques se situent vraisemblablement, en Mésopotamie et en Egypte. Il est dorénavant établi que mathématiques et écriture entretiennent « une relation symbiotique » et qu'« *elles sont nées en même temps et leurs destinées sont étroitement liées, même si la seconde (l'écriture) s'est dans une large mesure libérée des contraintes imposées par les premières (mathématiques)* [97] *.* Et J. Ritter de renforcer par, « *pour qu'une société développe une mathématique qui aille au-delà du simple calcul, un support matériel d'une sorte ou d'une autre est nécessaire. Sans écriture, les limitations de la mémoire humaine restreignent le degré de sophistication numérique qui peut être atteint. Ce point est bien connu depuis longtemps ».* [98]

Le développement des mathématiques va de pair, également, avec le type de problèmes que se posaient les hommes dans leur vie pratique. Leurs résolutions répondaient à des besoins de la vie courante : savoir mesurer, diviser, répartir. Leurs pratiques mathématiques se résumaient à des textes de procédures qui correspondaient au comment de la résolution et à des tables (auxquelles se référaient les premiers afin de pouvoir obtenir les calculs).

A ce sujet, signalons la différence d'approche du vrai que relève J. Ritter, entre celle des Mésopotamiens et celle dont usent les mathématiciens modernes. Il souligne que « là où nous résolvons des questions particulièrement mathématiques, en créant d'abord une règle générale et en la spécialisant ensuite à différents cas particuliers les Mésopotamiens pouvaient atteindre le même résultat en construisant une grille d'exemples typiques et en interpolant ensuite pour résoudre de nouveaux problèmes ». [99]

Autre particularité. Les mathématiques ne relevaient pas encore d'une épistémologie internaliste, (comme c'est le cas actuellement), mais plutôt d'une épistémologie externaliste (au sens de mathématiques appliquées). De fait, on remarque la visée pragmatique des mathématiques « originelles ». Les solutions des problèmes trouvant leur retentissement dans la résolution de problèmes de tous les jours, autrement dit, la

[97] RITTER J. - *Chacun sa vérité : les mathématiques en Egypte et en Mésopotamie - in Eléments d'histoire des sciences* - Edition Bordas - p.40.

[98] Ibidem p.40.

[99] Ibidem p. 35.

recherche du vrai (au sens de recherche de solutions efficaces) était au service de l'Homme.

On relève aussi que la recherche du vrai en Mésopotamie et en Egypte ne faisait pas l'objet du même traitement : les opérations et les techniques bien que différentes aboutissaient déjà à des résultats identiques.

Ce regard sur les origines des mathématiques nous informe d'abord, qu'à partir du moment où il y a communauté d'hommes sous forme sociétale, les mathématiques apparaissent comme un besoin naturel lié à la nécessité de laisser une trace d'où leur symbiose avec l'écriture.

Ensuite, le recours aux mathématiques s'explique pour résoudre des problèmes dont les solutions étaient considérées comme « des vérités », étant donné qu'elles entretenaient la permanence de la société sur le plan « économique », tout en contribuant au développement d'une culture puisque « c'est le besoin de mesurer, diviser et répartir la puissance matérielle de leurs sociétés qui a donné naissance aux premiers systèmes d'écritures » [100] .

Parole d'élève La vérité pour moi est une vérité qui colle à la réalité et au « sens commun ».

Liée à des procédures et à des techniques opératoires différentes, cette recherche de vérité(s) témoignait de son ancrage dans des cultures particulières. Pour un même problème, et les démarches de résolution, et les outils que ces civilisations utilisaient étaient différents. En d'autres termes, la manière de résoudre un problème (et par là - même d'atteindre le vrai) se démarquait de la nécessaire adhésion à une norme universelle et interne aux mathématiques.

En outre, ces deux civilisations, d'après l'étude de J. Ritter, témoignent essentiellement d'une pensée algorithmique. Ce processus semblait donc suffisant pour instituer le vrai. Cela incite à penser que l'ambition de ces civilisations était de parvenir à du vrai « local », au sens du vrai utile et donc que cette idée du vrai s'inscrivait assez naturellement, comme allant de pair avec le projet de survivance de la civilisation, mais pas uniquement. On peut aussi pressentir tel Michel Serres, que « *la procédure algorithmique présenterait un échantillon naïf de ce qui deviendrait par la suite une démonstration en forme [...] autrement dit, la théorie et la pratique de la démonstration supposent un algorithme. Celui-ci prépare dans l'histoire celle-là »* [101] . La pensée algorithmique comme prélude au « miracle grec » [102] .

J. Ritter conclut : la recherche du vrai relève de la contingence. « *Enfin, le développement des mathématiques à leur commencement met en évidence la nécessité d'une analyse plus fine du rapport entre les besoins matériels d'une société et la nature de la recherche mathématique, « s'engendrant librement ». Si les mathématiques*

[100] RITTER J. ibidem p.41

[101] SERRES M. opus cit. p. 88.

[102] L'expression est d'Ernest Renan.

antiques ne furent jamais « simplement » pratiques et empiriques , il est peut être tout aussi vrai que les mathématiques contemporaines ne sont pas « purement » abstraites et spéculatives. Si les techniques servent aux avances du domaine, ne doit-on pas penser que tout problème mathématique surgissant dans une société donnée est, en fin de compte, lié aux techniques que cette même société a forgées ? Et, en retour, que les mathématiques, tout comme les sociétés, ne peuvent se poser que des questions pour lesquelles une réponse, au moins potentielle, existe ? ». [103]

Récapitulation des idées fortes : le vrai au service d'un mode de vie

- L'écriture, est au service des mathématiques reliées à la vie courante pour laisser une trace
- Le vrai est contingent de règles particulières selon les cultures et relève d'une pensée algorithmique

b) Le vrai pour la conquête compréhensive de l'univers.

Nouveau contexte : la péninsule grecque, berceau sans précédent, d'une révolution des Arts, des Lettres et des Sciences. La science grecque passe d'un descriptif des faits à la recherche des causes, de la maîtrise de certains savoirs à la recherche systématique de la preuve et de leur validité. En cela la recherche du vrai opère un tournant.

En premier lieu, « j*usqu'à la fin du 19 ième siècle la recherche d'un ordre mathématique se confondait avec la recherche de la vérité. La croyance selon laquelle les lois mathématiques constituaient la vérité sur la nature attira les esprits les plus profonds et les plus nobles vers les mathématiques ».* [104] La recherche du vrai se combina très vite et pour longtemps, avec la volonté de percer les mystères de la nature ou du monde.

Donc, les mathématiques furent là, pour expliquer l'univers de manière conceptuelle. Un vrai détaché de son appartenance au monde matériel. Les mathématiques permettaient d'extraire la connaissance vraie à propos de ce dernier, soit parce qu'il existait des vérités qui faisaient partie d'un monde intelligible, soit parce que c'était à partir du monde réel que l'on pouvait mettre en évidence la vérité.

En effet, on se souvient que chez Aristote, l'expérience joue un rôle central : les conceptions mathématiques sont issues du monde sensible et contrairement à Platon, elles n'appartiennent pas à un monde à part. D'ailleurs, « *Platon alla plus loin que les Pythagoriciens en ce sens qu'il ne voulut pas seulement comprendre la nature au travers des mathématiques mais chercha à substituer la mathématique à la nature elle-même. Il pensait que quelque intuition pénétrante en direction du monde physique lui fournirait des vérités fondamentales grâce auxquelles la raison pourrait procéder de manière autonome »* [105] *.*

Parole d'élèves. En mathématiques, la vérité se fait et surtout par rapport à la

[103] RITTER J. opus cit. p. 60.

[104] Ibidem p. 57.

démonstration : il faut prouver ce qu'on avance, autrement dit, justifier sa conclusion par une démonstration. Une preuve en mathématiques, c'est une succession de raisonnements par lesquels on construit des hypothèses et on utilise des théorèmes (dont aucun élément nous prouve l'exactitude) mais que l'on a élaboré, confectionné et vérifié de nombreuses fois auparavant dans plusieurs contextes différents les uns des autres.

En second lieu, dans cette Grèce classique, la vérité se prête plus au pluriel qu'au singulier . Il s'agit pour les Grecs d'effectuer une quête de vérités. Fort est de constater que ce qui faisait l'objet des préoccupations des mathématiciens de l'époque, c'est de comprendre ce qui environnait l'homme grâce à leurs investigations mathématiques. On peut entendre, par exemple, vérité en astronomie (Ptolémée avec l'Almageste) ; vérité en optique (Dioclès et ses miroirs ardents) ; vérité en hydro statique (Archimède : les corps flottants). En conséquence, « *de tous les succès de la pensée spéculative grecque, le plus réellement nouveau fut leur conception d'un cosmos fonctionnant en accord avec les lois mathématiques découvertes par la pensée humaine. Les hommes étaient donc orientés versla recherche de vérités en particulier, de vérités relatives à la structure mathématique de la nature. Mais comment entreprendre la quête de telles vérités et être certain que ce sont bien des vérités ?»*. [106]

S'annoncent les prémisses d'une pensée dont la prégnance sera visible durant deux millénaires. Pour mériter leurs statuts, les vérités exigent d'être validées par la preuve. Une ère nouvelle s'ébauche, celle où le vrai tire son existence de la puissance de la preuve.

Car enfin, les mathématiques ne sont qu'abstractions intemporelles et « *la vérité mathématique ne pouvait relever que d'entités immuables et de leurs rapports »* [107] .

Echapper au monde sensible pour s'élever vers le monde des idées qui défieront le temps en modélisant des réalités. Voilà que les mathématiques se métamorphosent en un corps de concepts qui généreront à leur tour de nouvelles vérités et cela, à l'aide de l'introduction du raisonnement.

Ainsi, les Grecs établiront-ils des postulats et des axiomes (il était une fois Euclide) qui, par nature sont posés comme vrais puisque « auto évidente ».

Cette auto-évidence vue à travers le principe du « ressouvenir » issu de la pensée dualiste de Platon qui pose que, comme il existe un monde lieu de vérités, l'homme a visité antérieurement cet autre monde lorsqu'il n'était qu'une âme. Lors, il suffit de raviver l'esprit de l'homme pour qu'il puisse admettre les axiomes comme des vérités pures. Auto-évidence admise aussi chez Aristote par le biais de l'expérience qui, assistée de la raison sera garant du vrai.

Parole d'élève. Une preuve peut être juste en se basant sur des affirmations données par le professeur ou par des philosophes mathématiciens telles que

[105] KLINE M. - *Mathématiques : la fin de la certitude* - Edition C. Bourgeois - 1989 - p. 34.

[106] Ibidem p.37.

[107] Ibidem p. 38.

Platon, Thalès, Pythagore...et là on peut dire que la preuve émise peut être vraie.

Dès lors, une fois les axiomes admis, s'instaurèrent des règles de logique de manière à ce que la démarche de raisonnement puisse être reconnue comme valide (au sens du vrai qualifiant une démarche). Et la création du principe de non contradiction vit le jour et entraîna dès lors la reconnaissance du principe du tiers exclu : une proposition est soit vraie soit fausse.

Parallèlement, s'adjoignirent des règles de validité pour la recherche du vrai. Naissance du mode de raisonnement privilégié, ce garant de l'accès au vrai en le raisonnement de type hypothético-déductif. Et l'on remarque déjà, la disqualification chez les Grecs du raisonnement par induction ou par analogie.

En conséquence, les Grecs, en définissant la nécessité de délimiter un cadre à l'intérieur duquel la notion de vrai pouvait prendre du sens, restreignent la portée de l'idée du vrai.

Cette cohabitation entre vrai et raisonnement s'explique aussi par le fait que les Grecs ont la volonté d'introduire des vérités universelles, par le biais des mathématiques, sur le plan moral et social. *« Autre raison pour laquelle les philosophes favorisèrent le raisonnement déductif c'est qu'ils éprouvaient beaucoup d'intérêt pour un savoir étendu sur l'homme et sur le monde. Pour établir des vérités universelles que l'homme est par essence bon, que le monde a une fin, que la vie humaine a un but, le raisonnement déductif à partir de principes premiers reconnus valides offre sans doute une réalisation plus aisée que l'induction, l'analogie ».* [108]

Remarquons simplement qu'un méta postulat (situé en dehors des mathématiques) est institué, en ce sens que le raisonnement (déductif) garantit l'accès infaillible à (aux) vérité(s) de la nature de part son appartenance aux mathématiques, considérées comme corps de vérités (via les axiomes, admis sous le prétexte de l'évidence).

Enfin, l'on s'aperçoit que le vrai se prête à une conceptualisation.

L'idée du vrai prend corps sous la forme d'une représentation rationnelle du réel si bien que *« du point de vue de la recherche du vrai, il est remarquable que Ptolémée (égyptien : 98 - 168 après J-C) comme Eudoxe (390 - 337 avant J-C), comprenait parfaitement que sa théorie n'était qu'une description mathématique en accord avec les observations effectuées et n'exprimait pas nécessairement la structure du monde réel* ». [109]

Ce qui introduit l'idée que le vrai réclame une distanciation entre l'objet (qui serait la chosification du vrai) et le concept (l'idée de l'objet).En cela, l'idée du vrai acquière sa tonalité moderne sous la forme de la modélisation mathématique. Encore que cette idée de modélisation ne paraît pas présente dans la conception de Platon qui aurait tendance, à amalgamer structure mathématique du monde avec réalité du monde physique.

Récapitulation des idées fortes de la période : **le vrai pour la conquête compréhensive de l'univers**

[108] Ibidem p. 43.

[109] Ibidem p. 51.

- La recherche du vrai opère un détachement du monde matériel
- La recherche du vrai relève de la démarche de preuve
- La recherche du vrai est au service d'une modélisation

c) Recherche du vrai et dimension religieuse.

Changement radical de perspective : mathématiques et vrai coexistent toujours mais avec la médiation de Dieu. Le mythe de la vérité révélée prit forme. La quête du vrai se substitua à une quête religieuse. Découvrir l'ordre mathématique caché qui ordonne l'univers (certes) mais pour reconnaître la toute puissance de Dieu, puisque c'est lui qui est l'essence de cet ordre. Nouvelle dimension pour la recherche du vrai.

Envisager la structure mathématique comme œuvre de Dieu en gardant ce précepte à l'esprit par lequel « *l'homme ne pouvait espérer percevoir le plan divin aussi clairement que Dieu lui-même le comprenait, mais l'homme pouvait au moins chercher avec humilité et modestie à approcher l'ordre divin de façon à approcher le monde de Dieu »* [110] *.*

Parole d'élève. Pourrions - nous penser que nous avons des limites dans la déduction ?

Dieu incarna le créateur de la vérité cachée, tout de même accessible à l'homme à en croire par les propos de Kepler quand il déclare, « j*'entreprends de prouver que Dieu, en créant l'univers et en réglant l'ordre du cosmos, avait en vue les cinq corps réguliers de la géométrie tels qu'on les connaît depuis les temps de Platon et Pythagore et qu'il a fixé conformément à ces dimensions le nombre de cieux, par proportion et leurs rapports de leurs mouvements ».* [111]

Le mysticisme des scientifiques de l'époque frappe par leur empressement à formuler des hymnes à Dieu, conjointement à leurs découvertes. Kline rapporte par exemple la ferveur de Képler en ses termes : « vous soleil, lune et toutes les planètes, rendez lui grâce

de votre langage ineffable ! Harmonies célestes, vous toutes qui constituez ces oeuvres sublimes louez LE. Et toi, mon âme , loue ton créateur ! C'est en LUI et par LUI que tout existe . Que ce que nous savons le mieux est compris en LUI tout autant que dans notre vain savoir ». [112]

La vérité, au sens de la connaissance vraie c'est-à-dire le vrai de la nature, avait portant du mal à émerger pour peu qu'elle ne s'accorda pas avec le dogme catholique. Dogme qui n'admettait pas la doctrine grecque du plan mathématique de la nature. Le nouveau credo de cette époque reposait sur l'omniprésence du Dieu chrétien qui avait

[110] Ibidem p. 66.

[111] KEPLER in *Préface du mystère du cosmos* cité par KLINE M. opus cit p. 69.

[112] KEPLER cité par KLINE M. opus cit. p. 638.

ordonné l'univers mathématiquement. On se souvient de Galilée. Dans les faits, les mathématiques comme moyen d'accès aux vérités, furent donc grandement entravées par l'obscurantisme religieux, bien que Galilée persista à affirmer dans son Dialogue des grands systèmes du monde (1632) : « [...] L'homme atteint dans les mathématiques le sommet de toute connaissance possible (connaissance qui n'est pas inférieure à celle possédée par l'intellect divin) », en émettant une réserve, certes, « bien sûr l'intellect divin connaît et conçoit un nombre infiniment plus grand de vérités que l'homme ne peut le faire » mais tout de même « par rapport à la certitude objective des quelques vérités connus par l'esprit humain, elles le sont d'une façon aussi parfaite par l'homme que par Dieu ».

Cette certitude que le vrai était humainement accessible se retrouve également chez Descartes. Il suffit à l'homme d'user du pouvoir de son intuition uni à celui de la déduction afin que lui soit révélée la vérité. Descartes en quête des vérités dans tous les

domaines rédigea son « Discours sur la méthode pour bien conduire la raison et chercher la vérité des sciences (1637) ». Il posa les vérités comme « inaccessibles au doute » car données par l'intuition, car en effet, « touchant les objets que nous proposons à notre étude, il faut rechercher, non point ce que d'autres ont pensé, ou ce que nous-même nous entrevoyons, mais ce dont nous pouvons avoir une intuition claire et évidente, ou ce que nous pouvons déduire avec certitude ». [113]

En ce sens le retour au vrai via l'intuition et la déduction rappelle tout à fait la pensée grecque. Descartes semblant privilégier le pouvoir de l'intuition tout particulièrement comme « représentation inaccessible au doute, représentation qui est le fait de l'intelligence pure et attentive, qui naît de la seule lumière de la raison et qui, parce qu'elle est plus simple, est plus certaine encore que la déduction ». [114] Se confirme alors cette autre dimension dans l'idée du vrai : l'accession au vrai reste un pouvoir de l'esprit humain et la simplicité ainsi que l'évidence fonctionnent comme des gages de validité.

Il n'en demeure pas moins que pour Descartes les vérités existent en soi comme résultant de l'action divine, ce qui entretiendrait une proximité avec la théorie du « ressouvenir » de Platon. Il se distancie en effet de la pensée aristotélicienne en niant le recours aux sens (entendre par là, expérience) pour parvenir au vrai si l'on en juge par ce qu'il avance « [...] les mathématiciens trouvent la voie qui permet d'atteindre la certitude et l'évidence puisqu'ils partent de ce qui est le plus aisé et le plus simple. Les concepts et vérités des mathématiques ne proviennent pas des sens. Ils sont innés dans nos esprits et y ont été placés par Dieu. La perception par les sens de triangles matériels ne pourrait jamais fournir à l'esprit le concept de triangle idéal ». [115]

Autrement dit, on retrouve la prégnance de l'action de Dieu, au sein même de l'esprit, de Dieu qui prédétermine jusqu'à la pensée originelle de l'homme (ce qui n'engage que Descartes).

[113] DESCARTES R. opus cit. Edition Garnier - Flammarion vol. 1 cité par KLINE M. p.85

[114] KLINE M. - opus cit. p.80.

[115] Ibidem p. 80.

Avec Pascal, le vrai serait plutôt accessible ou reconnaissable grâce à l'intervention du cœur (et non plus par l'intuition) et de la raison « [...] car les connaissances des premiers principes : espace, temps, mouvement, nombres sont aussi fermes qu'aucune de celles que

nos raisonnements nous donnent et c'est sur ces connaissances du cœur et de l'instinct qu'il faut que la raison s'appuie et qu'elle y fonde son discours [...] et il est aussi inutile et ridicule que la raison demande au cœur des preuves de ses premiers principes pour vouloir y consentir, qu'il serait ridicule que le cœur demandât à la raison un sentiment de toutes les propositions qu'elle démontre pour vouloir les recevoir ». [116] Pascal situe tout autant la recherche du vrai pour satisfaire la quête divine beaucoup plus noble pour lui, que le simple enjeu du savoir.

Leibniz (aux environs de 1699-1700) écrivait aussi que l'univers tenait sa perfection de son ordonnancement divin et que la pensée rationnelle se devait d'en découvrir les lois aux fins d'en célébrer la grandeur de Dieu. On admet que les mathématiques puissent convenir pour atteindre la recherche du vrai, c'est-à-dire la découverte de l'ordre caché de la nature, mais ce dernier demeure tout de même l'œuvre de Dieu tant « il me semble que la fin principale que doit viser le genre humain doit être la connaissance et le développement des merveilles divines, et c'est la raison pour laquelle Dieu a donné au genre humain cet empire sur la terre ». [117] En conséquence et selon Leibniz, la puissance de l'esprit humain rend accessible la connaissance vraie bien que cette dernière ne puisse être révélée ni par les sens ni par l'expérience car, dit il, « nos différends sont sur des sujets de quelque importance. Il s'agit de savoir si l'âme en elle-même est vide entièrement comme des tablettes, où l'on n'a encore rien écrit (tabula rasa) suivant Aristote et l'auteur de l'Essai [entendre Locke] et si tout ce qui est tracé vient uniquement des sens et de l'expérience, ou si l'âme contient originairement les principes de plusieurs notions et doctrines que les objets externes réveillent seulement dans les occasions, comme je le crois avec Platon... » [118] .

Se profile donc l'amorce de considérations nouvelles au sujet de la notion de vrai avec le présage de l'amorce d'un autre virage.

Dieu, gouverneur du cosmos manifeste son ascendant jusque sur l'esprit humain de telle sorte que les mathématiques permettent encore d'accéder aux connaissances vraies de l'univers.

Nous remarquons que le vrai existe en soi comme œuvre divine et trouve son ancrage par le biais des mathématiques, creuset de vérités selon Kline, qui livre que « les travaux

illustraient et prolongeaient cette philosophie convaincante pour la plupart des intellectuels selon laquelle les mathématiques et les lois mathématiques de la science

[116] PASCAL B. - *Pensées* - Edition du Seuil. 1965. p. 110.

[117] LEIBNIZ cité par KLINE M. opus cit. p. 114.

[118] LEIBNIZ - *Nouveaux essais sur l'entendement humain* - Edition Garnier Flammarion. 1966. p.34

sont des vérités. Bernouilli, Euler, D'alembert, Lagrange, Laplace, et de nombreux autres poursuivirent l'investigation scientifique de la nature à l'aide des mathématiques ». [119] (développement du calcul infinitésimal, théories des équations différentielles, calcul des variations, séries infinies, fonctions à variables complexes). Le siècle des Lumières faisait rayonner le pouvoir bienveillant des mathématiques puisqu'à « la fin du 18ième siècle les Mathématiques ressemblaient à un arbre solidement enraciné dans le sol de la réalité, avec des racines déjà vieilles de 2000 ans, des branches majestueuses et une ombre bienfaisante portée sur tous les autres corps de la connaissance. De toute évidence , un tel arbre devait toujours durer ». [120]

Cependant et paradoxalement, c'est au moment où les mathématiques paraissaient à leur apogée que, insidieusement le doute commença à s'immiscer. Des points de vue contradictoires s'élevèrent du côté des philosophes comme ceux de Hume et Kant ainsi que du côté des mathématiciens. L'objet sournois qui fomentait la révolte et distillait des tensions fut le 5ième postulat d'Euclide [121] , l'incontournable axiome des parallèles.

C'est alors que la guerre ouverte éclata et les contestataires baissèrent les masques pour exprimer leur indignation. Saccheri (1667-1733) lança déjà l'hypothèse qu'aucune droite parallèle ne pouvait passer par un point hors d'une droite donnée. Stoppé dans ses investigations par une contradiction, il posa alors une autre hypothèse : « il existe deux droites parallèles qui passeraient par... ». Mais là encore il conclut qu'il aboutissait à une contradiction.

Ce qui n'empêcha pas D'Alembert de poursuivre (1759). Il nomma le problème de l'axiome des parallèles comme étant le « scandale des éléments de la géométrie.

Klügel (1763) enchaîna et fit à son tour la déclaration suivante, « la certitude avec laquelle les hommes acceptaient la vérité de l'axiome des parallèles d'Euclide est fondée sur l'expérience ». [122]

Lambert (celui-là même qui prouva que le nombre pi était irrationnel) rentra également dans le débat avec un livre intitulé « Théorie des droites parallèles » (écrit en 1766 et publié en 1786) et tout comme Saccheri, arriva à une contradiction en partant de l'hypothèse qu'il n'y avait pas de droite parallèle passant par ...Il posa donc une nouvelle hypothèse (il existe 2 droites parallèles...), et contrairement à Saccheri il ne conclut pas qu'il y avait une contradictionmais il ouvrit la possibilité à une géométrie nouvelle de s'instaurer. Et c'est ainsi que d'autres mathématiciens, comme Kästner (le maître de Gauss) contribuèrent à fonder une géométrie non euclidienne.

En conséquence, le statut du vrai s'ébrécha. La croyance que les mathématiques

[119] KLINE M. opus cit. p. 115.

[120] Ibidem p. 127.

[121] Nous rappelons que c'est celui qui proclame que : par un point donné il ne passe qu'une seule droite parallèle à une droite donnée.

[122] Ibidem p. 150.

reposaient sur un corps de vérités s'ébranla et le doute à propos de la notion de vrai s'instaura. La grande aventure de la géométrie non euclidienne de Gauss pouvait commencer.

Récapitulation des idées fortes : de la période recherche du vrai et dimension religieuse

- La vérité est d'essence divine
- Difficile émergence du vrai de la nature à cause du dogme religieux
- Accès au vrai humainement possible à l'aide de la raison
- Amorce de la remise en question de La Vérité avec le problème du Vième Postulat

d) D'une épistémologie internaliste : vrai et doute.

Durant la première moitié du 19ième siècle.

Siècle de véritable mutation, qui a vu la création de nouveaux objets mathématiques, tout à fait différents des objets classiques, comme le souligne J. Dieudonné. [123] « *En effet, en moins de un siècle, l'algèbre a changé complètement de visage : à la fin du XVIIIième siècle, discipline assez étroite, son objet quasiment exclusif était la théorie des équations et son champ d'application le domaine numérique usuel. [...]*

les relations deviennent les relations privilégiés des algébristes .[...] La transformation de l'Algèbre amorce celle de toutes les mathématiques » [124] .

Parole d'élèves. La vérité finalement d'une solution, résulte d'une suite de preuves qui soit disant prouve ce que l'on veut démontrer. Mais ces preuves, sur quoi reposent - elles ? Elles reposent sur des hypothèses qui servent de point de départ à notre démonstration. Mais ces hypothèses, à leur tour, sur quoi reposent-elles ? Pour certaines elles ne reposent que sur des choses supposées connues. Faut-il donc prouver la preuve ? Et si cela est le cas va t -on trouver une preuve ? La vérité ne repose t - elle donc pas alors sur un bâtiment sans fondation qui risquerait de changer à chaque appréciation d'une hypothèse ? La vérité mathématique ne dépend donc que de l'appréciation de certaines personnes sur des outils mathématiques, faite ultérieurement. On peut donc penser qu'il y a plusieurs vérités car certains outils sont laissés à la dérive pendant des siècles sans avoir subi de vérification et des recherches approfondies. Si l'on devait prouver toutes nos preuves, où se trouverait la conclusion de la vérité ? Je pense donc que c'est pour cela que certains hommes ont court circuité les hypothèses par leurs propres idées de la réalité. Y-a-t-il donc une vérité pure et dure qui reposerait sur des bases solides et non sur

[123] Cité par CHARNAY R.- *Mathématiques et mathématiques scolaires* - in Savoirs scolaires et didactiques des disciplines - Une encyclopédie pour aujourd'hui. Sous la direction de M. Develay. 1995. p.180.

[124] DAHAN - DALMEDICO A. et PEIFFER J. - *Une histoire des mathématiques . Routes et dédales* - Edition du Seuil - 1986.

l'appréciation des hommes ?

On assiste à un déclin de la puissance divine dans l'ordonnancement mathématique de la nature : Dieu est de plus en plus absent dans les descriptions et les théories scientifiques. Newton (1642 - 1727) adhérait déjà à la doctrine concernant la séparation entre la physique (avec les mathématiques) et la théologie et s'orienta vers une posture scientifique moderne, en affichant sa volonté de théoriser les phénomènes naturels.

Il se dirigea vers l'élaboration des lois universelles de l'univers qui n'entretenaient aucun rapport avec l'idée de Dieu. C'est aussi au cours de cette période que Laplace, qui avait adressé une copie de sa Mécanique céleste à Napoléon, rétorqua à ce dernier qu'il n'avait *« pas besoin de l'hypothèse de Dieu pour expliquer l'univers ».*

Malgré tout, comme le souligne Kline *« tous les mathématiciens du 19 ième siècle ne nièrent pas forcément le rôle de Dieu ; Cauchy, fervent catholique, disait que l'homme doit rejeter sans hésitation toute hypothèse qui est en contradiction avec la vérité révélée. Néanmoins, la croyance en Dieu comme architecte mathématicien de l'univers commençait à vieillir* ». [125] En conséquence, au fur et à mesure que déclina la croyance de l'emprise divine sur l'ordonnancement de l'univers, le champ fut libre pour poursuivre les investigations sur la notion de vérité des lois mathématiques. Le tournant amorcé au milieu et fin 18ième siècle se confirma et le statut du vrai faiblît. Le vrai dans les mathématiques elles-mêmes fut d'autant plus à remettre en cause, du fait de la création des géométries non euclidiennes, par Gauss suivi de Lobatchevsky et Bolyai.

En effet, la question de savoir quelle géométries était plus vraie que l'autre ne pouvait tenir, puisque la géométrie non euclidienne pouvait s'utiliser pour décrire les propriétés de l'espace physique de façon aussi précise que le fait la géométrie euclidienne.

Néanmoins, cette question a le mérite d'induire une conséquence directe pour approcher la notion du vrai. Le vrai, dépend d'un contexte et donc n'existe plus en soi.

Si l'on suit Kline, on peut même observer qu'un grand scepticisme naquît quant à la notion de l'existence du vrai où *« Il* (Gauss) *fut le premier savant à affirmer non seulement que cette géométrie était applicable, mais à reconnaître que nous ne pouvions plus être totalement assurés de la géométrie euclidienne* ». [126] Il alla même plus loin, « *celui-ci* [Gauss] *semble d'abord avoir tiré la conclusion qu'il n'existe de vérité nulle part dans les mathématiques. Dans une lettre adressée à Bessel et datée du 21 novembre 1811 il écrit « on ne devrait jamais oublier que les fonctions (d'une variable complexe), comme toutes les autres constructions mathématiques ne sont que nos propres créations et que quand la définition avec laquelle on a commencé cesse d'avoir un sens, on ne devrait pas en chercher un à tout prix, mais se demander ce qu'il est commode de poser de façon à ce que cette définition conserve sa signification ».* [127] Ces propos ne sont pas sans rappeler ce que déclarait déjà Diderot aux alentours de 1753, à savoir que « *les mathématiciens comme les joueurs se livrent à des jeux obéissant à des règles abstraites*

[125] KLINE opus cit p. 137.

[126] Ibidem p. 161.

[127] GAUSS - WERK - Göttingen - 1870 1927 - vol. 8 . cité par KLINE M. p.157

qu'ils ont eux mêmes crées. Leurs objets n'ont qu'une existence conventionnelle sans aucun fondement dans la réalité ». [128]

Mais, selon « *la loi de conservation de l'ignorance* » (Cantor) les propos de Gauss ainsi que les découvertes des géométries non euclidiennes de Lobatchevsky et de Bolyai eurent du mal à pénétrer les esprits des savants de l'époque et ce, durant au moins trente ans.

Comment ces géométries gagnèrent-elles donc leurs galons de vérités ? Max Planck déclare à ce sujet qu'« *une vérité scientifique nouvelle ne triomphe pas en convaincant ses opposants, ni en les éclairant, mais bien plutôt parce que ses opposants finissent par disparaître et qu'une nouvelle génération naît et grandit dans la familiarité de cette idée* ». [129] Ces derniers propos traduisent avant l'heure, le rôle majeur qu'exerce le paradigme. Englué dans ses certitudes l'esprit manquerait de clairvoyance et ne parviendrait donc pas facilement à discerner le vrai. Cela ébauche aussi l'idée que l'avènement du vrai exige un nouveau regard sur les choses. Cela amorce l'idée que la vérification n'assure pas une solide existence au vrai et que le changement paradigmatique consiste à diriger l'attention du côté de la réfutation. C'est du triomphe du doute de ce qui est tenu pour vrai que le vrai tire sa légitimité.

Se confirme donc de plus en plus nettement, la lancinante question de la localisation du vrai et de sa délimitation.

Il s'ensuit que les mathématiques commencent à ne plus être considérées comme un corps de vérités incontestables. L'essai de catégoriser ce qui pourrait être vrai, au sein même des mathématiques est envisagé.

Ainsi donc, dès le début du 19^{ième} siècle une crise de (des) vérité(s) éclate. Durant environ deux mille ans les mathématiques n'avaient pas été remises en cause en tant que corps de vérités : le modèle unique d'analyse de l'espace physique reposait sur la géométrie euclidienne et résistait fort bien jusqu'au moment où les géométries non euclidiennes vinrent jeter un voile sur la notion même du vrai en ébranlant l'édifice mathématique tout entier.

On assiste donc à une crise interne des mathématiques, une crise au niveau de ses fondements en regard de l'interprétation de la nature en tant qu'espace physique. Crise qui introduisit le doute en posant les limites de l'efficacité de cette science à décrire la nature avec comme seul modèle, le modèle euclidien. La voie de la remise en cause des mathématiques sur le plan de la cohérence de ses propositions était désormais ouverte. Le doute atteignait cette notion de vrai.

Le déclin de l'emprise religieuse ainsi que les positionnements philosophiques par l'intermédiaire de Hume, Kant, Diderot, D'alembert et d'autres ouvrirent la voie aux critiques des mathématiciens pour questionner les fondements mêmes de la science mathématique.

Le vrai ne se conçoit plus en soi, mais devient contingent d'un contexte. L'ébauche

[128] KLINE M. opus cit. p.138.

[129] Ibidem p. 164.

du vrai en fonction de...subrepticement s'installe et l'on sent l'émergence d'un nouveau regard : le vrai n'est plus absolu, il ne peut être que local.

Récapitulation des idées fortes de la première moitié du 19 ième siècle:

- Déclin de l'emprise divine sur l'essence du vrai
- Emergence de la notion du vrai local de part la crise des fondements en mathématiques

Deuxième partie du 19ième siècle.

Le doute grandit de plus en plus en regard du vrai des fondements des mathématiques et après la remise en cause de la géométrie en tant que modèle de vérités pour décrire le monde physique, c'est au tour de l'arithmétique si l'on suit Kline, « *ainsi, on ne peut parler de l'arithmétique comme corps de vérités qui s'appliquerait nécessairement aux phénomènes physiques. Certes, puisque l'algèbre et l'analyse sont des extensions de l'arithmétique elles ne sont plus des corps de vérités. La triste conclusion que les mathématiciens furent obligés de tirer de tout cela est qu'il n'existe aucune vérité en mathématique, si l'on entend par vérité des lois concernant le monde physique ».* [130] C'est Hermann von Helmholtz médecin, physicien, et mathématicien qui serait à l'origine de cette mise en évidence car dans son livre « Compter et mesurer » (1887) « *il considérait que le problème principal de l'arithmétique consistait à justifier l'application automatique de l'arithmétique aux phénomènes physiques. Il concluait que seule l'expérience peut nous apprendre quelles sont les applications effectives de l'arithmétique* (on sent la résonance des propos de Locke et Hume). *Car nous ne pouvons être sûr a priori qu'elles s'appliquent effectivement dans une situation donnée quelconque ».* [131] Effectivement, lorsque dans une copie corrigée nous écrivons par exemple, que 3/5 +12/15 donne une note finale de 15/20 nous sommes bien dans une arithmétique qui s'adapte à un phénomène naturel et non pas dans cette arithmétique mathématique qui implique que 3/5 + 12/15 font (9 + 12) / 15 soit 21/15 nombre non égal à 15/20.

Dit autrement, on peut donc concevoir qu'au sein des mathématiques, il existe des arithmétiques différentes donc qu'il existe des vérités car *« chaque arithmétique est conçue pour représenter une certaine classe de problèmes ».* [132]

Percutants, pour conclure, les propos d'Einstein qui attire notre attention sur *« pour autant que les propositions de la mathématique se rapportent à la réalité, elles ne sont pas certaines, et pour autant qu'elles sont certaines, elles ne se rapportent pas à la réalité* [...]. *Mais il est d'autre part certain que la mathématique en général et la géométrie en particulier doivent leur existence à notre besoin de savoir quelque chose sur le comportement des objets réels ».* [133]

[130] Ibidem p. 175.

[131] Ibidem p. 170.

[132] Ibidem p. 174.

Récapitulons donc ce panorama d'idées essentielles que nous pouvons retenir de la fin du 18ième à cette fin du 19ième siècle.

En premier lieu, l'on remarque la portée de courte durée des propos de Descartes véritables professions de foi par lesquels sur un ton exalté il affichait son optimisme envers les mathématiques « *ces longues chaînes de raisons, toutes simples et faciles dont les géomètres ont coutume de se servir, pour parvenir à leurs plus difficiles démonstrations m'avaient donné l'occasion de m'imaginer que toutes choses, qui peuvent tomber sous la connaissance des hommes, s'entre - suivent de même façon et que, pourvu qu'on s'abstienne d'en retenir aucune pour vraie qui ne le soit, et qu'on garde toujours l'ordre qu'il faut pour les déduire les unes des autres, il n'y en peut avoir de si éloignées auxquelles, enfin on ne parvienne, ni de si cachées qu'on ne découvre »* [134] En effet, on passe en ce 19ième siècle, à beaucoup plus de réserve, voire de scepticisme, pour ne pas dire de pessimisme. Même Gauss et Evariste Galois pensent à propos des mathématiques que « *cette science est l'œuvre de l'esprit humain qui est destinée à étudier plus qu'à savoir, à chercher la vérité plus qu'à la trouver* ». [135]

Il est apparu tout au cours de ce 19ième siècle que le vrai mathématique devait s'adapter aux lois physiques, mais pour autant, les théories scientifiques ne gagnèrent pas le label du vrai. Pire, elles devenaient d'autant plus vulnérables qu'elles faisaient intervenir des axiomes mathématiques.

Cette prise de conscience généra donc le doute, quant à la fiabilité même de l'outil mathématique pour décrire la nature. Mais paradoxalement, on constate aussi que le recours aux mathématiques pour comprendre ou expliquer le monde dans lequel évolue l'homme, était néanmoins toujours aussi constant : mathématiques et vrai semblaient, malgré tout, encore coexister même si l'illusion que cette vérité soit atteinte commença à s'émousser.

Il semble donc que le doute par rapport à l'accès à la vérité soit bien installé, comme l'avait pressenti Diderot en son temps en déclarant qu'il « *faut toujours prendre, quand on cherche, un départ bien déterminé, et ce commencement ne peut être qu'une tentative que très imparfaite, souvent marquée d'insuccès. Il est des vérités qui sont inconnues comme le sont certaines contrées auxquelles on ne parvient qu'après avoir essayé toutes les routes. Certains doivent se risquer à abandonner les sentiers battus de manière à indiquer*

la meilleure route aux autres. Nous sommes presque toujours condamnés à errer avant de parvenir à la vérité». [136]

[133] EINSTEIN A. *Géométrie et expérience* in Réflexions sur l'éther : la géométrie et la relativité - Edition Gauthier Villars - 1972 - p. 76 et p. 77.

[134] DESCARTES R. *Discours de la méthode* - 1637 - Edition Garnier Flammarion - cité par KLINE M. p.587.

[135] KLINE M. opus cit. p. 183.

[136] Ibidem p. 235.

Parole d'élève. Comment les mathématiciens ont réussi à trouver les bonnes hypothèses qui ont abouti aux bons théorèmes ?

Récapitulation des idées fortes de la période : deuxième partie du 19 ième siècle

La question de l'accessibilité de l'accès à la vérité est posée au sein des mathématiques

e) A la recherche du vrai perdu.

L'aube du 20ième siècle.

Cette période se caractérise par la volonté d'aller à la conquête des fondements logiques des mathématiques pour justifier leur caractère de corps de vérités comme le montre Kline *« il est clair qu'il n'existait aucun terrain solide sur lequel fonder les mathématiques car le sol apparemment ferme sur lequel la vérité avait été construite s'était avéré trompeur. Mais il était peut être possible de stabiliser la structure de l'édifice en construisant un fondement bien plus solide et d'une autre nature. Ce fondement comprendrait des axiomes et des définitions complets et clairement exprimés ainsi que les preuves explicites de tous les résultats sans se préoccuper dans quelle mesure ils pourraient paraître ou non évidents à l'intuition. Il fallait en outre, substituer à la confiance en la vérité, la notion de compatibilité logique ou de consistance. Les axiomes et les théorèmes devaient être si complètement dépendants les uns des autres que la structure toute entière semblerait compacte. Peu importe sa manière de reposer sur le sol, elle se maintiendrait de la même manière qu'un gratte ciel qui se balance dans le vent mais reste solidaire de la base jusqu'au sommet ».* [137]

On se dirigea donc vers un mouvement de type axiomatique (Hilbert en étant le champion) qui révéla la distance énorme existant entre les mathématiques et le monde réel. On peut remarquer alors que cette méthode axiomatique deviendra le garant du vrai, pour un temps, au sein des mathématiques. C'est comme s'il y avait un changement de perspective.

On ne se centre plus sur le problème de la cohérence qu'il y aurait entre les mathématiques et les lois physiques, mais on axe les effortssur la cohérence interne des mathématiques. Le vrai change de place, d'objet et de statut. C'est l'entrée du terme de rigueur.

A ce sujet Poincaré déclare « *avons-nous atteint la rigueur absolue ? A chaque stade de l'évolution nos pères croyaient l'avoir aussi atteinte. S'ils se trompaient ne nous trompons nous pas comme il n'y a plus que les syllogismes ou les appels à cette intuition du nombre pur, la seule qui ne puisse nous tromper. On peut dire qu'aujourd'hui, la rigueur absolue est atteinte* ». [138]

En somme, on assiste à un glissement de l'idée de vérité vers celle de consistance.

[137] Ibidem p. 317.

[138] POINCARE H.- *La valeur de la science* - Edition Flammarion - 1970 - p. 32. et 33.

La perspective des mathématiciens se transforme. Ils dirigent leurs efforts vers l'établissement de la cohérence interne des mathématiques. L'idée du vrai trouvera son incarnation dans la preuve que les mathématiques s'articulent de manière «logique». Ce glissement aura pour conséquence que le vrai émane d'un nouveau Dieu qui se nommera rigueur.

L'adéquation entre les mathématiques et leurs capacités à rendre compte de la réalité semble donc mise entre parenthèses. L'activité suprême des mathématiques, à savoir, l'activité de modélisation prend de plus en plus d'importance. Le pouvoir des mathématiques réside dans sa faculté à élaborer une représentation rationnelle et non une représentation exacte du monde physique.

Pour l'heure, la préoccupation n'est plus, non plus, de se soucier de l'essence des axiomes pour prouver qu'ils se justifient. Peu importe s'ils sont le fait de l'expérience ou de la raison. Le souci majeur semble t-il, c'est que les mathématiques deviennent en quelque sorte aseptisées, débarrassées de toute contradiction interne et que tout paradoxe soit évacué. Enfin, après une phase de scepticisme, on sent comme un renouveau d'optimisme chez les mathématiciens : il existerait l'Idéal en mathématiques...la consistance serait à portée de leurs cerveaux ?

Le 20ième siècle jusque en 1930.

« La logique est l'art de se tromper avec confiance » (Anonyme)

Les mathématiciens avaient semblé donner à leurs domaines une structure idéale. Les définitions jouissaient d'une bonne clarté. Les différentes parties des mathématiques paraissaient reposer sur des bases axiomatiques exactes. Les preuves valides s'étaient substituées à l'intuition ou aux observations empiriques. Même les différents principes de logique s'adaptaient apparemment aux différents type de raisonnements. Tout était bien dans le meilleur des mondes.

Mais il fut une fois, Peano, Frege, Russell qui mirent à jour encore et toujours des contradictions (au niveau notamment des ensembles infinis potentiellement ou en acte), ce qui prouvait que finalement, les axiomes eux mêmes pouvaient ne pas être consistants.

Des critiques s'élevèrent sur le fondement de la théorie des ensembles. Des critiques au point d'affirmer que cette dernière représenterait « *un champ dans lequel rien n'est évident, dont les énoncés vrais sont souvent paradoxaux et dont les énoncés plausibles étaient faux »* [139] . Il faut dire que Cantor, avec ses travaux, avait fait émerger des paradoxes que l'on pensait pouvoir être résolus avec les bases de l'époque.

Le paradoxe en mathématiques (nommé plutôt antinomie actuellement) a toujours eu un rôle moteur, en ce sens qu'il génère de nouvelles pistes.

Des paradoxes au sein de la théorie des ensembles établirent le constat qu'il n'y avait plus de vérité absolue. Ce à quoi Russell répliqua vertement « d'*un tel scepticisme, les mathématiques sont une perpétuelle réfutation ; car leur édifice de vérités demeure*

[139] KLINE opus cit. p. 374.

inébranlable et inexpugnable à tous les assauts du cynisme dubitatif ». [140]

Mais remontons aux débuts de l'aventure en retrouvant la chronologie dans l'affrontement des différents courants qui se sont succédés.

D'abord retentit le paradigme logiciste pour aller à l'assaut de la vérité des fondements mathématiques.

Parole d'élèves. Sans hypothèse, il n'y a jamais de départ et jamais d'arrivée. A chaque fois que l'on prouve quelque chose il faut toujours essayer de trouver la faille.

Pour rendre son caractère de vérité aux mathématiques, les savants entreprirent donc de résoudre les nouveaux paradoxes. Alors, la logique fut au centre du débat et les axiomes (de logique) fleurirent. L'axiome du choix qui stipule qu'étant donné un ensemble d'ensembles finis ou infinis, il est possible de choisir un objet dans chaque ensemble et de former un nouvel ensemble. L'axiome de réductibilité qui a un rapport avec le fait que tout ce qui implique les membres d'un ensemble ne doit pas être soi-même un membre de l'ensemble. Et enfin, l'axiome de l'infini qui instaurent l'existence des classes infinies.

Mais ce fut alors que naquirent d'autres controverses. « *Les partisans de la thèse logiciste maintenaient que la logique utilisée dans les Principia Mathematica, représentait « la logique pure » ou la logique purifiée. D'autres ayant les trois axiomes controversés à l'esprit, mettaient en doute la « pureté » de la logique utilisée* » [141] .

En conséquence la logique à elle seule ne pouvait être tenue pour critère de vérité *« les critiques dont les philosophies logicistes furent l'objet influencèrent sans aucun doute sur la pensée ultérieure de Russell. Lorsqu'il commença son travail dans la première partie du siècle, il pensait que les axiomes de la logique étaient des vérités. Il abandonna cette idée dans l'édification de 1937 de ses principes de mathématiques. Il n'était plus convaincu que les principes de la logique étaient des vérités a priori et donc que les mathématiques l'étaient également ».* [142] Donc le logicisme ne résout pas les paradoxes.

Voilà que la préoccupation essentielle quant à la consistance des mathématiques resta sans réponse et l'idée du vrai subit encore quelque préjudice. Russell lui même, dans ses Portraits de mémoire (1958) déclare ces propos : *« je désirais la certitude de la même façon que les gens désirent la foi religieuse. Je pensais que la certitude pouvait être trouvée plus probablement en mathématiques qu'ailleurs. Mais je découvrais que de nombreuses démonstrations que mes professeurs espéraient me faire accepter étaient remplies d'erreurs et que, si la certitude devait effectivement être découverte dans les mathématiques ce serait dans un nouveau champ des mathématiques avec des fondations plus solides que l'on avait jusque là tenues pour sûres. Mais comme le travail avançait je me rappelais continuellement la fable de l'éléphant et de la tortue. Après avoir construit un éléphant sur lequel les mathématiques pouvaient se reposer, je trouvais*

[140] Ibidem p. 401.

[141] Ibidem p. 417.

[142] Ibidem p. 417.

l'éléphant chancelant et me consacrais à construire une tortue pour empêcher l'éléphant de tomber. Mais la tortue n'était pas plus sûre que l'éléphant et après quelque vingt années de très dur labeur, je parvenais à la conclusion qu'il n'est rien que je ne puisse entreprendre qui fasse des mathématiques un savoir indubitable ». [143]

La contre attaque ne tarda pas et une autre tendance prit le relais. Avec la même détermination que le précédent. Le paradigme intuitionniste fit son entrée.

Il s'agit d'un courant diamétralement opposé à celui des logicistes bien qu'ayant la même visée. Etablir la vérité des fondements mathématiques non pas à partir de la logique, puisque celle-ci n'a pas fait ses preuves, mais à partir de l'intuition et de la déduction .

L'intuition désignée comme source du vrai et pas la logique car comme le déclare Kline « l*a logique appartient au langage. Elle fournit un système de règles qui permet la déduction d'autres connexions verbales ultérieures qui sont supposées communiquer des vérités. Toutefois ces dernières ne sont telles qu'après avoir été appréhendées et il n'est pas garanti qu'elles puissent être ainsi saisies. La logique n'est pas un instrument fiable pour découvrir les vérités et ne peut déduire aucune vérité qui ne puisse être obtenue tout aussi bien d'une autre façon* [...] . *La logique est un édifice verbal structuré mais guère plus »* [144] .

La différence essentielle entre l'intuitionniste et le logiciste réside dans le fait que pour le premier, le concept n'est pas une idée indéfinie (comme cela est dans la théorie axiomatique), mais que l'intuition (indépendante de l'expérience), conçoit cette idée, la construit. L'intuition est garant de certitude car l'esprit s'y investit immédiatement et sûrement. Pour les intuitionnistes, les mathématiques « *sont indépendantes du langage : les mots ou les relations verbales sont utilisés seulement pour communiquer des vérités. Les vérités mathématiques sont plus incorporées dans l'esprit humain que dans le langage. Le monde des intuitions mathématiques est opposé au monde des perceptions. C'est à ce dernier monde et pas celui des mathématiques qu'appartient le langage qui sert à la compréhension des affaires communes. Le langage évoque des copies d'idées dans l'esprit de l'homme à l'aide de symboles et de sons* ». [145] On en arriva même à définir l'intuition naïve et l'intuition raffinée « *qui n'est pas à proprement parler une intuition mais surgit d'un développement logique fondée sur les axiomes* » [146] (d'où il ressort l'aspect construction).

Un des problèmes que posent les intuitionnistes c'est de savoir à quel point on peut penser sans l'usage des mots. Ce qui fatalement minimise, voire évacue, tout recours à des définitions claires et met en retrait la nécessité de la preuve comme caution de la vérité. En d'autres termes, cela soulève le débat, toujours actuel concernant le sens de

[143] Ibidem p. 419.

[144] Ibidem p. 431 et 432.

[145] Ibidem p. 431.

[146] Ibidem p. 442.

l'existence. En mathématiques, l'existence a-t-elle besoin d'être mise sous une forme telle pour qu'elle puisse être significative c'est-à-dire remplie de sens ? Qui ou quoi caractérise l'existence, sa définition ou sa construction ?

Chemin faisant, il s'avéra que le paradigme intuitionniste avait aussi laissé en suspens la question de la consistance, et un troisième paradigme s'affirma.

Le paradigme formaliste et celui de la théorie des ensembles se substituèrent donc aux précédents.

Ecole de pensée conduite par Hilbert qui mit au centre du débat l'importance de la démonstration pour prouver la consistance des mathématiques. C'est au bout de la preuve que l'on trouvera le vrai. Hilbert n'était pas satisfait de ce qu'apportaient les logicistes et les intuitionnistes. Il reprochait au logiciste de faire un raisonnement circulaire quant à la justification des nombres entiers. Il critiquait aussi la manière de définir les ensembles à l'aide de leurs propriétés, ce qui entraînait l'utilisation de l'axiome de réductibilité par rapport auquel il était sceptique, et il discutait de l'appartenance de l'axiome de l'infini à la logique.

Par rapport aux intuitionnistes il fut beaucoup plus véhément car ceux-ci rejetaient le principe du tiers exclu ce qui était inconcevable pour Hilbert au point que dans un article de 1927 il déclarait que « ô*ter aux mathématiques le principe du tiers exclu reviendrait à, par exemple, proscrire le télescope à l'astronome ou au boxeur l'usage de ses points. Nier les théorèmes d'existence dérivés en utilisant le principe du tiers exclu revient à renoncer du même coup, à la science des mathématiques ».* [147] Ce à quoi Weil concluait (1927 toujours) par : « *ce point de vue (intuitionniste), que seule une partie des mathématiques classiques puisse être maintenue*, *est en fait amer, mais inévitable. Hilbert ne pouvait supporter cette mutilation* ».

Hilbert chercha toute sa vie une théorie qui « *est d'établir une fois pour toutes la certitude des mathématiques* ». Hilbert y serait il parvenu ? Non, car « l'*expérience a enseigné à la plus grande partie des mathématiciens que presque tout ce qui paraît solide et satisfaisant à une génération mathématique possède une chance non négligeable de voler en éclat sous l'examen minutieux et plus ferme de la génération suivante* [...]. *La connaissance quel que soit l'accord raisonnablement commun que l'on puisse imaginer sur les fondements des mathématiques, semble être inexistante* [...]. *La seule exposition des faits devrait suffire à établir le seul point, qui possède une signification pour l'homme, à savoir, que des experts également compétents se sont opposés et s'opposent aujourd'hui sur les aspects les plus simples de tout raisonnement qui élève la plus mince prétention, implicite ou explicite, à l'universalité, la généralité ou à emporter la conviction ».* [148]

La première moitié du 20ème siècle a-t-elle apporté quelque assurance sur la vérité des fondements mathématiques ? Globalement non. Chaque école de pensée a essayé de bâtir sa théorie de façon à pouvoir surmonter des paradoxes, et à instituer des

[147] Ibidem p. 449.

[148] BELL E .T - 1930 - cité par KLINE M. p. 470.

fondements vrais. Mais LA vérité reste hypothétique puisque toutes les différentes écoles n'ont point trouver de consensus.

Donc l'idée de vérité locale, de validité intra système de pensée se renforcent et les esprits semblent de plus en plus convaincus qu'il n'y a pas de vérité universelle même en mathématiques, puisque *« la science qui en 1800 en dépit de son développement logique était saluée comme la science parfaite, celle qui établit ses conclusions par un raisonnement infaillible et indubitable; la science dont les conclusions sont, non seulement infaillibles, mais des vérités concernant notre univers, est, comme certains le soutiendraient, des vérités dans tous les mondes possibles, avait non seulement perdu toute prétention à la vérité mais était aussi entachée du conflit des écoles fondationnelles et des prétentions quant à savoir quels étaient les principes corrects de raisonnement. La gloire de la raison humaine était au supplice* **».** [149]

De 1930 à nos jours.

Parole d'élève. Rien n'est jamais sûr et je pense que le vrai but est de trouver la vérité vraie afin de répondre à toutes les questions que l'on se pose.

Si comme nous venons de le voir, aux environs de 1930, chaque mathématicien pouvait se « retrouver » dans une certaine théorie, pour que la problématique qu'il veuille résoudre puisse l'être, il demeurait cependant, que l'on n'avait pas encore prouvé la consistance des mathématiques : les paradoxes n'étaient pas évacués. Dès lors, le problème de la « complètude » fut donc avancé.

Il s'agissait de prouver le fait que les axiomes de n'importe quel domaine des mathématiques soient suffisants pour prouver qu'une proposition, (contenant les concepts appartenant à ce domaine) est vraie ou fausse. Si cela était, on atteindrait cette fameuse vérité puisque le système d'axiomes serait suffisamment global, en lui même, pour couvrir toute proposition : toutes les phrases vraies dans un système d'axiomes seraient démontrables. Prenons un exemple «concret » pour comprendre cette complètude. La complètude exigerait par exemple que la conjecture, « tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers », puisse être démontrée comme vraie ou fausse rien qu'en utilisant les axiomes de la théorie des nombres.

C'est en posant ce problème qu'il y eu un coup de tonnerre : Gödel fit son entrée révolutionnaire avec précisément son « théorème de l'incomplètude ». Il affirma que aucun système d'axiomes mathématiques ou logiques susceptibles d'être arithmétisés n'est capable d'englober toutes les vérités de n'importe quel domaine. Ni de rien dire de toute mathématique, car un tel système d'axiomes est incomplet. Pour le dire autrement, il existe des énoncés bien formés qui découlent de ces systèmes, certes, mais ils ne peuvent être prouvés à l'intérieur de ces systèmes.

Conséquence : il existe en mathématiques des propositions indécidables. On ne peut prouver si elles sont vraies ou si elles sont fausses.

Dès lors, la méthode axiomatique n'est pas assez puissante et ne peut apporter de solution quant à ce problème de complètude. N'importe quel énoncé ne peut être prouvé

[149] Ibidem p. 469.

vrai à l'intérieur d'un système axiomatique.

Ainsi, alors que Brouwer (intuitionniste) montra clairement que tout ce qui est intuitivement certain reste en-deçà de ce qui est démontré dansles mathématiques classiques, Gödel montra que ce qui est intuitivement certain s'étend au-delà de la preuve mathématique.

1930 à nos jours, c'est la confirmation du doute et de la certitude que le vrai ne peut pas toujours être atteint, « *la conception la plus répandue des mathématiques pour laquelle elles ne sont qu'une série de structures, chacune fondée sur son propre ensemble d'axiomes, s'avère inadéquate pour comprendre tout ce que les mathématiques devraient englober et d'autre part elles englobent plus qu'elles ne devraient* ». [150] C'est dire si le paradoxe fait partie de cette science et Kline de renforcer ; « l*e désaccord s'étend même aujourd'hui aux méthodes de raisonnement. La loi du tiers exclu n'est plus un principe logique indiscutable.* [...] *En conséquence, la prétention à pouvoir parvenir à des raisonnements indiscutables doit être abandonnée. Il est clair que les différents corps des mathématiques résulteront d'une multiplicité de choix. Les recherches récentes sur les fondements n'ont brisé les frontières que pour parvenir sur des territoires sauvages.* ». [151]

On assiste au désarroi des mathématiciens qui prirent conscience de la non infaillibilité de leur science : *« la disparition de la vérité est très certainement une tragédie de première grandeur, car la vérité est la plus précieuse des possessions de l'homme: qu'une seule vérité soit perdue est une source d'amertume* » [152] . Le prestige des mathématiques en aurait-il souffert ? Ces périodes de contradictions, de réfutations n'illustreraient-elles pas, a contrario, la preuve parfaite que les mathématiques appartiennent plus que jamais au paysage scientifique, tant ses bases se prêtent à questionnement, tant ses concepts sont bousculés voire remaniés ?

De plus, cette nouvelle vision de la conception des mathématiques interfère fortement sur la notion du vrai et ne fait qu'exhiber un nouveau postulat : le vrai en mathématiques ne peut être que local.

Récapitulation des idées fortes de la période : du 20 ième siècle.

· La recherche du vrai devient interne aux mathématiques

passage de la notion de vérité à la question de la consistance des mathématiques

· La recherche de la vérité se transforme en une chasse aux paradoxes

– faillite de la logique, de l'intuition et du formalisme pour assurer la consistance
– perte de l'illusion du vrai interne de tout l'édifice mathématique

[150] Ibidem p. 503.

[151] Ibidem p. 503.

[152] Ibidem p. 507.

- Existence des propositions indécidables : émergence de l'idée de doute au sein même des mathématiques

Notre parcours à travers les âges et ce détour au fil du temps achevés, il nous est possible d'appréhender le vrai, et l'idée du vrai, dans toute sa mobilité pour en saisir les évolutions.

En somme, la question du vrai relève autant de problématiques d'ordre humano - social que de problématiques d'ordre épistémologique. Et ce, au sein même des mathématiques.

En effet, les hommes se sont emparés de la question du vrai pour assurer leur pérennité du point de vue économique et social. Puis nous avons assisté à cette phase cruciale et marquante de la rationalisation du vrai via l'impératif du raisonnement. Ainsi structurée, la question du vrai fut au service de la compréhension de l'univers, où logos et cosmos s'entremêlèrent avec ou sans médiation divine. Enfin la question du vrai prit comme investigation son propre domaine d'appartenance, les mathématiques, et les questions existentielles de tous ordres virent le jour.

Lors, pendant ce long défilé des siècles la question du vrai en mathématiques mit en scène des interrogations sur sa raison d'être et son mode d'accès, pour se prendre elle-même comme objet d'étude, afin de se penser à l'intérieur de son domaine d'existence (de prédilection ?), les mathématiques, jusqu'à le mettre à l'épreuve.

Synthèse globale de l'évolution des conceptions du vrai dans l'histoire de la pensée.

Déplacement de la recherche du vrai externe (au sens de l'ordonnancement de l'univers) vers une recherche du vrai interne (au sens de la recherche de consistance au sein des mathématiques)

Passage du vrai absolu au vrai local	Mise en doute de la possibilité d'accessibilité au vrai	La recherche du vrai relève de la quête

Chapitre 3. Le vrai en mathématiques : approche épistémologique.

Sans doute l'idée du vrai peut-elle paraître vague ou ambiguë en regard de son champ d'appartenance : le réel, la philosophie ou les mathématiques. Soumettre l'idée du vrai au regard épistémologique c'est alors examiner sa contribution à la formation de la preuve en particulier.

C'est aussi penser au dogmatisme en se posant la question de savoir, s'il est irrationnel de chercher à concilier une hypothèse avec un contre exemple apparent en lui ajoutant des conditions auxiliaires afin de l'immuniser contre la réfutation. Car les mathématiques sortent du cadre des sciences réfutables au sens poppérien. L'équivalent de la réfutation pourrait y être constitué par un contre exemple, mais ce dernier n'aurait pas le caractère d'une réfutation expérimentale, comme l'a montré Popper. Certes, les mathématiques aurait toujours le loisir de s'en émanciper en changeant ses axiomes.

Aussi, l'idée du vrai en mathématiques, interroge t-elle dans sa dimension épistémologique, la conception des positivistes logiques, sous l'égide de Comte, qui postule qu'un énoncé a une signification cognitive s'il est vérifiable par expérience. Ce qui ouvre le débat sur la place de l'induction en mathématiques et renvoie sur la spécificité du contre exemple en mathématiques.

L'idée du vrai ouvre aussi la réflexion au sujet du rationalisme, du relativisme épistémologique et de l'autoritarisme épistémologique. Peut-on revendiquer le droit en mathématiques d'examiner par soi-même la vérité d'une proposition ? La vérité existe t-elle ou bien le vrai soumet-il l'individu qui le recherche à une autorité extérieure ?

L'objet de ce chapitre est de clarifier la notion de vrai en mathématiques. Pour ce faire, nous proposons un détour par les sciences empiriques afin d'en éclairer davantage en retour la question du vrai dans cette science formelle que représentent les mathématiques.

1. A propos de la légitimité de la notion de vrai et son sens dans le champ des sciences empiriques .

Est-il donc légitime de parler de vrai ?

D'après Popper, sans aucun doute, qui toutefois s'emploie à parler longuement de la science, de ses progrès et de leurs critères sans faire référence au terme de vrai jusqu'au jour cependant, où il prend connaissance de la théorie de Tarski [153] : l'approche de celui-ci lui permet de lever les ambiguïtés à ce sujet.

Selon nous, comprendre comment l'on peut cerner cette notion de vrai à l'intérieur d'un champ auquel n'appartiennent pas les mathématiques, (en l'occurrence les sciences expérimentales) permet de l'éclairer en retour dans le domaine des sciences formelles.

Donc, dans les sciences non formelles, il s'agit de concevoir la vérité [154] comme « la correspondance avec les faits ».

On remarque effectivement que Popper défend la thèse de Tarski en prétendant que « *seule l'idée de vérité nous permet de parler, avec pertinence, d'erreur ou de rationalisme critique, et rend possible la discussion rationnelle, c'est-à-dire cet examen critique où nous cherchons à découvrir nos erreurs avec l'objectif concerté d'en éliminer la*

[153] Nous rappelons que Tarski est un logicien polonais dont les travaux contribuèrent à répandre les conceptions du Cercle de Vienne .

[154] L'utilisation du mot vérité provient de notre référence poppérienne : l'épistémologue usant de ce terme nous le laissons tel quel.

plus grande part, afin de nous approcher de la vérité. Ainsi, l'idée même de l'erreur - ou de notre faillibilité - implique l'idée de vérité en tant que norme qui ne sera pas nécessairement atteinte c'est en ce sens que la vérité est une idée régulatrice [155] .

Cependant, il postule que si ce qui est vrai est ce qui est en correspondance avec les faits il n'en demeure pas moins que l'on puisse se poser la question de savoir s'il n'existe pas une correspondance meilleure qu'une autre. C'est alors que Popper avance que la vérité tarskienne est dans une espèce d'espace métrique où il est envisageable de parler de « degrés de vérités » et c'est ainsi qu'il parle de « vérisimilarité ». Il articule alors les notions de vérité et de contenu en spécifiant « *on se rappelle que le contenu logique d'un énoncé ou d'une théorie a, est la classe de tous les énoncés qui découlent logiquement de a tandis que le contenu empirique de, selon la définition que nous en avons donnée, est la classe de tous les énoncés de base contredisant a »* [156] . L'entrée de cette notion de degrés de vérité implique alors de penser la vérité au sens de la vérité objective : qualificatif qui introduit dès lors une dimension fondamentale dans la vision de vérité poppérienne.

2. A la rencontre de la vérité objective et de ses implications.

La vérité est objective à la condition qu'elle résulte d'un travail critique où « [...] *cette expérience peut servir à montrer que nos rêves et nos attentes ne déterminent pas nécessairement les résultats que nous produisons, et que, pour rechercher la vérité, la meilleure méthode consiste peut-être à commencer par soumettre à la critique nos croyances les plus chères. Le projet pourra sembler retors à certains, mais non à ceux qui veulent découvrir la vérité et ne s'en effrayent pas ».* [157] Autrement dit, il récuse l'épistémologie optimiste de Platon ou de Descartes ou de Bacon qui se caractérise par la croyance en le caractère manifeste de la vérité. Popper ne cautionne donc pas l'observation ou les sens comme moyen d'accès à la vérité objective car, ni l'expérience en soi, ni la raison, ne peuvent être suffisants selon lui. Popper avance la réfutation comme garant du vrai et de l'objectivité de la vérité. Une conjecture est d'autant plus vraie (degré de vérité) qu'elle résiste mieux à la réfutation.

Lors, dans le champ des sciences empiriques il semble bien que ce soit un changement paradigmatique aussi important dirions-nous que le théorème de Gödel en mathématiques. En effet, Popper avance qu'une théorie ne sera pas vraie parce qu'elle sera vérifiée mais de part sa façon de résister aux réfutations. Autrement dit, le mode d'accès à la vérité ne se conçoit pas par son haut degré de vérifications mais par son haut

degré de résistance à la réfutation et sa potentialité élevée d'être falsifiable. C'est une première caractéristique de la vérité au sens poppérien, mais il y en a d'autres que nous appréhendons d'abord sur le plan de la visée de cette vérité objective.

[155] POPPER K. - *Conjectures et réfutations* - Edition Payot - 1994 - p.339.

[156] Ibidem p. 344.

[157] Ibidem p. 22.

Popper commence par attribuer une visée humano - sociale à la vérité. Elle est libératrice, au sens de émancipatrice, car Popper fait remarquer « a*insi l'épistémologie optimiste de Bacon et de Descartes ne saurait être vraie. Mais ce qui est le plus étonnant dans l'histoire de cette conception, c'est sans doute le fait que cette épistémologie au demeurant fausse a été la principale source d'une révolution intellectuelle et morale sans précédent. Elle a encouragé les hommes à penser par eux-mêmes. Elle les a conduits à espérer qu'ils pourraient, grâce à la connaissance, se libérer eu mêmes et libérer autrui de la servitude et du dénuement* ». [158]

La vérité possède encore une autre caractéristique. Elle est non accessible, non pas parce que le pouvoir de la raison humaine est mis en doute, mais parce qu'il s'agit d'un principe épistémologique : il est possible d'atteindre le faux avec certitude (grâce à la réfutation) mais la certitude d'atteindre la vérité n'existe pas à cause précisément du spectre de l'éventuelle réfutation qui plane toujours. En effet, « [...] *si tous nous sommes sujets à l'erreur et nous trompons souvent, individuellement et de manière collective, cette idée de l'erreur et de la faillibilité humaine en implique précisément une autre : l'idée de la vérité objective cette norme que nous n'atteignons pas forcément. En conséquence, il ne faut pas considérer que la doctrine de la faillibilité relève d'une théorie pessimiste de la connaissance. D'après cette doctrine, nous sommes en mesure de rechercher la vérité objective, même si, nous manquons le plus souvent de beaucoup notre but. Si nous avons le respect de la vérité, nous devons rechercher celle-ci en cherchant obstinément à mettre au jour nos erreurs par une critique rationnelle, et une auto critique de tous les instants* ». [159]

Autrement dit, la vérité relève de la quête. Le vrai est d'autant plus crédible qu'il est réfutable car *« une théorie qui n'est réfutable par aucun événement qui se puisse concevoir est dépourvue de caractère scientifique. Pour les théories, l'irréfutabilité n'est pas (comme on l'imagine souvent) vertu mais défaut ».* [160]

Enfin, la vérité revêt une dernière caractéristique. Elle n'est pas absolue : le vrai change, évolue « *car lorsque je parle du développement de la connaissance, je ne me réfère pas à un ensemble d'observations mais à l'élimination réitérée de théories scientifiques remplacées par des théories meilleures ou plus satisfaisantes ».* [161]

3. Conclusion : l'idée du vrai et son rapprochement entre les mathématiques et les sciences empiriques.

La référence à Tarski, de la part de Popper, pour envisager la notion de vrai est intéressante à noter, puisqu'il la fonde à l'origine, en entretenant une proximité avec le

[158] Ibidem p. 25.

[159] Ibidem p. 38.

[160] Ibidem p. 64.

[161] Ibidem p. 320.

domaine de la logique : on se souvient alors du courant logiciste en mathématiques qui fut également interpellé pour résoudre le problème de la consistance des mathématiques (en vain).

Néanmoins, la conception poppérienne du vrai met en avant la notion de fait, qui demande à être interpellée dans le domaine des mathématiques. D'après sa définition en épistémologie, le fait est un objet que construit une science. En conséquence, le fait existe aussi bien dans les deux champs. Il est donc permis de penser que cette conception poppérienne peut avoir du sens également dans le champ des mathématiques. Néanmoins, du point de vue de la nature des faits il n'y a pas vraiment de corrélation entre le fait des sciences empiriques et celui des mathématiques. Ni du point de vue du traitement des faits (objets) entre les deux domaines. Le vrai, dans les sciences empiriques trouvent sa légitimité en accord avec les degrés de similarité qu'il entretient avec le réel. Ce qui n'est pas le cas du vrai en mathématiques qui, par le biais de la modélisation représente rationnellement la nature mais ne la décrit pas. De sorte que le vrai mathématique est contingent de règles et méthodes appartenant au modèle mathématique lui-même.

En outre, Popper dépasse cette idée de vérisimilarité qui entretient trop de proximité avec l'idée de vérification pour s'orienter vers l'idée de vérité objective, qui elle, introduira la réfutation comme critère de l'accès à l'idée de vérité. Il le suggère dans ce passage, *« ainsi, l'un des grands avantages attachés à la théorie de la vérité objective ou absolue est qu'elle nous permet de dire - avec Xénophane - que nous recherchons la vérité mais que nous pouvons ignorer l'avoir trouvée, que nous n'avons pas en notre possession de critère de vrai mais sommes néanmoins guidés par l'idée de vérité comme principe régulateur (ainsi que Kant ou Peirce eussent pu le dire), et que, même s'il n'existe pas de critères généraux permettant de reconnaître la vérité - si ce n'est peut être la vérité de type tautologique -, (il y a comme je l'expliquerai) des critères pour apprécier les progrès vers la vérité ».* [162]

Donc, afin de vouloir légitimer la vérité, Popper lui accole l'adjectif objectif et ce terme renvoie à l'idée de critique. Il n'est pas érigé comme conférant une espèce de crédibilité en matière de vrai. Le vocable objectivité ne qualifie pas un fait, mais renvoie à une démarche susceptible de tendre vers le vrai.

De sorte que l'on peut à nouveau entrevoir une proximité avec le vrai mathématiques et le rôle que joue le contre-exemple : est vrai ce qui résiste au contre-exemple. Lors, l'idée de critères susceptibles d'éclairer l'accès au vrai fait son apparition.

Popper fait allusion aux critères pour apprécier des progrès de l'idée de vérité. Là encore, il y aurait de la résonance entre les deux types de sciences pour aborder cette question de la reconnaissance du vrai, tant on observe des phases communes pour essayer d'établir, soit des autorités, soit des critères afin de garantir du vrai .

Au commencement, il y eut la phase religieuse : Platon définissait les autorités divines ou mythologiques comme garant du vrai. Sur le plan de l'origine du savoir c'était Zeus qui incarnait la source de la sagesse ou bien encore il revenait à la déesse Diké de

[162] POPPER K. opus cit. p.335.

représenter la gardienne de toute vérité. Plus tard Dieu remplaça Zeus .

Puis il y eut la vague de l'empirisme, de l'intuition ou de la déduction : Pascal, Descartes, Leibniz, farouches défenseurs de l'accès au vrai soit par le cœur, l'intuition, et la raison.

Plus tard, le « positivisme classique » incarné par A. Comte et qui, bien qu'il conçut qu'il existât une influence certaine de la société sur les modes et contenus de pensées, défendait cependant la production de savoirs « positifs » à partir d'une observation méticuleuse et « sans préjugés des faits », reconnaissant une « unité méthodologique de la science », garant de l'accession au vrai.

Vint enfin la phase du langage et du raisonnement : période particulièrement riche en rebondissements pour les mathématiques associée parallèlement à la méthode de Claude Bernard pour les sciences empiriques (méthode expérimentale comme l'équivalent d'une construction logique de démarches).

Mais il n'en reste pas moins que le raisonnement hypothético-déductif est toujours le seul valide en mathématiques (pour se lancer à la recherche du vrai) tandis que les sciences empiriques bénéficient en outre de la caution du raisonnement inductif (encore que sur ce point, il n'y ait pas unanimité en mathématiques, puisque Poincaré établit une analogie entre le raisonnement par récurrence et l'induction ordinaire). Soit.

Du point de vue des visées, dans les sciences empiriques, Popper affirme le caractère humano-social du vrai dans ce champ mais est-ce l'apanage des sciences empiriques ?

Certes en mathématiques, la visée du vrai ne dépend-elle pas de conception du vrai selon deux points de vue épistémologiques différents ? L'épistémologie internaliste et l'épistémologie externaliste ? La première consiste à penser que les mathématiques seraient des vérités ou pourraient être sources de vérités dans la mesure où cette science poserait et réussirait à résoudre les propres problèmes de la matière. L'accès au vrai se finalise par la croissance interne et la fabrication de la propre histoire des mathématiques. La seconde au contraire, place les mathématiques comme une composante de la science et les vérités qu'elle permettrait d'élaborer viseraient à donner des réponses à des problèmes posés en dehors d'elles mêmes. Autrement dit, les finalités du vrai ne seraient-elles pas en relation avec le débat qui consiste à dissocier les mathématiques en deux clans, les tenants des mathématiques pures et les tenants des mathématiques appliquées ? Si tant est que cette disjonction puisse tenir.

Chemin faisant, en se ralliant au point de vue de Popper pointe la certitude, aussi bien en mathématiques qu'en sciences empiriques, qu'il n'existe pas de critères universels qui puissent être définis pour parvenir au vrai dans l'absolu. *« En conséquence, si la cohérence et la consistance ne sont pas des critères de vérité, pour la simple raison que même des systèmes dont on peut établir la cohérence peuvent en réalité être faux, l'incohérence ou la non consistance sont des preuves effectives de fausseté. Ainsi, la chance aidant, nous serons en mesure de découvrir la fausseté de certaines de nos théories »*. [163] Autrement dit, il est possible de dire quand c'est faux mais

[163] Ibidem p. 335.

il est difficilement possible de dire quand c'est vrai. Et la norme de surgir accolée à l'influence du paradigme (Khun) dans la recherche du vrai.

Donc, dans les sciences empiriques c'est la réfutation par les faits qui anéantit une vérité et en mathématiques c'est le paradoxe qui invite à repenser une théorie. A nouveau, il existe un caractère commun entre ces deux types de sciences dans le moyen qu'elles ont de progresser vers la recherche du vrai avec l'idée que la vérité scientifique n'est pas dans la confirmation mais dans la réfutation. Et Popper insiste « c*e n'est cependant pas cet admirable déploiement déductif du système qui confère à une théorie son caractère rationnel ou empirique, mais le fait que nous pouvons en entreprendre l'examen critique, c'est à dire procéder à des tentatives de réfutations et, notamment, soumettre celle-ci à des tests d'observation et le fait aussi que, dans certains cas, une théorie soit en mesure de résister à ces critiques et à l'épreuve des tests en particulier de ceux qui ont présidé à la ruine de ses devancières mais aussi d'autres tests plus rigoureux encore. C'est dans le caractère rationnel du choix qui fait adopter la nouvelle théorie plutôt que dans le développement de celle-ci que réside la rationalité de la science »* [164] .

A ceci près, qu'en mathématiques, la réfutation n'est pas expérimentale, à cause de la différence de nature des faits entre les deux sciences. De plus, la réfutation d'une théorie

intervenant par la mise en évidence d'un paradoxe ou par la donnée d'un contre exemple qui « *n'aurait pas le caractère définitif d'une réfutation expérimentale. Le mathématicien aurait toujours le loisir de s'en émanciper en changeant les axiomes. Autrement dit, pour Popper, il y a des contradictions possibles en mathématiques ; mais elles sont de nature interne, c'est-à-dire logiques en définitive ».* [165]

Cela met en évidence que le vrai est fort dépendant des prémisses du départ et qu'en mathématiques (au niveau interne) il sera toujours possible d'ajuster le vrai. Ce qui accentue le caractère quelque peu fragile de cette idée du vrai et qui égratigne sérieusement son statut absolu que d'aucuns voudraient lui conférer. Cette citation rectifie une certaine étiquette souvent collée à l'image des mathématiques, comme le déplore Michel Authier que nous suivons, lorsqu'il regrette « *et les mathématiques apparaîtront comme l'archétype de la connaissance limpide, le paradis des vérités cristallines...».* [166]

Ne peut-on pas voir également l'ébauche d'une distanciation réduite entre sciences « formelles » et sciences « empiriques » voire « humaines » en ce sens que, si les mathématiques sont formelles car visant à modéliser le monde et non pas à le représenter de manière réelle, il n'en reste pas moins vrai, que comme les autres types de sciences, elle est au service de l'homme. Il n'y a qu'à se rappeler des balbutiements de cette discipline pour s'en convaincre : ce sont bien des motivations purement pratiques liées

[164] POPPER K. opus cit. p. 328.

[165] JOSHUA S. et DUPIN J.J. - *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques* - Edition P.U.F. 1993. p.36.

[166] AUTHIER M. - *Archimède : le canon du savant* - in - *Eléments d'histoire des sciences.* dirigé par SERRES M. Edition Bordas - 1989 - p. 119.

aux conditions de vie de l'homme qui ont poussé certains à trouver des solutions concrètes (recherche de vérités) dans un but complètement pragmatique. En conséquence, ce qui ressort tout particulièrement c'est que le vrai touche deux champs : celui du juste avec l'empreinte de la logique car c'est de la pertinence des méthodes de recherche que naîtra l'efficacité ; et celui du bien avec l'empreinte de la morale : ces recherches du vrai se veulent contribuer au bien être de l'homme.

En somme, il semblerait que les mathématiques s'isolent de plus en plus au niveau du savoir savant mais parallèlement, dans l'enseignement, le programme des statistiques de collège devient de plus en plus développé : d'un côté les « math pures » (sphère où l'homme est absent ; la préoccupation des chercheurs étant d'ordre interne) tiennent le devant de la recherche et sur le terrain, c'est une tendance vers les « math appliquées » (plus interprétatives des phénomènes humains) qui avance de plus en plus (le discours institutionnel répétant également avec force qu'il faut introduire le raisonnement avec prudence et se garder de tout formalisme excessif). L'enseignant est donc dans une situation conflictuelle . Mais cette dichotomie a-t-elle un sens ? Les « mathématiques appliquées » ne tirent-elles pas leur raison d'être des « mathématiques pures » et ces dernières ne sont-elles pas une réalité dont l'existence tire sa légitimité des problèmes qui surgissent dans les « math appliquées » ? Le fait d'enseigner une science « formelle » n'éloigne t-il pas l'enseignant de l'homme ? « *La science véhicule une éthique de l'effacement ou du gommage du sujet individuel empirique : le scientifique ne peut raisonner selon sa subjectivité propre individuelle ».* [167] Mais dans le même temps, être attaché à l'idée du vrai c'est chercher le « bien des phénomènes naturels » donc la présence de l'homme n'est pas évacuée.

4. Nécessité de clarifier la notion de vrai en mathématiques.

Nous proposons de le faire d'abord en présentant deux tableaux qui donneront à voir les idées fortes que nous avons retenues .

De manière à accroître leur lisibilité nous précisons le sens des titres de colonnes de ces tableaux :

- caractéristique : ce qui a fortement imprégné l'idée du vrai.
- visée : à travers la recherche du vrai, ce à quoi aspirent les hommes.
- objet : ce sur quoi, s'applique le vrai.
- mode d'accès : le comment, on parvient à établir du vrai.
- repose sur : ce, à partir de quoi ,on peut établir du vrai.
- essence : d'où vient le vrai ?

Mise en garde pour la lecture : il n'y a aucune correspondance entre les lignes des différentes colonnes.

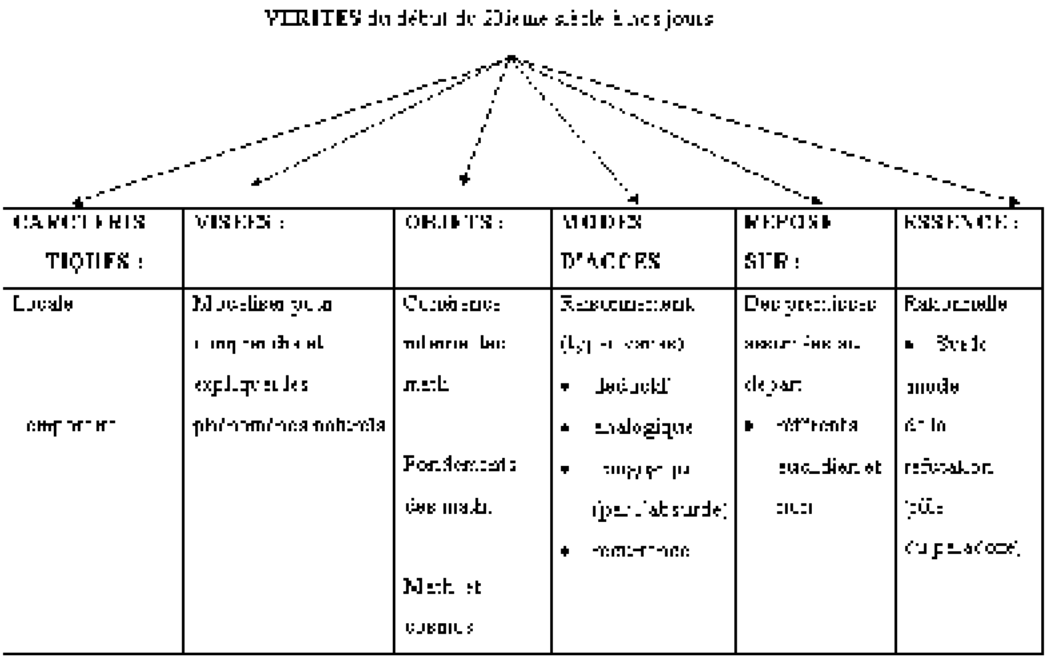
Pour des raisons de format nous les livrons à la page suivante.

[167] FOUREZ G. *La construction des sciences* - Edition De Boeck Université. 1988 p. 38.

VERITE : des balbutiements des Mathématiques jusqu'au 19ème siècle

CARCTERIS TIQUES :	VISEES :	OBJETS :	MODES D'ACCES	REPOSE SUR :	ESSENCE :
Absolue Éternelle Universel	Compréhension du monde Esthétique	Intuitifs (aux math.) • Les math. sont un corps de vérités Extérieur (aux math.)	Raisonnement (déduction) Intuition & Déduction	Des prémisses données au départ • axiomes euclidiens	Naturelle • par le mode de la méditation Divin • vérité révélée
Simple	Religieuse	• modèles du monde	Cœur & Raison		

Clarification de la notion de vrai en mathématiques



CARACTERISTIQUES :	VISEES :	OBJETS :	MODES D'ACCES	REPOSE SUR :	ESSENCE :
Locale [illegible]	Modéliser pour comprendre et expliquer les phénomènes naturels	[illegible] [illegible] math. Fondements des math. Math. et sciences	Raisonnement [illegible] • déductif • analogique • [illegible] (par l'absurde) • [illegible]	Des [illegible] de départ • [illegible]	Rationnelle • [illegible] de la réfutation [illegible]

Justifions l'existence de deux tableaux et pas seulement de un.

La raison essentielle réside dans le fait de souligner qu'historiquement, il y aurait eu, comme une espèce de « rupture épistémologique », dans la manière de considérer l'idée du vrai, plus particulièrement aux abords du 20^{ième} siècle avec la reconnaissance d'autres référents que celui d'Euclide : d'où le passage de vérité à véritéS.

C'est aussi pour souligner en conséquence, le « poids » de l'héritage grec dans l'évolution même de la notion devrai et mettre en évidence l'idée par là - même que « *comme les peintres nous l'ont appris, le savoir que nous avons, bien souvent, reconstruit ce que nous voyons, fabrique nos rapprochements et notre intuition* » [168] .

C'est enfin pour faire émerger une idée forte qui devrait avoir un retentissement sur le plan didactico-pédagogique, à savoir, que pour que l'idée du vrai puisse être appropriée par les élèves, il serait souhaitable, de travailler chez eux la notion de doute : c'est de l'absence que naît la nécessité de présence, c'est de la lumière que jaillit l'ombre, (pensons au gnomon de Michel Serres). C'est donc en essayant d'appréhender l'idée du vrai autrement, qu'apparaîtra mieux, nous semble t-il, le sens et la visée de cette notion .

Mais il faut rappeler la mise en évidence des limites de l'idée du vrai en mathématiques, en faisant référence à trois critères fondés sur le raisonnement.

En premier lieu, le principe d'induction ne peut pas donner l'accès au vrai « n*ous pouvons par conséquent affirmer que les théories ne peuvent jamais être inférées des énoncés d'observation ni recevoir de ceux-ci une justification rationnelle* ». [169] En effet,

[168] GOLDSTEIN C. - *L'un est l'autre : pour une histoire du cercle* inEléments d'histoire des sciences dirigé par SERRES M. - Edition Bordas - 1989 p. 145.

ceci est bien connu en mathématiques car ce genre de raisonnement entraîne une régression à l'infini.

En second lieu, il faut pointer les limites du principe hypothético-déductif qui se fonde sur des prémisses assumées au départ en restant vigilant aux dérives que cette réflexion peut susciter. D'autant plus si l'on se réfère à ce que Saint Thomas D'Aquin déclarait au sujet de la science.

En vue de prouver que la théologie était une science, il rétorquait à Alexandre de Halès, maître séculier devenu franciscain et qui avançait le contraire que « l*es autres sciences , n'argumentent pas en vue de démontrer leurs principes, mais elles argumentent à partir d'eux pour démontrer d'autres vérités comprises dans la science. Ainsi la science sacrée ne prétend pas, au moyen de l'argumentation, prouver ses propres principes, qui sont les vérités de foi, mais elle les prend comme point d'appui, pour manifester quelque autre vérité, comme l'apôtre, dans la première épître aux corinthiens prend appui sur la résurrection du Christ pour prouver la résurrection commune ».* [170] Prenons la liberté dans ce texte de substituer mentalement le mot prémisses à celui de principes ; au lieu de penser science particularisons à mathématiques. Tout le problème de l'idée du vrai est parfaitement posé. Les « vérités de foi » auxquelles il est fait allusion seraient équivalentes aux axiomes d'Euclide (ou aux axiomes des autres géométries non euclidiennes). Il est aussi illusoire d'admettre que la résurrection est une prémisse incontestable que de penser que les axiomes d'Euclide sont des évidences incontestées. A la différence près, tout de même, qu'à partir de ces derniers on a pu construire une science et non un dogme (dans lesquelles les prémisses doivent être incontestées).Ce qui n'a rien du détail, puisque c'est ce qui a permis à d'autres prémisses d'émerger scientifiquement, sous entendu, en laissant libre cours à la réfutation de s'exercer. En d'autres termes, avancer quele vraien mathématiquesest contingent des prémisses de départ introduit certes, la limite du raisonnement hypothético déductif, mais ouvre la possibilité au questionnement et ne ferme pas la possibilité de les contester.

L'idée du vrai ne peut alors plus tenir en mathématiques, tel qu'elle est couramment définie dans le dictionnaire historique, c'est-à-dire comme une réalité (fin 10$^{\text{ième}}$ siècle) et par la suite comme la conformité de l'idée avec son objet (vers le 13$^{\text{ième}}$ siècle).

De plus, dans le champ des mathématiques l'histoire nous montre que cette notion éclate, vers le 19$^{\text{ième}}$ siècle, avec la naissance des géométries non euclidiennes. Est-ce à dire que rien n'est vrai ou que tout l'est ? Certes pas, car ce serait dans les deux cas cautionner l'idée que les mathématiques caractérisent cet espèce de relativisation qui ouvre les portes à un dogmatisme et à un autoritarisme effrénés. Une forme de vrai existe toujours, bien sûr, mais de quelle manière ?

Au lieu de vérité, ne faudrait il pas mieux s'intéresser plus à l'idée de validité qui mettrait davantage l'accent sur le processus que le produit ? Qu'introduit ce terme de différent et pourquoi serait-il sans doute souhaitable d'y faire référence ? Parce que la

[169] POPPER K. opus cit. p. 73.

[170] D'AQUIN T. - *Somme théologique* - cité par BENOIT P in *Eléments d'histoire des sciences* opus cit. p. 189.

vérisimilarité définie par Popper en lien avec la vérité de Tarski comme correspondance avec les faits est un concept qui ne trouve son sens pleinement, que dans le champ des sciences empiriques. Même s'il est intéressant en mathématiques, il ne peut se justifier intégralement étant donné le problème relatif à la différence entre la nature des faits dans les deux types de sciences. Que voudrait dire qu'une proposition est plus ou moins vraie en mathématiques ? Il semblerait que ces questions soient incontournables, mais elles ne seront pas l'objet de nos préoccupations .

La stabilisation temporaire du vrai qui vient d'être présentement menée se réfère au champ scientifique. L'évolution de l'idée du vrai a été appréhendée dans le cadre du savoir de référence qui est communément appelé savoir savant, c'est dire tout le côté spéculatif de l'entreprise.

Cependant, cette notion de vrai tient lieu de référence aussi bien dans les milieux de la doxa que dans celui de la sophia. L'idée du vrai appartient donc à tous les mondes, aussi est-ce légitime que de vouloir comprendre ce que l'on peut extraire de l'importance attribuée à cette notion.

Ni la règle, ni le principe d'universalité ne sont suffisants pour appréhender la notion de vrai : ne devrions-nous pas voir, à travers cette question du vrai une exigence plus forte qu'un simple besoin d'enseigner à prouver ? Quelle valeur transcenderait même cette possibilité de recherche/rencontre avec l'idée du vrai ? N'y aurait-il pas, derrière cette volonté de la travailler une exigence d'humanité ?

Récapitulation des idées fortes concernant l'approche épistémologique du vrai en mathématiques

- Le vrai tire sa légitimation de sa contingence avec des règles et des méthodes appartenant au champ des mathématiques
  - principes de rationalité
  - rôle des prémisses assumées au départ
- Le vrai dépend des critères que les mathématiques se donnent pour l'évaluer et des normes posées :
  - raisonnement hypothético-déductif seul valide
  - rôle du référent
- Le vrai ne dépend pas de la vérification mais de sa puissance à résister à la réfutation
  - rôle du paradoxe
  - rôle du contre-exemple

Chapitre 4. Usage possible de l'idée du vrai pour une épistémologie des mathématiques scolaires.

Nous avons soumis la question du vrai à l'interrogation philosophique car cette dernière réclame que l'on s'efforce à penser rationnellement en vue d'une recherche de sens. Puis nous nous sommes intéressée à la notion de vrai dans la pensée mathématique en regard de son évolution à travers de l'épistémologie. Mais, afin d'éclairer l'évolution des conceptions de la notion du vrai, nous aurions pu nous contenter de juxtaposer les approches mathématique et philosophique. Simplement pour donner à voir unecentration commune sur notre objet d'étude, à deux voix. Dans cette perspective, nous prenions le parti pris de considérer ces deux champs comme imperméables l'un à l'autre ne partageant en commun, que leur attention à l'idée du vrai. or nous entendons croiser les regards ce que nous explicitons par cette analogie : si les sciences de l'éducation ne constituent par un agglomérat de disciplines distinctes mais *« renvoient au concept de multiréférentialité de Jacques Ardoino »* [171] , nous considérons qu'il en va de même entre les mathématiques et la philosophie pour « *viser la complémentarité entre des approches disciplinaires hétérogènes les unes aux autres [...]* [car] l'*ambition de l'analyse multiréférentielle est de conjuguer ces savoirs hétérogènes dans le but d'appréhender la compréhension de situations éducatives, forcément complexes* » [172] .

C'est pourquoi, en tricotant les visions mathématique et philosophique nous nous attachons à mettre en évidence des notions clés, trames pour tisser le retentissement de l'idée du vrai dans l'enseignement : nous en pointons trois que nous abordons successivement .

Parole d'élèves. La vérité en mathématique, c'est quelque chose qui est vrai, démontré, vérifié. Quand on a une hypothèse ce n'est jamais prouvé et quand on a la prouve ce n'est pas totalement vérifié car il y a toujours un quelque chose d'abstrait que l'on ne peut prouver et qu'on admet.

1. Trois themata relatives au vrai.

a)De l'évolution des paradigmes sur l'idée du vrai.

Le concept de paradigme, dû à Khun [173] a fait fortune depuis 1962. Outre le fait qu'il désigne l'ensemble des convictions partagées par une communauté de chercheurs point de vue de leurs connaissances, langages, habitudes) il constitue aussi la matrice

[171] DEVELAY M. - *Propos sur les sciences de l'éducation . Réflexions épistémologiques* - Edition ESF. 2001. p.56

[172] DEVELAY M. ibidem p.57.

[173] *La structure des révolutions scientifiques* - Edition Flammarion - (nouvelle édition augmentée et revue par l'auteur). 1970

disciplinaire d'une science (son contenu) et joue un rôle de « *ciment sociologique* » [174] de la communauté. Ainsi donc verrions-nous émerger, lors de notre périple au cours du temps trois grands paradigmes fondateurs d'une pensée sur l'existence du vrai : le paradigme de la certitude de l'existence de l'idée du vrai ; le paradigme de l'incertitude du vrai absolu ; le paradigme de la certitude du doute.

A propos du paradigme de la certitude de l'existence de l'idée du vrai.

La pensée antique qui introduisit, fort tôt déjà, une rupture épistémologique dans la recherche du vrai en instituant le raisonnement comme source d'infaillibilité dans l'accès au vrai, traversa les siècles et fut tardivement questionnée. Pendant longtemps donc, la communauté de chercheurs se rassembla autour de la certitude de l'existence du vrai absolu, même si cette dernière s'enracinait dans des socles disparates (existence en soi ; raison ; expérience ; cœur ; médiation divine). A tel point, que les prédicats ontologiques du vrai selon l'Idéal métaphysique qui entretiennent des relations d'isomorphisme entre vérité substance, vérité permanence, et vérité rationalité semblent avoir été partagés aussi bien par les communautés de mathématiciens que par celles des philosophes.

L'homme s'est longtemps lancé à la quête de la légitimation du réel à travers les mathématiques en recherchant un nouvel Absolu, le vrai, synonyme de sécurité ontologique de par sa proximité avec l'idée de permanence.

Parole d'élèves. Toute chose est considérée comme vrai tant que le contraire n'a pas été démontré donc le vrai en mathématique est à la fois une chose de vérité et à la fois une chose de doute. Tout peut être vrai et tout peut être faux. Même la chose la plus évidente 1 + 1 = 2 : rien nous prouve vraiment et concrètement que 1 + 1 = 2.

A propos du paradigme de l'incertitude de la certitude de l'existence du vrai absolu.

Au moment où les géométries non euclidiennes commencèrent leurs premiers balbutiements et lorsque Kant attira les esprits du côté du « que puis-je connaître ? » pour délaisser la question du « comment puis-je connaître le vrai ? », un nouveau paradigme se fit jour. D'absolu, la notion du vrai passa au local et le paradigme de l'incertitude émergea en érigeant comme pensée commune, l'idée que le vrai est fonction

de... Il pouvait exister plusieurs géométries valides puisque reposant sur des fondements différents.

A propos du paradigme de la certitude du doute de l'existence de l'idée du vrai.

La mort du Cercle de Vienne en 1931 entérina le fait que l'incertitude existait aussi en sciences (et en mathématiques plus spécifiquement).La notion de vrai s'ébranla alors de plus en plus puisque l'unité de la science mathématique était un leurre. Du côté de la

[174] BENSAUDE - V. - *Faire la paix avec le sens commun* - in Sciences humaines hors série n° 31 réalisé avec le département des sciences de l'homme et de la société du CNRS. Décembre 2000. janvier - février 2001. p.56.

philosophie, la croyance que la vérité était liée aux sciences s'écorna sérieusement et la notion de vérité se tourna vers des objets différents tels que la vérité de l'Etre et la vérité du Temps.

Gödel porta le coup de grâce et c'est pour cela que nous avançons que la paradigme de la certitude du doute de l'existence de l'idée du vrai au sein même des mathématiques hypothétiquement unifiées naquit. L'idée du vrai en fonction de, n'en prenant que plus de résonance en mathématiques comme en philosophie (avec la succession des courants tels que la phénoménologie, l'humanisme et le structuralisme par exemple).

b)Contre la relativisation et pour le relativisme.

Douter de l'existence du vrai absolu pour adhérer à l'existence du vrai local tout en ayant à l'esprit que les fondements des mathématiques sont fragiles favoriserait-il l'écueil de considérer que tout est vrai ou que rien n'est vrai ?

Paroles d'élèves. Certaines règles en math. peuvent être vraies dans certains contextes et s'avérer inexactes dans d'autres. Si une personne n'a jamais entendu parler de mathématiques de sa vie, alors « les notions communes » soit disant claires pour tous ne le seront pas forcément pour lui. Néanmoins, je pense que si l'Homme n'avait pas commencé à faire des suppositions et des hypothèses alors il n'aurait rien à prouver et les mathématiques n'auraient peut-être pas existé.

L'attitude de relativisation consisterait à penser que le vocable fonction de, signifie que nous puissions nous passer de l'idée du vrai ou que cette dernière n'ait plus de valeur ; ce point de vue n'est pas tenable en mathématiques et comme le rappelle Poincaré « *douter de tout ou tout croire, ce sont deux positions commodes, qui l'une et l'autre nous dispensent de réfléchir* » [175] . En revanche, développer une pensée relativiste autour de l'idée du vrai, définit une posture épistémologiquement parlant tout à fait souhaitable ; souhaitable, dans la mesure où le relativisme introduit l'idée que le vrai est relatif aux principes dont se dote une science, en l'occurrence, les hypothèses de départ sur lesquelles elles fondent une démarche de raisonnement. Le relativisme introduirait également le caractère provisoire du vrai (puisque lié au vrai des prémisses sur lesquelles se fondent une science). Car « *les problèmes posés par les fondements, et surtout certaines de leurs solutions ont des retombées sur les mathématiques, pratiquement dans toutes ses disciplines, que ce soit sur un plan méthodologique ou celui du renouveau des points de vue* » [176] .

Mais passer de la relativisation au relativisme réclame certainement que l'on questionne la notion de paradigme. En effet ; si la référence aux paradigmes ne conduit qu'à privilégier uniquement la voie consensuelle (dans la constitution de la forme d'une connaissance) au détriment de la dimension conceptuelle, alors il se peut que les connaissances admises puissent être disqualifiées au seul motif qu'elles soient ratifiées

[175] POINCARE H. - *La science ou l'hypothèse* - Edition Flammarion . 1968. p. 24

[176] GEGIELSKI P. - *Un fondement des mathématiques* - in La recherche de la vérité IREM de l'Université de Paris VII - Edition du Kangourou - 1999 p.176.

socialement (ce qui leur conférerait un statut non rationnel puisque caractérisant le résultat d'un consensus entre acteurs) et la pensée orientée vers la relativisation prendrait tous ces droits. Mais passer de la géométrie euclidienne à la géométrie de Lobatchevsky par exemple relève d'une vigilance à vérifier la consistance d'une telle géométrie par exemple (ce que Gödel a fait d'ailleurs) ; et si la consistance est prouvée (à partir d'une perspective donnée), alors le nouvel édifice géométrique ainsi construit sera validé socialement ; la démarche d'adoption consensuelle d'une nouvelle connaissance est donc rationnelle dans ce cas, bien que consensuelle

c)La position holiste (Quine 1951).

Les approches successives dans le champ des mathématiques et dans celui de la philosophie nous ont conduite à mentionner que le traitement de la question du vrai ne peut faire l'économie d'une réflexion sur la notion de paradigme et de relativisme ; le détour par la pensée holiste nous semble tout aussi nécessaire dans l'éclairage de cette idée du vrai. Sommairement résumée, cette position avance qu'aucune hypothèse ne peut être isolée de tout un corpus d'autres hypothèses.

Ainsi, aborder l'idée du vrai en mathématiques consiste à mesurer la nature et le nombre de jalons qu'il faut poser pour trancher le vrai. La réflexion sur l'idée du vrai doit donc englober l'incidence du principe de régression à l'infini vis à vis de l'existence des fameuses notions communes : c'est parce que l'on ne peut pas prouver le vrai en soi de tous les fondements que les mathématiques ont besoin du vrai a priori, au départ de la construction de leur édifice euclidien par exemple ; et c'est parce que le vrai de l'apriori du Vième postulat se conçoit relativement par rapport au vrai d'autres postulats que l'on peut mesurer le relativisme du vrai en mathématiques. En outre, Quine s'attaque au « dogme de l'empirisme logique » professé par le Cercle de Vienne qui consiste à faire la distinction entre les vérités analytiques (ou logiques) et les vérités synthétiques qui portent sur les faits. Il prétend que les vérités analytiques ne sont pas que logiques mais qu'elles entretiennent une dépendance avec les faits. Ainsi, le principe de non contradiction, pilier de la logique classique peut être questionné, selon Quine, dans la mesure où ce principe est remis en question par la mécanique quantique, qui admet qu'une particule peut à la fois être et ne pas être.

Récapitulation des idées fortes concernant l'usage possible de l'idée du vrai pour une épistémologie des mathématiques scolaires

Une posture épistémologiquement souhaitable quant à l'enseignement de l'idée du vrai oriente vers :

- La nécessité d'enseigner que le vrai est relatif aux principes dont se dotent les sciences mathématiques
  - le vrai est relatif
- Le respect de la dimension conceptuelle de l'idée du vrai en l'associant à la notion de doute et en référence à la fragilité des fondements

– le vrai est local
– l'indécidable existe même au sein des mathématiques

· L'étude du rôle et de la fonction de l'hypothèse y compris la nécessité de la notion de prémisses assumées sans preuve

Dans cette partie deux qui s'achève, si nous nous sommes intéressée à l'évolution des conceptions du vrai dans l'histoire de la pensée, c'est qu'elle doit éclairer des finalités dans l'enseignement. Et c'est en référence à la trilogie durkheimienne qui assigne aux savoirs (ici la question du vrai) les dimensions du citoyen, du travailleur et de la personne que nous entendons conclure. *« L'esprit, il faut le répéter, est fait pour penser les choses, et c'est en lui faisant penser les choses qu'on le forme »* [177] ponctue Durkheim mais le sociologue entend que cette pensée s'appuie avant tout sur l'objet, tant « *il loue le réalisme et l'esprit pratique* [de la scolastique qui vaut] *mieux de ce point de vue qu'une éducation humaniste incapable de répondre aux besoins du plus grand nombre »* [178] *.* La science permet d'envisager une éducation pour tous à condition de ne pas se détacher du caractère utilitaire de ses finalités, car poursuit Durkheim *« la science ne peut être appréciée de l'opinion que si, directement ou indirectement, elle sert à éclairer l'action et si l'on en a conscience »* [179] . Nous souscrivons aux élans durkheimiens lorsqu'ils reconnaissent à la science un pouvoir éducatif sur la formation de l'esprit et nous sommes sensible à la volonté du sociologue d'unir éducation à « plus grand nombre » (intention démocratique).

Nous nous saisissons de l'idée que défend Durkheim « *il y a des formes diverses de la réflexion, qui sont fonction des objets auxquels elle [culture logique] s'applique, des habitudes diverses à acquérir que l'esprit ne peut prendre qu'en entrant en rapport avec les diverses sortes de réalités qu'il [l'esprit] est appelé à rencontrer »* [180] . Bien que nous soyons avertie par Alain Kerlan que *« le positivisme ignore pour l'essentiel l'idée que les sciences puissent être des moyens au service et au profit de la maîtrise de l'entreprise ou des processus éducatifs »* [181] *,* nous serions tentée de déceler chez Durkheim l'amorce (cachée) d'un souci d'ordre didactique (tout en sachant que ce basculement ne s'opérera franchement que plus tardivement).

Le détour par l'évolution des conceptions du vrai dans l'histoire de la pensée (*formes diverses de la réflexion fonction des objets*), ainsi que la nécessité de clarifier l'idée du vrai, marquent notre propre préoccupation pour penser les façons et les procédures de

[177] KERLAN A. citant Durkheim opus cit. p.152

[178] Ibidem p.152

[179] Idem p. 152.

[180] Ibidem p. 155.

[181] Ibidem p. 17.

l'enseignement auxquelles nous convie la « didactique » de nos jours, pour nous rendre attentive à leur mise *en rapport avec les diverses sortes de réalités* auxquelles l'esprit des élèves peut être confronté au sujet de la question du vrai. Convaincue que nous sommes, que « le comment on apprend » compte autant que « ce que l'on apprend » .

Le recours à la philosophie, l'histoire et l'épistémologie sont autant de regards qui ont nourri notre réflexion afin que nous concevions un usage possible de l'idée du vrai pour une épistémologie des mathématiques scolaires. La partie deux fonde donc la partie trois qui suit où il s'agit alors de penser une modélisation de l'usage de l'idée du vrai dans l'enseignement des mathématiques au collège.

partie 3. vers une modelisation de l’usage de l’idee du vrai dans l’enseignement des mathematiques au college.

[...] Les ténèbres spirituelles ont une structure et, dans ces conditions toute expérience objective correcte doit toujours déterminer la correction d’une erreur subjective. Mais on ne détruit pas les erreurs une à une facilement. Elles sont coordonnées. L’esprit scientifique ne peut se constituer qu’en détruisant l’esprit non scientifique. [...] Tout réel progrès dans la pensée scientifique nécessite une conversion. Les progrès de la pensée scientifique ont déterminé des transformations dans les principes mêmes de la connaissance. G Bachelard. La philosophie du non - Edition PUF Quadrige - 4ième - 1994. p.8

La partie deux a montré que l’idée du vrai interpelle plusieurs façons de concevoir des objets mathématiques et leur mode de connaissance : une conception réaliste, idéaliste et constructiviste. La première prétend que l’idée du vrai préexiste à l’activité de preuve ; la seconde avance que l’idée du vrai existe en soi ; la dernière suppose que l’idée du vrai relève d’une construction.

D’après Brousseau la présentation axiomatique des mathématiques est une présentation classique des mathématiques et elle paraît merveilleusement adaptée à l'enseignement dans la mesure où elle permet de définir les objets que l'on étudie à l'aide des notions précédemment introduites. Mais elle gomme complètement l'histoire des sciences, c'est-à-dire la succession des difficultés et des questions qui ont provoqué l'apparition des concepts fondamentaux, leur usage pour poser de nouveaux problèmes, l'intrusion de techniques et de questions nées des progrès des autres secteurs, le rejet de certains points de vue trouvés faux ou maladroits et les innombrables querelles à leur sujet. Cela rappellerait plutôt les conceptions réaliste et idéaliste dans lesquelles la rationalité mathématique et les règles de la logique préexistent à toute activité, comme si elles s'imposaient d'elles-mêmes, comme si l'idée du vrai existait en soi. Or, la présentation axiomatique masque le vrai fonctionnement de la science, pour mettre à la place, une genèse fictive. Cette opération est qualifiée par les épistémologues de transposition didactique et doit être mise sous surveillance. Nous aurons donc le souci d'analyser les programmes pour étudier la manière dont ils s'emparent de la question du vrai.

En outre, selon M. Develay, l'émergence de la didactique est en réaction aux approches des questions d'éducation en termes de relation telles que les fécondaient les sciences de l'éducation. Il montre, que dans les années 1970 un mouvement issu de structures à découpages disciplinaires (IREM et INRP) mettent l'accent sur les questions d'appropriation de contenus par les élèves. A l'élève bio-psycho-social des travaux de pédagogie se substitue l'élève épistémique. La didactique s'affirme donc comme questionnement nouveau par rapport au questionnement pédagogique, dès lors qu'elle considère que la particularité des savoirs enseignés détermine des modes d'apprentissage et des modalités d'enseignement particuliers dans lesquels une autre conception (que la conception idéaliste ou réaliste) des objets mathématiques peut être véhiculée. C'est pourquoi nous déterminerons la conception générale de l'enseignement apprentissage que nous défendons en l'illustrant par des situations didactiques en regard du traitement de la question du vrai.

L'idée du vrai dans l'enseignement contribue sans doute à développer un certain regard mathématique d'autant plus que la logique déductive qui conservait valeur décisive de preuve et constituait un fondement irrécusable de vérité se révéla insuffisante. Depuis Gödel, l'indécidabilité au sein des systèmes formalisés complexes eut pour conséquence de montrer que seul un chemin relatif permet d'accéder à une vérité. Dès lors, il est une nécessité d'élaborer des principes généraux pour penser cette question au sein de l'enseignement des mathématiques en collège et c'est ce que nous proposerons.

Chapitre 1. Les programmes scolaires et l'idée du vrai.

Juxtaposer les visées scientifique et philosophique permet de souligner que l'enseignant régule ses actions didactique et pédagogique selon sa propre pensée de l'humain et ses représentations de l'idée du vrai. Autrement dit, sa façon de faire traduirait sa manière de penser et réciproquement.

Seulement, l'enseignant n'est pas totalement maître de ses actions et ne jouit pas d'une autonomie complète puisque pour prévenir toute déviance dans l'acte éducatif, le professeur de mathématiques (comme bien d'autres) se doit de respecter les « garde fous » de la rectitude de la démarche enseignante ; c'est-à-dire suivre et comprendre l'esprit des contenus des textes et recommandations officiels [182] .

Il est tenu certes de s'y conformer, mais chacun sait bien combien la distance peut être grande entre les interprétations de l'enseignant et les intentions de la noosphère. Il n'y a là rien d'étonnant car chaque individu a une histoire, chaque individu est une histoire et cela paramètre certainement la manière dont il reçoit ces instructions.

C'est donc en fonction de ces présupposés que nous proposons une analyse des recommandations officielles afin d'étudier de quel côté elles tirent l'enseignant en regard de l'idée du vrai. L'entreprise est risquée puisque nous sommes imprégnée de représentations qui peuvent induire cette analyse ; parfaitement consciente de cet état de fait, nous présenterons dans un premier temps une étude critique des programmes et directives officiels de mathématiques de collège en convoquant des concepts éclairants et garants d'une bienveillante « objectivité » au sens de Fourez. Car la signification n'est pas immanente, donnée, déjà-là, à la fois intérieure et extérieure à la question que l'on se pose. Insistons à nouveau, l'objectivité ne s'oppose pas à l'autorité subjectivité, dans la mesure où le fait qui est tenu pour vrai, résulte lui même d'une construction tant « *l'observation est une construction sociale relative à une culture et à ses projets* » [183] car « *le fondement de l'objectivité scientifique est plutôt la soumission à des protocoles qui sont à la fois expérimentaux et théoriques. C'est dire qu'on obéit à des règles dans la façon de faire des expériences aussi bien que dans la façon de raisonner* » [184] puisque « l*a science s'affirme aujourd'hui science humaine science faite par les hommes et pour les hommes* ». [185]

1. Méthodologie de l'étude et de la critique.

Nous travaillons sur les documents officiels des programmes de mathématiques émanant du ministère de l'Education Nationale [186] .

L'étude ne sera pas seulement un descriptif des programmes (même si nous avons besoin de citer certains passages) mais consistera à faire apparaître si la présence plus

[182] Ces documents officiels sont visibles en Annexe 10.

[183] FOUREZ G. opus cit. p. 38

[184] ATLAN H. - *Education et société* in Esprit n° 174 - Sept. 1991.

[185] FOUREZ G. opus cit. p. 40.

[186] Concernant l'étude des programmes relatifs à la réforme de 1995 nous travaillons sur : Organisation des enseignements dans les classes de 6^{ième} B. O juin 1996 - Programmes du cycle central 5^{ième} et 4^{ième} - Livret 1 - Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche - 1997 - Accompagnement des programmes de 3^{ième} - Livret 3 - Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche - 1999 - Programmes de 3^{ième} B.O octobre - 1998 .

ou moins accentuée de l'idée du vrai traverse ces programmes, et d'essayer d'en découvrir les enjeux afin de pouvoir comprendre, ce qui peut se cacher derrière cette notion. Successivement, d'abord au travers des contenus : sous quelle forme cette idée du vrai existe t-elle ? Puis au travers des « méthodes » dans le sens didactico pédagogique, situations de cours, scénarios porteurs plus ou moins clairement explicités, pointer des indicateurs traduisant ce qui est recommandé dans la construction des savoirs : est-il possible qu'à travers ces programmes l'enseignant puisse faire vivre cette notion du vrai ? Si oui comment ? Enfin, au travers de l'emploi d'un vocabulaire mettant en avant une terminologie faisant référence ou non à la résolution de problèmes, à la logique, au raisonnement, à la démonstration observer, si les programmes incitent le professeur à travailler cette question du vrai. Et pour finir, détecter les finalités des cours de mathématiques qui peuvent être présentes dans les compléments de programmes : comment cette idée du vrai est-elle rattachée aux mathématiques ?

Nous emploierons donc les mots : ***contenus, méthodes , terminologie, et finalités*** pour situer les niveaux d'analysedans la présentation qui suivra .

De manière à peut-être mieux comprendre nous prenons le parti d'analyser la présence de cette notion du vrai, en respectant les traditionnelles typologies (bien que critiquables sur le plan mathématique) axées sur les « ségrégations » artificielles entre le numérique / algébrique, le géométrique et la gestion des données (référence aux statistiques).

En ce qui concerne la critique, elle se présentera sous deux formes .

Une critique immédiate et ponctuelle relative à chacune des parties étudiées suivant son cadre (géométrique ou algébrique ou statistique) et une critique d'ordre épistémologique globale qui veillera à étudier, à partir de ce qu'aura révélé l'étude, si la manière de construire les contenus des programmes a une influence sur la présence ou non de cette idée du vrai et de quels types sont (ou est) les (la) vérité(s) auxquelles sont confrontées les enseignants car : « *il existerait un noyau dur de savoirs permanents, reflet d'une éthique maintenue à travers les décennies »* [187] .

Nousobserverons aussi quels « moyens » implicites ou explicites ces programmes mettent en œuvre afin de favoriser ou non cette introduction de la notion de vrai et sous quelle forme.

Nous nous attacherons alors à comprendre si la « typologie traditionnelle » est le reflet d'une prise de position associant l'idée du vrai avec un champ plus qu'avec un autre (la géométrie serait - elle le lieu prédestiné pour introduire cette idée ? ou serait - ce le numérique ? ou sont - ce les deux ?).

2. Etude des programmes de 1995 à 2000.

Les finalités des mathématiques au collège.

[187] DEVELAY M. - *De l'apprentissage à l'enseignement* - E S F Editeur . 3^{ième} édition . 1993. p. 28.

En premier lieu, elles renvoient à une finalité d'ordre politique et moral par des phrases telles que « la formation du citoyen » ; en « développant conjointement et progressivement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique ».

Nous y voyons en second lieu, une finalité d'ordre culturel à cause de la référence à la prise de conscience par l'élève du caractère autonome des mathématiques « qui leur permet d'intervenir dans des domaines aussi divers que les sciences physiques, les sciences de la vie et de la terre, la technologie, la géographie etc.. ». La finalité d'ordre culturel apparaît aussi par le fait de former à une activité « symbolique » ; la modélisation grâce à laquelle « il est par exemple possible d'anticiper sur des évolutions et donc de disposer d'instruments d'aide à la décision. » ; « les représentations sont autant d'outils de préhension, permettant d'éclairer certains aspects de la réalité et, dans le même mouvement, de prendre de la distance par rapport à ce qui est observé ».

Enfin, nous pointons une finalité d'ordre social en mettant l'accent sur la « pratique de l'argumentation ; l'usage des moyens actuels de traitement de l'information et de communication » autrement dit, en faisant ressortir le côté utilitaire de la résolution de problèmes vis à vis des situations de la vie courante et de celles du monde professionnel.

Critique des finalités des mathématiques relatives aux trois cadres Algèbre, Gestion des données et Géométrie.

De toute évidence, les mathématiques sont investies d'un pouvoir non négligeable par la médiation de l'enseignant. A la lecture des finalités de cette matière, comment l'enseignant des mathématiques ne peut-il pas penser qu'à lui seul il forme le futur homme de demain ?

Certes en retenant l'expression « l'enseignement des mathématiques *peut* apporter une *contribution à*...»

Mais l'on pourrait se demander à quoi les mathématiques ne forment-elles pas ?

Etant donné les textes, les mathématiques sont omniprésentes dans la vie de tout un chacun. Elles favorisent l'épanouissement psychologique de l'enfant et développent son caractère social. Les mathématiques jouent un rôle culturel et veillent à le former moralement et politiquement. Il transparaît l'idée que les mathématiques sont presque érigées en école de formation humaine.

L'image renvoyant les mathématiques vers la science qui aurait pour vocation de faire accéder aux vérités éternelles et immuables n'est pas vraiment visible. Au contraire même, car le texte stipule, « les mathématiques, école de rigueur, sont aussi une discipline qui apprend à se poser des questions. Et répondre ne pourra résulter de pétitions de principe ou d'arguments d'autorité, mais obligera à énoncer ses présupposés, à justifier les traitements entrepris et les résultats atteints ». De sorte que le rôle de l'enseignant se définit plutôt vers celui qui consiste à mettre en évidence que les propositions tenues pour vraies ne le sont que dans le cadre de « présupposés » indispensables à énoncer : le professeur de mathématiques n'est donc pas le dépositaire du vrai « éternel », mais bien celui qui doit oeuvrer de manière à faire émerger que le vrai ne peut être que local et contextualisé.

En conséquence, dans l'énoncé officiel des finalités, ce sont des « valeurs intellectuelles » qui sont en jeu de manière très apparente dans un premier temps. Dire que les mathématiques doivent concourir à la formation du citoyen, c'est insister sur leur rôle de formation au jugement, au « jugement lié à l'intelligence » (qui se rapporte à une valeur intellectuelle), puisque selon O. Reboul, « m*ême quand j'affirme que deux et deux font quatre, je fais quelque chose, je juge, ou alors ma phrase n'est qu'un réflexe conditionné* » [188] . Effectivement, afin de donner une réponse correcte à cette opération il y a (même si l'acte de juger, sans être conditionné est automatisé) des notions mathématiques (renvoi à la valeur de type intellectuel) sous-jacente (notion de système de numération décimal de position) qui permettent d'émettre le résultat et l'essentiel n'est pas dans le quatre, mais dans le comment on obtient le quatre car *« le jugement désigne deux choses : un acte et la compétence à le produire ».* [189]

Mais les valeurs intellectuelles sont elles uniquement mises en jeu ?

Derrière le mot citoyen, il y a l'idée d'homme dans l'état, autrement dit, d'hommes confrontés à d'autres hommes donc il y a la dimension d'homme avec ses droits et ses devoirs et nous ne sommes plus dans le domaine de la logique (valeur de type intellectuelle) mais bien dans le champ de la morale : les mathématiques, comme discipline concourant à la formation « d'un jugement lié à la sagesse » cette fois ci, c'est-à-dire ce « *jugement* [qui] *n'est pas la science ; alors qu'elle porte sur le nécessaire et exclut toute délibération, lui porte sur le contingent, sur ce qui a une certaine chance de se produire. C'est pourquoi il ne se ramène jamais à une règle arbitraire : le jugement est toujours le fait d'un homme concret; il est le propre non de la médecine mais du médecin ; non de la loi, mais du juge, quand précisément le juge ne peut se contenter d'appliquer une loi trop lacunaire;* ou encore *(jugement) s'occupe du bien de l'homme ici et maintenant».* [190]

En conséquence, nous observons que les directives officielles prônent parallèlement la formation des deux types de jugements, ce qui en terme de valeurs, met en évidence la présence conjointe de l'intellectuel et de la morale ce qui fait apparaître la dépendance entre le vrai logique et le bien moral de l'homme (que l'on perçoit à travers les finalités politique et morale, sociale, culturelle ci-dessus).

Reste un certain nombre de questions : la corrélation entre la logique et la morale tient elle ? De quelle(s) façon(s) dans les faits, c'est-à-dire dans son enseignement, le professeur de mathématiques peut-il la favoriser ? Est-ce illusoire d'aspirer à développer, à travers l'une (en général, la valeur du vrai logique) l'autre (une valeur morale le vrai bien)?

Ce questionnement n'est pas innocent puisqu'il apparaîtra en filigrane lors de nos

[188] REBOUL O. - *Les valeurs de l'éducation* - Edition P U F - 1992 - p. 173.

[189] REBOUL O. ibidem . p . 173.

[190] REBOUL O. opus cit. p. 175.

perspectives didactiques ultérieures en méditant sur « *l'éducateur peut enseigner des règles, mais abstraites et négatives ; s'il prétend programmer les actes il tombe dans le conditionnement. Ces remarques valent finalement pour toutes les valeurs de l'enseignement, depuis l'exploit sportif jusqu'au style et à l'argumentation. Elles laissent penser que les valeurs de l'éducation ne sont en rien des « objectifs » au sens technique du terme ; des conduites qu'on pourrait prévoir et évaluer, utiles peut être en tant que valeurs intermédiaires, mais destinées à disparaître. On ne peut programmer le goût esthétique, ni l'esprit critique , ni la conscience morale encore moins les évaluer comme on mesure un phénomène physique. Les valeurs auxquelles préparent l'éducation échappent à l'éducation dans la mesure même où elle atteint son but ».* [191]

Les méthodes : (valables pour les trois champs).

SIXIEME.

Une remarque, dès la première phrase, inscrite en dessous du titre explicitation des contenus : « Il est rappelé que le professeur a toute liberté dans l'organisation de son enseignement à condition que soient atteints les objectifs visés par le programme ». Ce qui explique en partie querien, dans les commentaires, ne transparaît sur ce point.

Aucune allusion à la situation problème, ni au travail de groupes ni à la progression spiralée. Seule figure la phrase « l'activité de recherche ne fait pas l'objet d'une rubrique particulière puisque constamment, elle doit sous entendre l'ensemble des travaux numériques », ce qui doit avoir un rôle vraisemblablement incitateur pour l'enseignant qui doit donc en déduire des scénarios adéquats.

Mais dans la rubrique « II - Organisation de l'enseignement » les directives officielles attirent l'attention de l'enseignant sur :

- « les dominantes de contenus et d'activités [...] qui permettent de réaliser la cohérence et la progression de l'enseignement [...] et d'éviter l'émiettement et de faciliter la bonne structuration des savoirs et des méthodes ».
- la nécessité de « faire fonctionner et autrement qu'en reprise ayant un caractère de révision, les notions et « outils » mathématiques antérieurement étudiés ; « de préciser les acquis ; et de coordonner les acquisitions diverses ».
- la question du sens des connaissances « à partir des questions qu'il [l'élève] se pose »les types d'activités « situations créant un problème dont la solution fera intervenir des outils » avec les spécifications suivantes « permettre un démarrage possible pour tous les élèves. Créer rapidement une situation assez riche pour provoquer des conjectures. Rendre possible la mise en jeu des outils prévus. Fournir aux élèves aussi souvent que possible des occasions de contrôle de leurs résultats [...] on y parvient, par exemple, en prévoyant divers cheminements qui permettent de fructueuses comparaisons ».
- « un moyen efficace pour faire admettre la nécessité d'un langage précis en passant

[191] REBOUL O . Opus cit. p. 35.

du « faire » au « faire - faire ».

- le travail personnel des élèves en classe ou à la maison est essentiel à leur formation : il a des fonctions variées.

Autrement dit, si l'on analyse en se référant à des concepts de didactique, on peut observer que l'enseignant reçoit un ensemble de consignes qui seraient des allusionsplus ou moins claires :

- à la transposition didactique
- à la perspective constructiviste
- à la situation problème
- au contrat didactique

CINQUIEME et QUATRIEME *.*

On note toujours la présence de la traditionnelle phrase : « Il est rappelé que le professeur a toute liberté dans l'organisation de son enseignement à condition que soient atteints les objectifs visés par le programme ».

Quelques allusions figurent cependant, marquant la nécessité d'une centration sur l'élève, invitant ainsi l'enseignant à « initier davantage à l'activité mathématique » ou encore à laisser leur place « aux activités expérimentales [...] qui permettent d'émettre des conjectures » de manière à « privilégier l'activité de l'élève ».

La phrase « il convient de ne pas multiplier les activités de technique pure » renforce l'idée que « la méthode d'enseignement » doit avoir pour visée, le sens. Le recours aux ordinateur et calculatrice est aussi de plus en plus fréquent dans les programmes : ces outils occupent dans les documents d'accompagnement une place importante, pour repenser l'activité mathématique de manière à ce que celle-ci s'insère dans d'autres domaines, pour que « l'enseignement des mathématiques participe notamment avec la technologie, à la formation générale des élèves, en les familiarisant avec les objets et les actions courantes comme la gestion des fichiers, la sauvegarde, l'impression ».

Un accent prononcé est visible au niveau du « rôle important des travaux individuels de rédaction ». Cette insistance, comme pour renforcer la centration sur l'élève dans l'entreprise éducative, comme pour signifier que pour apprendre, la passivité est à prohiber. L'activité de l'élève devant occuper une place centrale.

TROISIEME

La tonalité des propos est dans le prolongement des classes antérieures. L'accent est encore mis sur la poursuite des « études expérimentales en vue d'émettre des conjectures et de donner du sens aux définitions et théorèmes ». L'attention de l'enseignant est orientée vers la vigilance à mettre les élèves « en situation d'élaborer et de rédiger des démonstration ». On rappelle aussi au professeur de mathématiques qu'il doit privilégier «l'activité de l'élève» en sachant que l'enseignant jouit toujours autant de sa liberté pour organiser son programme du moment que les objectifs imposés sont atteints.

Critique relative aux « méthodes » dans les trois champs.

Cette étude nous renverrait vers la confrontation de l'enseignant à des préceptes d'ordre didactique que l'enseignant devrait décoder grâce à une analyse située sur le plan didactique et d'autant plus difficile à mettre en œuvre, à cause de l'exhortation à la liberté d'organiser son enseignement. Cela ne renforce t-il pas les auto représentations au sens de certitudes personnelles, quant à la manière d'organiser ses cours même si l'incitation à penser, non plus seulement l'enseignement mais l'apprentissage est bien réelle depuis la sixième ? Ce qui peut être critiquable, c'est le côté devinette de ladite exhortation : qu'entendre par activité de l'élève ? A quoi cela renvoie t-il pour l'enseignant ? A quelle(s) vérité(s) peut il adhérer à travers ces intitulés ? Invite t-on l'enseignant à penser l'organisation de la classe ?

Nous estimons que la notion de vrai en matière de méthode, n'émerge pas vraiment de la lecture des programmes que peut faire un enseignant pris dans son quotidien d'autant plus que le professeur de 1995, ayant une certaine expérience, a été confronté à un certain nombre de réformes, ce qui l'a rendu de plus en plus sceptique et de moins en moins vigilant vers l'évolution et de sa discipline et de la manière de construire du sens.

Autrement dit, ce ne sont pas les méthodes qui génèrent de la valeur à la notion de vrai (pour l'enseignant), au sens où O. Reboul l'entend, « *la valeur de la vérité, c'est qu'on est prêt à lui sacrifier non seulement ses habitudes et ses illusions les plus chères, mais, même s'il le faut, son désir de savoir* » [192] .

L'étude des contenus

NUMERIQUE et ALGEBRIQUE .

SIXIEME.

Le nombre est l'objet d'apprentissage privilégié. C'est comme si on retrouvait une espèce de culture du nombre ainsi que sa manipulation. Sur six thèmes, il y en a quatre qui se réfèrent exclusivement aux sens et pratiques opératoires .

Le nombre et son sens à travers « son placement sur une droite graduée » ou « la multiplication des décimaux » ou « le quotient de deux entiers » ou à travers des « procédés de calculs approchés » ou encore dans « l'ordre de grandeur d'un résultat ».

Le nombre retrouvant son statut ; non plus vu comme une écriture mais comme une entité possédant une réelle nature et fonction.

Le nombre et ses opérations en lien avec des situations concrètes telles que « problèmes d'échelle » ou « changements d'unités » .

Autour du nombre, on pressent un réseau de concepts (écart-rapport - égalité) [193]

[192] REBOUL O. opus cit p. 38 et 39.

dont la vocation est de donner du sens au nombre de manière à ce que les techniques ne soient pas abordées sans ce fondement préalable.

En ce qui concerne les équations, c'est une « initiation » : l'algèbre tient une place timide.

CINQUIEME

Le renforcement du sens du nombre et des opérations qui s'y rapportent (selon leur «nature ») se poursuivent, avec un élargissement aux décimaux relatifs et aux nombres «en écriture fractionnaire» ; l'acquisition des priorités opératoires et la calculatrice comme outil favorisant une meilleure représentation du nombre sont toujours aussi présentes.

Le calcul littéral ne figure pas au programme : seul le numérique fait l'objet d'un approfondissement soutenu. « L'initiation à la résolution aux équations » de manière *très progressive* est fortement exigée.

QUATRIEME

On note toujours la prégnance du nombre et des opérations qui lui sont relatives avec un élargissement de leurs natures et de leurs formes (introduction de la notion de puissance).

L'usage de la calculatrice en lien avec le calcul approché et l'ordre de grandeur sont également aussi importants qu'en $6^{ième}$ et en $5^{ième}$.

L'introduction du calcul littéral se précise, même si l'enseignant est constamment sollicité à être très prudent : « l'apprentissage du calcul littéral doit être conduit très progressivement [...] et les situations proposées aux élèves doivent exclure toute virtuosité ».

TROISIEME

Nous sélectionnons quatre grands axes majeurs tous chapeautés par le fait que la démarche de résolution de problème reste centrale.

Nous déterminons donc successivement, l'axe conjecturer et démontrer aussi bien dans les champs géométrique, numérique qu'algébrique.

Puis l'axe calcul numérique en faisant ressortir trois points : établir une synthèse des nombres ; chercher à développer le sens d'un nombre par appréhension globale comme représentant une grandeur, une quantité ; être conscient qu'en mathématiques on ne travaille pas sur les grandeurs mais avec les grandeurs (même si la science mathématique s'est affranchie de la notion de grandeur pour construire le nombre).

Il y a aussi un troisième axe avec le traitement littéral avec l'accent sur la mise en formule, la mise en équation, et un travail sur l'égalité.

Enfin le dernier axe avec les statistiques où le travail sur la démarche s'avère cruciale : recueil de données ; choix des résumés de données ; exécution de calculs ;

[193] Notre lecture est fortement influencée par l'étude menée au sein de notre groupe de recherche du CEPEC à propos des fondamentaux (dont le dossier est en préparation et qui a bénéficié de communications au sein des colloques des IREM).

présentation des résultats ; critique et interprétation.

Critique des contenus numérique et algébrique.

Il semble, que si l'idée du vrai est présente, il s'agit en fait de la développer autour du nombre entité centrale autour de laquelle s'articule les contenus.

L'enseignant aurait à faire intégrer le vrai sur le nombre : sens, forme, utilisation. Il serait donc question d'un vrai portant sur un objet mathématique idéal (par nature).

Simplement on peut s'interroger sur ce que peut cacher cette volonté affichée dans les textes officiels, consistant à promouvoir cette « culture du nombre ». Quels seraient les enjeux de cette insistance ?

Nous en avançons quelques uns .

Développer une culture dont le primat serait basé sur l'aspect fonctionnel et non pas structurel des mathématiques, comme pour « *engager maître et élèves autour d'un quotidien »* [194] car « *la science grecque était géométrie, sa physique raisonnait, déduisait, mais ne calculait guère. Le calcul est de nos jours un fondement essentiel pour toutes les sciences mais aussi pour les techniques et l'activité économique » .* [195]

Ce point ne faisant que renforcer l'idée que là encore les mathématiques et l'idée du vrai sont au service du bien de l'homme social.

Ne peut-on pas voir également une volonté de préserver les apports du numérique vis à vis de la suprématie de la géométrie ? Rappelons nous « à *la fin du 18 ième siècle, la théorie des nombres n'est encore qu'un chemin de campagne, dont les grandes autoroutes mathématiques ignorent superbement les pâquerettes. Le premier historien moderne des mathématiques, Jean Etienne Montucla, peut encore écrire : « la géométrie est la clé générale et unique des mathématiques »* [196] *.*

Clin d'œil pour penser la prise en compte de la complexité de l'homme à travers celle précisément des mathématiques. L'accès au vrai serait-il spécifiquement l'apanage de la géométrie ? (ce qui tendrait à renforcer que le raisonnement serait également la spécificité de la géométrie ?).

L'étude concernant la terminologie.

SIXIEME.

« Cette partie du programme s'appuie principalement sur la résolution de problèmes ».

Hormis cette expression qui joue le rôle d'une injonction étant donné la place qu'elle occupe, il n'y en a pas vraiment d'autres qui apparaissent de manière significative.

[194] GOLDSTEIN C. - *L'un est l'autre : pour une histoire du cercle* - in *Eléments d'histoire des sciences* opus cit. p.136.

[195] BENOIT P. - *Calcul, algèbre et marchandise* in *Eléments d'histoire des sciences* opus cit. p.197.

[196] GOLDSTEIN C. - *Le métier des nombres au 17 ième et 19 ième siècle* in *Eléments d'histoire des sciences* opus cit. p. 292.

CINQUIEME ET QUATRIEME .

« Comme en 6$^{\text{ième}}$, la résolution de problèmes constitue l'objectif fondamental de cette partie du programme. Ces problèmes [...] renforcent le sens des opérations et des écritures numérique et littérale. Il convient donc de ne pas multiplier les activités de technique pure. Les programmes prévoient une initiation très progressive à la résolution d'équation de manière à éviter l'écueil connu d'apprentissages aboutissant à la mise en œuvre d'algorithmes dépourvus de véritable sens ».

On peut encore lire, dans le livret 3 plus particulièrement : « la forme irréductible de 5/100 ou 2/10 n'est ni à rechercher systématiquement, ni exigible » et encore « la maîtrise des techniques opératoires s'acquiert grâce à des activités, spécialement la résolution de problèmes [...] c'est alors que cette maîtrise prend sens [...]ce contexte permet de travailler le sens des opérations et de distinguer la nature des nombres manipulés ».

TROISIEME.

Au niveau du calcul numérique, le retour pressenti et progressif de l'arithmétique (qui avait été bannie des programmes) s'affirme de plus en plus et l'on peut lire « les problèmes posés à ce sujet [simplification de fractions] en 3$^{\text{ième}}$ sont l'occasion d'enrichir les connaissances des élèves en arithmétique ».

La poursuite de la connaissance du nombre s'intensifie avec l'apport de la « synthèse sur les nombres qui permet de donner un nouvel éclairage sur les nombres rationnels ». On note aussi l'invitation à « mettre en œuvre le principe d'appuis mutuels entre différentes parties du programme ». Dans le domaine littéral, on peut aussi lire « la pratique des tests sur les égalités et inégalités aide à comprendre [...] » ou encore « il convient d'être attentif, avec les élèves, aux questions soulevées par le domaine d'adéquation du modèle mathématique avec la situation traitée » et enfin « en classe de 3ième il s'agit d'aider les élèves à franchir une nouvelle étape dans leur autonomie de jugement ».

CRITIQUE CONCERNANT LA TERMINOLOGIE DANS LE CHAMP NUMÉRIQUE ET ALGÉBRIQUE.

Le vrai auquel on demande à l'enseignant d'adhérer est de prendre en compte comme paradigme de l'enseignement / apprentissage, la notion de sens. Appliquer des techniques qui tournent à vide (entendre par là, non au service de la résolution de problème) va à l'encontre des finalités de l'enseignement des mathématiques ; utiliser des notions sans en connaître le sens a peu d'intérêt car peu formateur.

En outre, il existe une mise en garde claire qui rappelle à l'enseignant que sa « mission » est de faire émerger « l'homo faber » ce qui nous reporte à des questions d'éthique. L'acte d'éduquer en mathématiques passant à travers la manière dont sont abordés les concepts et les techniques. Accentuation de l'idée que ce qui importe, ce n'est pas le produit lui-même, mais c'est le processus, comme en témoigne les propos de Bachelard cité par O. Reboul.*« On n'enseigne pas les sciences comme une* *concaténation de vérités lumineuses ; il faut que l'élève passe par l'expérience psychologique de l'erreur humaine »* [197] .

Nous avançons également que défendre la perspective du sens, c'est aussi penser que le professeur de mathématiques doit faire accéder à une culture mathématiques et pas seulement à leur enseignement car « [...] *on sait bien que les disciplines scolaires sont le résultat de compromis entre des logiques diverses : épistémologiques (à quelle structure de la discipline emprunte t-on ?), sociales (quels choix de contenus fait-on en fonction de l'usage futur présupposé que l 'on en attend ? parfois aucun d'ailleurs), psychologiques (suppose t-on que tel contenu est plus simple, plus facile d'appropriation que tel autre), pédagogiques (quel matériel, quelle organisation scolaire sera à instituer), dont l'histoire reste à faire »* [198] .

GEOMETRIE.

Contenus.

SIXIEME.

Des grands axes se dégagent autour des notions de :

- dessin/figure (« représenter, décrire, construire » dans le plan et dans l'espace)
- configurations géométriques/transformations (propriétés, propriétés caractéristiques relatives aux quadrilatères élémentaires)
- comparer et mesurer (« à l'aide de reports, de décompositions, de découpages et recollements quadrillages et encadrements dans le plan »).
- construire un formulaire pour l'utiliser (et non pas, d'abord, utiliser un formulaire sans au préalable l'avoir construit).

Il s'agit donc d'axer le travail de manière à construire du sens autour d'une transformation (la symétrie orthogonale) et d'utiliser ses propriétés comme moyens de revisiter les figures, ce qui permet de travailler la modélisation.

Les appels nombreux à la construction « d'images mentales » accentuent l'idée de la nécessité de bien faire comprendre les différences entre dessin et figure et peuvent s'interpréter comme une incitation à passer en douceur du voir, au lire pour prouver une existence. Un quadrilatère ne sera identifié comme carré qu'à partir du moment où l'élève lira des propriétés caractéristiques codées qui lui permettront de déduire que c'est un carré ; il dépassera le mode de l'observé (non valide pour atteindre le vrai de la conclusion) à celui du raisonné.

CINQUIEME.

[197] REBOUL O. opus cit. p.42.

[198] DEVELAY M. - *Savoirs scolaires et didactiques des disciplines* - Edition E S F - 1995 - p.354.

Poursuite des grands axes mis en évidence en 6^{ième} sur des « objets » ou concepts soit nouveaux (ou approfondis) par rapport à la sixième, soit en prolongement avec eux.

Le calcul des aires et volumes résultant davantage de l'application de formules que de manipulations visant à en donner une valeur plus ou moins approchée (sous-entendant l'hypothèse qu'en 5^{ième} l'élève a compris le sens de la notion d'aire et de volume).Le parallélogramme et la symétrie centrale étant des points forts du programme.

QUATRIEME.

« La représentation d'objets géométriques usuels du plan et de l'espace, le calcul des grandeurs attaché à des objets » demeurent des objectifs majeurs en complète continuation des programmes de 6^{ième} et 5^{ième}.

Il y a cependant une amorce de transformation dans la visée d'utilisation de certaines notions découvertes dans les classes antérieures, en ce sens qu'elles acquièrent un nouveau statut : celui d'objet, au sens de R. Douady « *notions et théorèmes mathématiques sont décontextualisés, dépersonnalisés, et a- temporels* [199] » c'est-à-dire que

ces notions sont au service (même si c'est en douceur) de l'idée de démonstration ; « la symétrie centrale et les propriétés caractéristiques du parallélogramme permettent de démontrer ces théorèmes » ; certaines notions sont elles-mêmes l'enjeu de démonstrations qui les fondent : « certaines de ces propriétés de concours (bissectrice, hauteurs...) pourront être démontrées ».

Il semble que la liaison géométrie/arithmétique soit plus particulièrement significative dans ce programme de 4^{ième} par le biais du théorème de Pythagore. Utilisation des puissances et support à l'étude de la notion d'écart et de valeur approchée d'où son renforcement par rapport à la construction du nombre (sous l'angle de la nature et du sens entre les nombres). Ainsi que par le biais de l'utilisation de formules et en lien avec les théorèmes de Thalès et de Pythagore, qui permettent d'aborder le sens de « formule - équation - égalité ».

TROISIEME.

« Les activités de conjecture, d'expérimentation et de démonstration sont poursuivies » ainsi que l'entraînement à « élaborer et à rédiger des démonstrations » avec une mention nouvelle en 3^{ième} en la référence à « des raisonnements prenant clairement appui sur le principe de non contradiction ».

La liaison entre les domaines géométrique et numérique est très encouragée.

A partir de l'espace, reconnaître des figures planes est un des objectifs à atteindre ajouté au « travail [qui] s'appuie sur diverses perceptions des solides étudiés en collège [pour] permettre de les renforcer voire de les construire » ; la maîtrise des situations de

[199] DOUADY R. - *Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir* - in Repères IREM n° 15 - Edition Topiques - Avril 1994 - p.39.

parallélisme et d'orthogonalité occupent également une place importante en construisant des images mentales et en les exploitant à partir du parallélépipède rectangle rencontré depuis la sixième (le solide typique de 3^{ième} étant la sphère).

L'étude des transformations du plan se poursuit (avec l'arrivée de la rotation) de manière à ce que l'élève en fin de 3^{ième} ait à sa disposition des moyens de repérer les éléments de symétrie et d'invariance dans les triangles et polygones réguliers dans l'optique d'ouvertures culturelles avec « l'observation de l'environnement naturel, architectural... ».

CRITIQUE EN RÉFÉRENCE AUX CONTENUS GÉOMÉTRIQUES.

Comment émerge l'idée du vrai à travers les contenus géométriques ?

Sous une forme pragmatique : entraîner l'élève à se familiariser avec des notions auxquelles il peut avoir recours dans la vie courante de manière à ce qu'elles puissent avoir un statut opérationnel (allusion au travail sur les grandeurs par exemple). Et conjointement sous une forme « abstraite », entraîner l'élève à modéliser, c'est-à-dire reconnaître dans des notions leur statut d'idéalité, donc de vérité « pure » et cela très tôt, dès la sixième. Un carré n'existe pas concrètement et pourtant il a bien une existence mathématique. La question du vrai à laquelle est confronté l'élève (par le biais de l'enseignant) touche à la nature même des objets mathématiques. Il découvre que quelque chose peut exister en mathématiques (donc être vrai) sans avoir une existence tangible, sans être réel au sens palpable tout en pouvant dans le même temps être représenté. L'enseignant se retrouve donc au prise avec le vrai associé au réel construit, dès la sixième.

Mais, il semble qu'une volonté « *d'arithmétiser » la géométrie prenne corps au fur et à mesure où l'on avance au collège afin d'orienter vers l'idée « de la remise en cause des évidences géométriques et la recherche de fondements plus rigoureux par une arithmétisation qui fonde les mathématiques sur le nombre et non plus sur la géométrie* » [200] . La question du vrai s'en trouvant particulièrement interpellée puisque la volonté institutionnelle (les concepteurs de programmes) marque son souci de fonder les mathématiques à enseigner sur un vrai moins intuitif que « les évidences géométriques » mais plus « rigoureux » (entendre plus vraie ?).

Et pourtant, la géométrie conserve dans le même temps un poids certain dans l'enseignement .La « logique des contenus en géométrie » peut se traduire par la mise en évidence d'une hiérarchie de ces derniers (exemples : une transformation par niveau ; des configurations typiques prégnantes à chaque niveau ; un objet de plus en plus complexe dans l'espace à chaque niveau entre la 6^{ième} et la 3^{ième}) ; ainsi que par les exhortations à faire des liens entre les connaissances des divers niveaux. Cette logique (des contenus à enseigner) serait-elle révélatrice d'une aspiration à ce que les savoirs soient articulés de manière à ébaucher une idée de cohérence interne aux programmes ?

Là encore, apparaît cette préoccupation de l'idée du vrai.

[200] ARSAC G. - *Les limites d'un enseignement déductif de la géométrie* - in Petit x n° 47 - IREM de Grenoble - 1997 - 1998. p.12

La géométrie participerait-elle alors à « l'œuvre » de l'école consistant à « *forme[r] des hommes capables de juger, de prendre un parti critique et raisonnable là où le mécanisme des preuves ne suffit plus [?] »* [201] . Oui, c'est cela la géométrie gardienne du temple de la démonstration. La géométrie comme lieu de prédilection pour prouver. Mais quelle géométrie promouvoir ? Celle qu'Alain résumait à « l*a géométrie est la clef de la nature ». « Elle est en effet cette culture de l'entendement, sans laquelle aucune science ne serait possible. On pourrait penser qu'elle est purement intellectuelle et s'adresse à l'entendement pur ; mais Alain nous la décrit comme ce qui nous délivre de certains préjugés, de certaines passions qui nous empêchent de percevoir le monde, de régler notre esprit selon l'objet. Surtout, elle est pour lui un enseignement qualitatif dont le but n'est pas d'apprendre beaucoup mais de comprendre* [...] *La « bonne science », n'est pas celle qui fait des miracles incompréhensibles au peuple, c'est celle qui permet à tous de comprendre l'essentiel et de juger sans préjugés »* [202] .

Nous mettons à nouveau en évidence qu'à travers la géométrie, c'est une valeur de type intellectuelle avec des accents humanistes, que l'on cherche à « revendiquer ». En faisant le pari que si l'enseignant de mathématiques veille à définir une telle visée ici et maintenant, c'est pour que dans l'avenir émerge un futur homme capable de « juger », donc en mesure d'accéder aux vérités et donc de comprendre son environnement [203] . A travers le vrai, (au sens du juste logique par le biais de la démonstration) on viserait le bien, (comprendre ce qui nous entoure étant fort sécurisant) puisque *« le vrai est une valeur parce qu'il s'oppose au mensonge qui est le mal* » [204] . Cet aspect étant particulièrement visible dans les propos précédents d'Alain. Autrement dit, la géométrie apparaîtrait comme une espèce de caution dans le devenir humain puisque très formatrice sur les plans intellectuel et moral.

Une question se pose, dans quelle mesure ces contenus contribuent-ils à développer ces valeurs ? Le contenu en soi génère t-il des capacités cognitives, intellectuelles et morales ? Et si nous suivons la pensée de G. Arsac, quelle résonance cette volonté d'arithmétiser la géométrie aurait-elle en regard de la question du vrai dans l'enseignement ?

L'étude sur la terminologie.

SIXIEME.

Les textes comprennent les termes faisant référence à la liste suivante :

[201] REBOUL O. opus cit. p. 177.

[202] Ibidem p. 178.

[203] Connaissance fidéiste comme le relève R. Boudon car « *je sais bien que telle théorie repose sur des principes indémontrables, mais ces principes me paraissent solides, je tiens les conséquences tirées de la théorie en question comme certaines parce que j'ai foi dans les principes qui la fondent ».* In - *Le sens des valeurs* - Edition PUF - 1999. p23.

[204] Ibidem p. 36.

- construire/reproduire : vocabulaire relatif à des travaux pratiques (tracer, reproduire, reporter ; manipuler).
- représenter/ en lien avec construire.
- utiliser: le vocabulaire ; un formulaire ; l'outil informatique.
- calculer.
- allusion « aux courtes séquences déductives ».

CINQUIEME .

Nous classons les groupes de mots en quatre familles :

- Fabriquer - construire - reproduire.
- Connaître et utiliser ; relier des propriétés.
- Calculer.
- Séquences déductives.

QUATRIEME.

En procédant de la même manière nous aboutissons à :

- Construire.
- Savoir - connaître et utiliser.
- Calculer.
- Caractériser.
- Démontrer

TROISIEME.

- Calculer.
- Connaître et utiliser.
- Construire.
- Représenter.
- Démontrer .

CRITIQUE SUR LA TERMINOLOGIE EN GÉOMÉTRIE .

On observe une harmonie et une cohérence interne des programmes de géométrie de la $6^{ième}$ à la $3^{ième}$. Construire pour connaître, afin d'utiliser, soit pour calculer ou pour « démontrer », bien que ce vocable ne soit pas expliciter nominativement dans les compétences exigibles en $3^{ième}$(alors qu'il est très prégnant dans les commentaires de programmes).

Ce schéma là décrirait les critères de la scientificité géométrique, et à constater l'insistance des programmes à les exhorter durant quatre années, nous pourrions nous demander quels sont les intérêts ou les valeurs qui seraient cachés sous cette optique ? Quel message voudrait transmettre la noosphère aux enseignants chargés à leur tour de le transmettre aux élèves ?

Un élément est frappant, c'est la tiédeur des programmes de $6^{ième}$ devant la notion de preuve : « courtes séquences déductives ». Le qualificatif court, renverrait-il vers le débat « apprentissage développement », en ce sens que l'enfant ne serait encore pas assez « mûr » pour appréhender la démarche de raisonnement ? Auquel cas, cela sous entendrait une tendance quelque peu piagétienne de la part des concepteurs de programmes. L'enfant de $6^{ième}$ n'aurait pas atteint le stade formel. Ce défaut de structure bien construite ne lui permettrait pas de raisonner souvent. Mais nous y voyons une contradiction par rapport à ce que défendent les didacticiens des mathématiques, puisqu'ils prônent la situation problème qui elle, met en évidence une conception plutôt « vygotskyenne ». En effet, les scénarios pédagogiques répétés qui accompagnent la situation problème font largement appel certes, aux conflits cognitifs, mais la situation problème elle-même promeut l'idée de la zône proximale de développement [c'est un des critères de sa création] ; elle a aussi l'ambition de favoriser le passage de l'interpsychique à l'intrapsychique chez l'élève donc de viser à le rendre autonome.

Il semble que le raisonnement en mathématiques rappelle la méfiance relativement à l'enseignement de la philosophie, à une époque. Ne pas s'y entraîner trop tôt de peur... De peur d'émanciper trop tôt peut-être car « l*a philosophie se définit par une tradition de réflexion intellectuelle critique vis à vis des savoirs spontanés »* [205] *.* Et si les mathématiques renvoyaient à la même quête ?

En conséquence, ce qualificatif « court » est porteur à notre sens, d'une ambiguïté fâcheuse.

Quant au terme déductif, l'amalgame entre raisonnement et déduction est clair. C'est tout aussi ennuyeux puisqu'il induit l'idée que faire des mathématiques se résume à faire des déductions, entraînant potentiellement vers la « dérive algorithmique » chez l'enseignant qui peut mettre en place un enseignement basé uniquement sur des procédures.

Nous y voyons une autre déviance, celle qui entretiendrait l'idée qu'en mathématiques le vrai serait toujours accessible par une suite de déductions interposées ; transposée dans le domaine social, cela entretiendrait l'illusion qu'il suffit d'agir de la sorte afin de trouver et d'ériger des vérités ; autrement dit, on arriverait grâce à ce type de certitude (raisonner c'est déduire) à développer une attitude dogmatique qui est à l'opposé de la pensée scientifique.

GESTION DES DONNEES.

[205] FOUREZ G. - opus cit. p. 12.

Contenus.

SIXIEME.

Essentiellement basés sur des calculs de pourcentages, de périmètres et d'aires .

- Etude de situations relevant du modèle proportionnel ou non .
- Compréhension de la notion de fonction.
- Lecture de graphiques .

Cet ensemble résume assez fidèlement ce vers quoi l'enseignant est supposé travailler.

CINQUIEME .

Le programme des réjouissances qui attendent élèves et enseignants se compose à la fois de lecture, interprétation, représentations graphiques de séries statistiques (introduction de la fréquence qui sert de médiation pour approfondir le nombre sous l'angle de ses représentations), que de l'étude des fonctions (jamais sons l'angle définition mais sous forme d'exemples).La mise en œuvre de la proportionnalité figure tout aussi en bonne place (combinaison d'unités, calculs d'échelle, reconnaissance d'un mouvement uniforme ...etc). Les activités graphiques sont toujours présentes : repérage sur une droite graduée et dans le plan.

QUATRIEME .

Les approches se consolident concernant la proportionnalité avec une caractérisation graphique et la poursuite de sa mise en œuvre .

Les statistiques incitent à interpréter des situations grâce à des nouveaux outils : effectifs et fréquences cumulés ; calculer des moyennes pondérées ; initier aux tableurs grapheurs.

TROISIEME.

Il s'agit de prolonger les acquis des classes antérieures en apportant des nuances quant aux limites des indicateurs comme la moyenne pour analyser une situation. L'introduction de la médiane va alors dans ce sens mais l'optique principale consiste à faire comprendre aux élèves que moyenne et médiane sont deux indicateurs de la tendance centrale d'une population mais que néanmoins ils perdent beaucoup d'information tous deux.

L'utilisation du tableur grapheur est encore recommandée et l'enseignement des statistiques, outre le fait qu'il contribue à intensifier l'autonomie des élèves face à des informations nombreuses qu'il peut être amené à gérer, « contribue au développement des compétences en mathématiques notamment celles liées au calcul et à la construction, la lecture et l'utilisation des graphiques ».

Critique des contenus de la gestion des données.

C'est la partie qui pourrait s'intituler « les mathématiques sociales ». Donner les moyens à l'élève d'appréhender des phénomènes auxquels les médias le confrontent et de saisir le sens de son quotidien. Débusquer le vrai du faux . La prégnance d'informations, (sous toutes les formes), empruntant aux statistiques, nécessite que l'on éduque au traitement de l'information, afin que l'élève exerce sa vigilance de manière à ce qu'il soit en mesure de porter un regard critique sur ce qui envahit son propre univers. C'est un champ qui s'avère porteur pour « l'éducation à la citoyenneté » et par là - même, qui permet de cerner une vérité « objectivement » au sens de Fourez.

Il semble que dans ce champ, la « dialectique outil / objet » soit particulièrement mise en évidence, puisqu'on sent bien le message des concepteurs des programmes adressés aux enseignants, à savoir, faire en sorte que les élèves aient « *la disponibilité fonctionnelle de certaines notions et théorèmes mathématiques pour résoudre des problèmes, interpréter de nouvelles questions* [...]. *Les outils sont inscrits dans un contexte, sous l'action de quelqu'un (ou d'un groupe) à un moment donné. Les situations ou les problèmes dans lesquels évoluent les notions mathématiques sont générateurs de sens pour ces notions ».* [206] Mais si l'on veut faire un lien avec d'autres disciplines il faudra qu'il y ait « *capitalisation du savoir »* c'est-à-dire que les notions abordées aient aussi un « *statut d'objet* ».

Terminologie relativement à la gestion des données.

Dans les quatre niveaux beaucoup de verbes qui renvoient à des actions comme placer ; appliquer ; effectuer ; compléter ; utiliser ; présenter .

Insistance sur les liens qui doivent exister entre les contenus traités à l'intérieur de ce champ : « les trois parties de cette rubrique [gestion des données] s'éclairent et se complètent mutuellement » ; des expressions comme « l'analyse critique » rappelle une des finalités des mathématiques ; le souci de rendre les mathématiques applicables à d'autres domaines est clairement explicité : « les travaux correspondants [à la description d'une situation], ne peuvent se concevoir qu'à partir d'exemples et en liaison,

chaque fois qu'il est possible, avec l'enseignement des autres disciplines ».

Critique de la terminologie.

La première consiste à faire remarquer que dans ce champ, les connaissances de type déclaratif sont aux côtés des connaissances de type plutôt procédural, d'une manière relativement évidente.

La deuxième, pour souligner le rôle à nouveau social que les mathématiques doivent remplir, leur conférant plus particulièrement la tendance mathématiques appliquées. Mathématiques, au service de l'interprétation de phénomènes humains. D'où la nécessité d'établir des ponts avec les autres disciplines ce qui n'est pas sans rappeler le côté universel que d'aucuns prêtent à cette matière, en sous entendant que les mathématiques, en tant qu'outil, participent à la quête du vrai.

[206] DOUADY R. opus cit. p.38.

3. Synthèse de l'étude critique relative aux programmes.

Tout au long de l'étude présentée nous avons évoqué l'idée du vrai sous deux aspects. Alternativement, « les vérités » auxquelles les enseignants étaient confrontées lorsqu'il s'agissait de la prise en compte, dans leur enseignement, des programmes officiels de mathématiques. Et les caractéristiques de l'idée du vrai qui étaient véhiculées au travers desdits programmes de mathématiques.

Nous avons décidé de cadrer cette synthèse critique en reprenant des critères d'analyse que nous nous sommes donnée depuis le début de cette étude (finalités ; méthode ; contenus). Puis, autour des programmes de 1995 à 2000 pour en faire ressortir les points d'achoppement en regard de l'enseignement de l'idée du vrai.

Du point de vue des finalités il demeure une vérité tenace, celle qui consiste à mettre l'accent sur l'importance que joue les mathématiques dans la formation humaine. A travers la logique, agir sur le cœur et sur le sens moral du futur homme qui germe en l'élève. Les mathématiques sont investies d'un pouvoir éducatif évident, mais ce qui pointe fort au niveau des programmes entre 1995 et 2000 c'est l'insistance à développer le versant « se poser des questions » associé à l'impératif que les réponses ne doivent pas résulter de « pétitions de principes ou émaner d'un argument d'autorité ». Sans doute la dimension citoyenne prend-elle le pas sur la dimension plus morale. Cela retentit sur l'enseignement de l'idée du vrai puisque en filigrane l'on sent poindre la nécessité de faire apparaître que le vrai soit fondé. D'où les exhortations à énoncer les présupposés, à justifier les traitements entrepris et les résultats atteints.

Sur le plan des méthodes, l'entrée de la didactique est prégnante, car les allusions à la situation problème sont marquantes. Nous pensons que l'idée du vrai commence à se problématiser en se détachant de son caractère d'évidence ou de limpidité d'autant plus si l'on se réfère à la terminologie qui elle, fait apparaître que le vrai ne s'obtient pas de façon si naturelle que cela. En statistique par exemple, pour faire émerger le vrai il faut parfois se déjouer des pièges de certains indicateurs.

Mais qu'en est-il de l'enseignement de l'idée du vrai qui transparaît au travers des contenus ?

A travers les programmes de 1995 se dégage une tonalité. Prohiber la technicité pure dans les calculs ; éviter l'écueil de la mise en œuvre algorithmique dépourvue de sens, ôter toute idée d'entraînement à la virtuosité mécanique induisent qu'il faille se pencher encore une fois, vers la piste des fondements des règles. Ce qui interpelle à nouveau l'idée du vrai : le vrai commence à être dépourvu d'une sorte d'automatisation. On constate que l'idée du vrai est principalement véhiculée par l'initiation à la preuve qui devient une préoccupation pressante plus à partir de la classe de quatrième. L'idée du vrai est alors traitée à travers un objet idéal. Elle est en quelque sorte outillée. Là encore il y a un retentissement sur l'idée du vrai. Est entretenue la vision qu'elle découle de la preuve et qu'à partir de là il n'y a plus de question à se poser.

Et bien précisément, le débat n'est pas clos.

Sylvain* [207] *: ...j'ai regardé « Bouillon de culture » qui est passé vendredi dernier.

C'était sur les chiffres et les nombres. Ça j'aime bien. J'ai trouvé qu'il représentait pas le stéréotype que je me fais de la personne qui aime les maths [il s'agissait de G. Ifrah]. C'est-à-dire, c'est une personne qui a une trajectoire tout droite et toute tracée, qui ne fera jamais de détours. Trajectoire sociale. Pour moi. Ça plus ça égale ça alors ça plus ça égale ça. P. T : Finalement cette rationalité. Sylvain : Pour moi, c'est des oeillères. Tous les profs que j'ai eus dans le secondaire, j'avais vraiment l'impression, qu'ils avaient des oeillères et que...Parce qu'ils étaient trop logiques. C'était trop que ça égale ça et puis c'est comme ça. J'en fais un beau théorème et c'est tout. Et si je prends un contre exemple et bien non c'est pas bon. Ils refusent en bloc ce que je vais dire et...Par exemple, j'ai mon beau frère et bien lui, il est très mathématicien, très logique et j'ai souvent des discussions houleuses avec lui parce que c'est toujours la même chose : 1 et 1 c'est toujours 2 et ça ne sera jamais trois, ça sera jamais 6, ça sera jamais 12. Je veux bien que 1 et 1 ça fasse deux, mais dans la vie, c'est pas si simple. Il se réfugie derrière ça, cette idée de logique. Pour moi c'est très compliqué la logique. Ça leur sert de rempart, de bouclier. P. T : Qu'est-ce qui vous gêne le plus. Est-ce que c'est ce discours sur la vérité...C'est le fait que ce soit valorisant... Sylvain : Oui ça, ça m'embête [...] Que les gens se servent des mathématiques pour se valoriser et se mettre au-dessus des gens, ça je trouve ça aberrant. C'est pas parce qu'on fait des maths, qu'on a forcément la vérité, qu'on est forcément mieux que les littéraires. Qu'on a forcément un esprit plus logique, plus concis.

De l'émergence de contradictions internes aux programmes.

De la carence épistémologique des programmes : un fléau pour l'enseignement de l'idée du vrai.

Nous ne discuterons pas du parti pris des programmes à considérer le nombre comme entité centrale autour de laquelle sont organisés les contenus : là n'est pas notre objet.

Mais en regard de notre étude, ce qui nous intéresse est de penser dans quelle mesure ces programmes (numérique et algébrique) peuvent contribuer ou non à développer un enseignement autour de la question du vrai en mathématiques et c'est là que nous remarquons qu'il existe plusieurs obstacles qui sont autant de contradictions internes par rapport aux finalités accordées à l'enseignement des mathématiques.

Nous en détectons au moins trois.

Un premier obstacle.

A notre sens, il semble bien que le rôle que l'on fasse jouer au nombre, rôle que nous qualifions de nombre outil, soit une occasion manquée pour travailler l'idée du vrai. De la sixième à la troisième le nombre n'est pas un instrument conceptuel mais une notion banalisée qui doit servir surtout à effectuer des calculs (que la mise en garde contre tout

[207] ***TRABAL P. - La violence de l'enseignement des mathématiques et des sciences - Edition l'Harmattan - 1997 - p. 160 et 161.***

virtuosité n'atténue pas).

Considérer le nombre du point de vue d'un outillage conceptuel contribuerait, pour nous, à ce qu'il soit au service d'un enseignement de l'idée du vrai. Nulle part dans les programmes existe la recommandation d'étudier par exemple la difficulté qu'ont eu les nombres négatifs à émerger. Rien non plus du côté du problème de l'irrationalité en dehors du fait qu'à peu près tous les élèves de troisième sont plus ou moins capables de répondre par cœur (ou de calculer) que la diagonale d'un carré de côté 1 est racine de deux , qu'en reste t-il du point de vue épistémologique ? Rien encore en ce qui concerne le problème de l'infini auquel les élèves de sixième sont déjà confrontés (quand on aborde des questions tel que : citer les nombres compris entre 2,43 et 2,44). Et pourtant ces exemples sont autant d'occasions manquées pour une ouverture progressive (de la sixième à la troisième) sur la question du vrai. Les programmes promeuvent l'idée de certitude au détriment de celle du doute ou de l'indécidable.

Un deuxième obstacle.

Il s'agit de la liaison tenace qu'entretiennent les programmes entre vrai et preuve : cela contribue à renforcer que le vrai est toujours accessible puisqu'au bout de la preuve. Donc cela favorise l'idée de l'existence du vrai (toujours ; en soi ; malgré tout) en même temps que cela évite de penser la notion de preuve sous l'angle épistémologique en particulier (un incontournable d'après E. Barbin). L'idée du vrai est associée à l'illusion du possible accès à la cohérence.

Troisième obstacle.

Nous pensons que les programmes font l'impasse sur un enseignement de l'idée du vrai au profit d'un développement de l'usage du vrai sous l'angle utilitariste à travers l'exercice de la preuve : entraîner les élèves à prouver ne les renseigne en rien sur les spécificités du vrai en mathématiques. On privilégie là encore l'usage de l'outil au détriment de ce à quoi l'outil pourrait servir sur le plan conceptuel. On entretient l'idée que le vrai est au bout de l'exercice de la preuve et que son existence ne fait pas de doute.

Du passage de la logique mathématique à la formation du citoyen.

Actuellement, il ressort toujours que la liste des vertus des mathématiques est longue, et l'idéal subsiste qu'à partir de son enseignement, l'on puisse forger des habitudes citoyennes. Il semble que nous ne sommes pas très loin de la foi dont était animé Durkheim et de l'espoir que nourrissait le sociologue *« de rêver d'une morale toute scientifique, ou plutôt d'espérer sauver la morale vacillante en lui conférant la solidité et l'autorité de la science. Mais la physique des moeurs n'est pas cette morale scientifique que certains ont rêver de créer dans la dernière moitié du XIXième siècle, cette science qui « mettrait les vérités morales au-dessus de toute contestation, comme elle a fait pour les théorèmes de mathématiques et les lois énoncés par les physiciens »* [208] *»* [209] *.* A la

[208] POINCARE H. - *La morale et la Science* - in Dernières pensées. Flammarion. 1913. p.221 cité par KERLAN A. in - *La science n'éduquera pas* - Edition Peter Lang. 1998. p.120.

nuance près, que dans les programmes actuels, le mot citoyenneté s'est largement substitué au mot moral, encore que comme le fait ressortir Alain Kerlan, Durkheim affirme que la morale débute avec le domaine social.

Au demeurant, il s'avère important de souligner que l'enseignement des mathématiques n'est pas seulement au service du développement de têtes bien pleines mais que les concepteurs de programmes ramènent immanquablement l'enseignant sur le terrain social et éthique. Simplement, l'interrogation reste soulevée quant à la cohérence entre les finalités (des mathématiques) déclinées et ce qui est véhiculé avec l'enseignement des contenus dont l'élaboration est supposée servir l'idéal visé. Car les programmes ne donnent à voir qu'une vision de l'idée du vrai : celle associée aux notions de déduction, d'accessibilité et de certitude qui ne font qu'accentuer l'idée que la vérité est absolue.

Parce que l'enseignement de l'idée du vrai ne se tourne pas assez vers les notions de doute et d'indécidabilité ; parce qu'il fait encore trop planer le spectre de l'illusoire accessibilité à la cohérence des mathématiques et qu'il développe par trop l'association entre vrai et preuve, nous postulons un changement de paradigme pour envisager l'enseignement de la question du vrai autrement.

Chapitre 2. D'une conception générale de l'apprentissage enseignement des mathématiques.

Le cadre théorique auquel nous rattachons notre démarche de recherche comprend deux volets, celui de la didactique des mathématiques et celui de la pédagogie. S'adjoignent l'épistémologie et la philosophie car nous soutenons que la représentation de l'idée du vrai est tout autant véhiculée par l'organisation didactique que pédagogique ; elles-mêmes guidées par la vision épistémologique de l'idée du vrai au sein des mathématiques associé à son retentissement philosophique.

Dit autrement, nous avançons qu'être attentif à un enseignement de l'idée du vrai nécessite que l'on prenne en compte les données précédemment explorées (quelles mathématiques enseigner ? quelle conception du vrai véhiculer ?) ainsi que les a priori didactique et pédagogique que nous exposons.

L'inscription dans le champ didactique, est directement liée à l'importance que nous accordons à l'analyse des contenus d'enseignement et à l'incidence de la spécificité des contenus sur l'acte d'enseignement/apprentissage, sans pour autant sous estimer l'impact sur l'acte d'enseigner de paramètres organisationnels et relationnels d'un autre ordre (c'est-à-dire scolaire) et qui appartiennent au deuxième volet de notre cadre théorique : la pédagogie.

Pour ce qui est de la didactique, nous nous référons à la caractérisation qu'en a fait Guy Brousseau après qu'il en ait jeté les bases comme « *science s'intéressant à la*

[209] KERLAN A. opus cit. p 120.

production et à la communication des connaissances mathématiques dans ce que cette production et cette communication ont de spécifique de ces connaissances. La didactique des mathématiques étudie la façon dont les connaissances sont créées, communiquées et employées pour la satisfaction des besoins des hommes vivant en société, et plus particulièrement : d'une part, les opérations essentielles de la diffusion des connaissances (théorie des situations didactiques), les conditions de leur existence et de leur diffusion (l'écologie des savoirs) et les transformations que cette diffusion produit, aussi bien sur ces connaissances (transposition didactique) que sur leurs utilisateurs (apprentissages, rapport au savoir) ; d'autre part, les institutions et les activités ayant pour objet de faciliter ces opérations ». [210] Ce dernier point ne fera pas parti de nos préoccupations.

La pédagogie entendue au sens d'une Pédagogique [211] autrement dit, un discours « scientifique ». En somme, une praxis c'est-à-dire une réflexion sur l'action qui prend donc comme objet, la situation éducative et se nourrit de l'action tout en la finalisant d'un point de vue théorique : la visée de ce discours, fondé sur la tradition pédagogique, pour contribuer au progrès des réalisations éducatives et non à leur dilution dans un magma d'activisme.

Notre cadre de référence articulera entre eux les concepts qui guident notre pensée et notre action relativement aux questions liées à la construction, à l'acquisition et au développement de la question du vrai chez les collégiens de 4$^{\text{ième}}$ et 3$^{\text{ième}}$.

Notre objectif est d'affiner nos cadres théorique et conceptuel afin de rendre compte de nos fondements théoriques associés à nos concepts fondateurs. En somme, exhumer le socle sur lequel repose notre recherche. Tisser cette toile de fond, sans laquelle le traitement de la question du vrai dans le cadre de l'enseignement des mathématiques au collège tel que nous le soutenons, n'aurait pas de sens.

1. Modèle constructiviste et interactionniste de Vygotsky et les conséquences qui en découlent.

« *Quand il se présente à la culture scientifique, l'esprit n'est jamais jeune. Il est même très vieux, car il a l'âge de ses préjugés. Accéder à la science, c'est spirituellement rajeunir, c'est accepter une mutation brusque qui doit contredire un passé* ». [212]

le modèle socio-constructiviste et interactionniste comme fondement de l'action didactique .

La défense de ce modèle, pour nous fondamental, ne relève pas d'une pure croyance émanant de l'air du temps mais s'enracine dans notre position par rapport à la problématique apprentissage et développement. De la dissociation que nous faisons entre

[210] BROUSSEAU G. - *Glossaire de didactique* - Inédit transmis à la 6$^{\text{ième}}$ école d'été de didactique des mathématiques .

[211] GILLET P. - *Pour une Pédagogique* - Thèse de doctorat en Sciences de l'Education - Edition PUF - 1987 .

[212] BACHELARD G. - *Formation de l'esprit scientifique* - Edition J. Vrin. 1938. p.14

savoirs et connaissances, associé au refus de la confusion entre enseignement et apprentissage.

A propos de la confusion entre enseignement et apprentissage.

Elle résulte d'un modèle qui considère que le savoir se transmet, qu'il se véhicule par l'intermédiaire des paroles de l'enseignant qui a à cœur de présenter un discours cohérent, précis et sans faille. Autrement dit, il suffirait que le discours s'énonce clairement pour qu'il se conçoive, dans l'esprit de l'élève, avec autant de limpidité. La limite du modèle relève de sa carence à expliquer les erreurs des élèves.

Ces représentations [213] erronées des élèves mettent donc en exergue que ce modèle de pure transmission des savoirs n'est pas tenable et il faut admettre que l'on ne peut pas faire l'impasse sur la genèse du rapport personnel au savoir chez l'élève.

Dès lors, c'est avancer que l'élève agit face au savoir au sens d'une activité d'auto appropriation ce qu'exprime clairement S. Joshua en déclarant que *« pour les constructivistes de toute obédience,[...] l'enfant s'approprie la nouvelle connaissance, en fonction de ses connaissances antérieures, parfois difficilement. Le résultat est bien une construction personnelle, voire idiosyncratique, dont la mise en correspondance avec les savoirs reconnus socialement est une entreprise toujours délicate. Mais ce travail est à l'origine même de la possibilité d'une décontextualisation, d'un transport à distance - aux risques et périls de l'enfant - de la connaissance transmise »* [214] .Par là-même, l'introduction de la différenciation entre savoirs et connaissances est justifiée. En effet, la dénomination des deux termes pointent cette notion de traitement de l'information par l'apprenant quand on fait référence à la connaissance et marque la dimension culturelle quant à la notion de savoir (entité incluant un socialement admis, au sens de savoir savant).

A partir des considérations précédentes, le lecteur peut comprendre pourquoi le modèle résultant de l'amalgame entre enseignement et apprentissage traduit par l'appellation « modèle empiriste » (empruntée à C. Margolinas [215] découlant de l'empirisme épistémologique de Piaget) ne peut recevoir notre assentiment et bien qu'il subsiste encore dans la noosphère, car il ne prend pas en compte l'activité de construction personnelle chez l'élève.

En conclusion, nous communiquons à ce sujet une citation éloquente de Steinbring

[213] Nous utilisons deux termes *conception ,représentation* indifféremment : il existe en effet des termes caractérisant les connaissances des élèves que bon nombre de chercheurs ont créés avec des appellations différentes tel que *« théorème en acte »* de Vergnaud ou encore *« modèle implicite »* de Brousseau ; sans doute recouvre t - il des réalités différentes , mais notre visée n'est pas d'éclaircir ces subtilités. Nous considérons les termes de *conceptions et représentations* au sens de connaissances présentes chez l'élève et non véhiculées directement par l'enseignant.

[214] JOSHUA S. - *Au delà des didactiques, le didactique. Débats autour des concepts fédérateurs* - Edition De Boeck.1996. p. 153

[215] Pour plus de détails consulter sa thèse - *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques* - Edition la pensée sauvage. 1993. p.102 et suite.

pour résumer notre pensée : « l*es bonnes intentions de nombreux enseignants de vouloir présenter le plus simplement possible et expliquer directement, la contrainte d'expliciter entièrement en classe le savoir sous toutes ses significations conduit à rétrograder complètement d'un savoir nouveau à acquérir à un savoir déjà connu et par là à ne plus rien apprendre de neuf. D'un point de vue épistémologique l'élaboration d'une authentique compréhension du concept est empêchée dans l'extrait de classe présenté par une interprétation empiriste du savoir et l'idée selon laquelle le sens d'un savoir nouveau doit découler entièrement de concepts fondamentaux déjà connus. Une autre conception de la nature épistémologique du savoir mathématique est nécessaire »* [216] *,* d'autant plus *« qu'enseigner c'est travailler le savoir pour induire dans un cadre institutionnel choisi un processus cognitif supportant l'apprentissage dont le produit fini sera en retour institué en savoir »* [217] *.*

Au sujet de l'hypothèse interactionniste.

D'une part, le processus de développement est conçu comme indépendant de celui de l'apprentissage, mais d'autre part ce même apprentissage, au cours duquel l'enfant acquiert toute une série de formes de comportement, est considéré comme coïncidant avec le développement ». [218] Exprimée d'une autre façon cette théorie poserait le principe qu'il y aurait une logique propre du développement tandis que les apprentissages apporteraient leur contribution à son égard.

Prolongeant cette conception Vygotsky avance le concept de « zône proximale de développement » qui nous permettra de clarifier ce que nous entendons par interactioniste .

Ce chercheur reprend à son compte le fait qu'il y ait bien une relation entre « un niveau donné de développement et la capacité potentielle d'apprentissage » mais l'originalité de sa pensée réside en fait dans la détermination de cet espace appelé « zône proximale de développement » compris entre deux niveaux de développement. Le premier niveau nommé l'âge mental chez l'enfant (caractérisé par sa capacité d'action autonome) et le second qui rendrait compte de sa capacité d'action *avec aide* ce qui implique que *« ce que l'enfant est en mesure de faire aujourd'hui à l'aide des adultes, il pourra l'accomplir seul demain. La zône proximale de développement nous aide ainsi à connaître les pas futurs de résultats déjà obtenus mais aussi ceux en voie d'acquisition [...] le point essentiel consiste en l'affirmation que les processus du développement ne coïncident pas avec ceux de l'apprentissage mais suivent ces derniers en donnant naissance à ce que nous avons défini comme zône proximale de développement »* [219] *.* En cela Vygotsky met en relief le rôle du milieu dans l'acte d'apprentissage comme

[216] STEINBRING H. - *Nature du savoir mathématique dans la pratique de l'enseignant* - in Laborde et Coll, Actes du premier colloque franco - allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique Edition La pensée sauvage . Grenoble . 1988. p. 311 et 312.

[217] ROUCHIER A. - *Recherches en didactique des mathématiques* - Edition La pensée sauvage . Grenoble 1996. p.194

[218] SCHNEUWLY B. et BRONCKART J. P. Vygotsky L. - *Textes de base en psychologie* - Edition Delachaux et Niestlé . 1985. p.99

déclencheur d'une évolution dans le développement. Avec l'emploi du mot milieu nous voulons signifier l'efficience de l'interaction des contextes aussi bien pédagogique (travaux de groupes ; confrontations des arguments avec l'Autre) que didactique car, en référence à nouveau à des propos de P. Meirieu « la didactique consiste à organiser des dispositifs construits sur des opérations mentales inscrites dans le processus de développement mais non encore actualisées ». Les dispositifs en question correspondant à la mise en place de situations didactiques, à l'intérieur desquelles l'aide des pairs s'organiserait pour permettre à l'enfant d'agir de façon autonome dans le futur (lors de situations non didactiques ou a-didactiques). Ainsi donc pourrions-nous schématiser la richesse de la pensée de Vygotsky de la façon suivante : l'enseignement provoqué (actions didactiques par exemple) greffé sur la zône proximale de développement favorise l'apprentissage pour déterminer le développement.

De ce choix du modèle constructiviste et interactionniste découle la nécessité de privilégier trois conséquences, contribuant à pointer le rôle important que vont jouer successivement, la théorie des situations fondamentales ; la notion d'obstacle ; le rôle du contrat didactique en regard du projet de dévolution et de contre dévolution.

Première conséquence: la prise en compte de la notion de situations fondamentales (Brousseau)

Cette théorie nous permet de préciser notre position par rapport à la vision que nous avons de l'élève, à propos du savoir à enseigner et du projet de dévolution. Elle est en cohérence avec la perspective socio-constructiviste à laquelle nous adhérons.

Au sujet de l'élève tout d'abord : elle postule que ce dernier peut être considéré comme un sujet épistémique c'est-à-dire capable de manifester une rationalité de type mathématique à condition que l'on lui donne les moyens de la mettre en œuvre.

C'est donc avancer a priori que tout élève cherche à s'engager dans un processus qui lui permettra de remettre en cause ses conceptions initiales quand elles sont erronées, sous réserve que les moyens lui en soient fournis. Prise en compte des représentations comme l'impose le modèle constructiviste et interactionniste.

Nous savons que cette théorie s'oppose à la théorie anthropologique de Chevallard quand il décrit que *« ...l'élève aura à « vérifier » (par des calculs numériques), l'enseignant « dégagera la loi générale littérale », puis l'élève « appliquera » cette loi à des cas particuliers (numériques, plus rarement partiellement littéraux), etc. La transgression des registres d'actes épistémologiques est rare... ».* [220] Autrement dit, il n'est pas reconnu dans

le rôle de l'élève que ce dernier puisse avoir une posture scientifique. Nous ne nions pas que ce modèle puisse être valide, au sein des pratiques. Mais notre choix théorique s'écarte de cette vision là et nous marquons notre distance.

[219] SCHNEUWLY B. et BRONCKART J. P. opus cit. p.109

[220] CHEVALLARD Y. - *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné* - Edition la Pensée sauvage. Grenoble .1991. p. 75

Nous entendons échapper à cette coutume didactique qui cantonne l'élève dans le rôle de simple exécutant qui ne lui permet pas de construire des connaissances, encore moins de les confronter. Nous tenons à mettre en relief que le modèle des situations fondamentales revient à la mise en situation de l'élève comme sujet épistémique. C'est postuler une distribution nouvelle des places de l'enseignant et de l'élève face à l'acte d'enseignement / apprentissage afin de définir de nouveaux registres d'actions. Registres

d'actions au service de la défense d'une visée émancipatrice du savoir qui tend à relier la compétence théorique (une autre appropriation de l'idée du vrai en mathématiques), les performances didactiques attendues (concernant la preuve et ses limites) et leurs retombées humaines (registre émancipatoire).

Les situations fondamentales invitent l'enseignant à soutenir une vigilance épistémologique, pour alimenter sa réflexion au sujet de ce qu'il enseigne et de ce qu'il croit enseigner et oriente vers une éthique du savoir qui consiste « *à étudier non seulement comment on peut enseigner des vérités socialement reconnues, mais aussi et surtout c'est découvrir des procédés qui permettent d'initier l'élève aux instruments de pensée qui donnent la possibilité aux hommes de mieux discerner sur quoi se fondent leurs vérités ; leur apprendre à « démonter » les discours type « langue de bois » bien sûr, mais aussi leur apprendre à déceler tous les processus d'opacification de la complexité qui se pratiquent de plus ou moins de bonne foi sous couvert de simplification, de clarté et d'efficacité* ». [221]

Deuxième conséquence : la notion d'obstacle

Examinons ce que cette notion de situation fondamentale sous entend au sujet du savoir à enseigner. Dire qu'elle entretient des proximités avec d'autres modèles comme la situation problème de Douady (d'où l'émergence du rôle de l'obstacle), ainsi qu'avec le modèle du débat scientifique en cours et aussi avec la théorie des champs conceptuels de Vergnaud oriente déjà la pensée.

En effet, le point commun essentiel vers lesquels tous ces modèles convergent est qu'il existe des situations cruciales (moyens) au cours desquelles il se construit des concepts mathématiques. La pensée de M. Legrand le renforce lorsqu'il se demande *« quelle mise en scène peut amener mes élèves (qui n'ont pas ma culture et qui ne savent pas comme je le sais, où l'on veut en venir) à se poser des questions scientifiques analogues à celles que je me pose maintenant ? Et s'ils ne se posent pas spontanément ces questions comment faire pour ne pas être obligé de leur découper et mâcher le travail jusqu'au point où, en vertu du contrat didactique ils n'auront plus de problème scientifique à résoudre ?* Tout en ayant à l'esprit que « l'*étude fondamentale nous indique jusqu'à quel point ils [désordres de la logique de la découverte, ces obstacles incontournables] peuvent être constitutifs du sens du savoir. La recherche des situations fondamentales nous conduit à trouver des moyens effectifs pour que les principaux obstacles puissent être abordés dans la classe et y être travaillés suffisamment longtemps pour que s'amorcent conceptualisation et prise de sens et que néanmoins le cours avance. »* [222]

[221] LEGRAND M. - *Recherche en Didactique des mathématiques* - Volume 16 / 2 . La problématique des situations fondamentales - Edition La pensée sauvage . Grenoble . 1996. p .257.

Dit autrement, avec la référence à la notion de situation fondamentale, la connaissance acquiert son statut épistémologique de savoir via la notion d'obstacle, au sein même d'un problème posé ; problème pris au sens de question vive à propos d'un savoir, où l'enjeu n'est pas du côté de l'appropriation d'une méthodologie de résolution mais du côté d'une instrumentation conceptuelle au service d'une résolution .

Troisième conséquence: le contrat didactique et le projet de dévolution.

D'après ce qui précède, on remarque que d'une part, il est possible d'enseigner des concepts mathématiques, et que d'autre part, la rencontre dans des situations dites cruciales est marquante grâce à l'induction forte entre situation et notion à acquérir sous

réserve d'une condition : à partir du moment où l'on favorise le projet de dévolution du savoir, car le postulat de la théorie des situations fondamentales est que le maître est un ordonnateur dans le projet de savoir. C'est lui qui a la possibilité de transmettre ce projet (via les situations cruciales) au moment où il le désire. Dans ce modèle, l'enseignant laisse - et encore seulement lorsqu'il en décide - à l'élève la charge d'apprendre: c'est l'acte de dévolution (en sachant par ailleurs que l'enseignant doit accepter les moments de contre-dévolution qui correspondent aux ruptures de contrat didactique de manière à « remettre sur orbite » l'élève, quand il le faut, pour prévenir la dissolution du projet de savoir). L'élève devient constructeur de ses connaissances.

Nous suivons Brousseau lorsqu'il déclare que *« nous savons que le seul moyen de faire des mathématiques c'est de chercher et résoudre certains problèmes spécifiques et, à ce propos, de poser de nouvelles questions. Le maître doit effectuer non la communication d'une connaissance mais la dévolution du bon problème. Si cette dévolution s'opère, l'élève entre dans le jeu et s'il finit par gagner, l'apprentissage s'opère »* [223] sachant que « *le contrat didactique met le professeur devant une véritable injonction paradoxale : tout ce qu'il entreprend pour faire produire à l'élève les comportements qu'il attend tend à priver ce dernier des conditions nécessaires à la compréhension et à l'apprentissage de la notion visée. Si le maître dit ce qu'il sait il ne peut plus l'obtenir. Le savoir et le projet d'enseigner vont devoir s'avancer sous le masque.* » [224]

La référence au modèle constructiviste et interactionniste nous permet donc de souligner la différenciation que nous faisons entre enseigner et apprendre pour mettre en exergue les rôles respectifs de l'enseignant, de l'élève et du savoir.

Elle clarifie également la distinction que nous accordons entre savoirs et connaissances. Elle positionne notre point de vue vis à vis de l'apprentissage et du développement. Elle fait ressortir notre attachement à la théorie des situations

[222] LEGRAND M. ibidem p. 234

[223] BROUSSEAU G. - *Recherches en didactique des mathématiques* - Volume 7 / 2 . Edition La pensée sauvage . Grenoble. 1986 . p. 52

[224] BROUSSEAU G. Ibidem p. 201

fondamentales, ainsi qu'aux implications qui en découlent à savoir : la prise en compte de la notion d'obstacle dans l'organisation des situations d'apprentissage et la tension qui existe entre le projet de dévolution / contre dévolution et le contrat didactique.

En d'autres termes, elle insiste sur le non primat d'un des pôles du triangle didactique. Le savoir, l'apprenant et l'enseignant jouent respectivement et conjointement les rôles principaux dans l'aventure de l'appropriation des savoirs.

En outre, il apparaît également que le paradoxe des Sophistes que l'on peut résumer par « on ne peut apprendre » trouve en effet une réponse car si « l'on ne sait pas » la situation cruciale permettra de se rendre compte qu'il faut mobiliser un savoir pour dépasser le « je ne sais pas » et dès lors il y aura une raison pour savoir ; et si « l'on sait » la notion d'obstacle viendra pour interroger la qualité de ladite connaissance et l'inciter à dépasser une connaissance ancienne qui ne serait plus tout à fait capable de résoudre un problème donc on n'apprendra pas « déjà ce que l'on sait ».

Enfin, la référence à ce modèle associé à ses trois conséquences établissent une position claire quant à la manière d'apprendre : *« la réalité ontologique ne se copie pas ! Les connaissances du sujet qui apprend ne sont pas comme un album de photo, une série de clichés, copies conformes du monde extérieur. C'est impossible. Le sujet qui apprend ne photographie pas le monde, il le reconstruit sans cesse en se construisant lui-même . Dans cette perspective, le savoir n'est pas transmissible passivement, il est construit par le sujet qui apprend. Ce postulat constructiviste a une incidence très importante sur nos réflexions à propos de l'enseignement et de l'apprentissage. Les premiers savoirs auxquels l'élève est confronté sont d'abord ses propres connaissances ».* [225]

2. Conception de l'idée du vrai dans l'enseignement des mathématiques telle que nous la défendons.

Cette conception est en réaction avec les instructions officielles qui, à notre sens invitent surtout à instrumentaliser l'idée du vrai au travers d'un travail essentiellement axé sur l'entraînement à la preuve. Ainsi traitée, l'idée du vrai est solidement associée à la production de la preuve et à la présentation dogmatique des principes de rationalité.

Nous soutenons un point de vue totalement absent des préoccupations officielles qui complète, sans l'exclure, le précédent : nécessité d'outiller conceptuellement les élèves à propos de l'idée du vrai au travers d'un enseignement qui dévoile une vision plus épistémologique de cette question. Penser son historicité, aborder les limites de la preuve, faire réfléchir les élèves sur les caractéristiques de l'idée du vrai en mathématiques. Eclairer le sens de la preuve et de son recours systématique en mathématiques.

En employant deux concepts à R. Douady [226] nous avançons qu'il faut conjointement traiter l'idée du vrai en tant que savoir outil (l'instrumentation) pour lui faire acquérir le

[225] JONNAERT P. VAN DER BORGHT C. - *Créer des conditions d'apprentissage Un cadre socio - constructiviste pour une formation didactique des enseignants* - Edition De Boeck . 1999. p. 23

statut de savoir objet : prendre l'idée du vrai comme objet d'enseignement en tant que tel (outillage conceptuel).

Première conséquence : notre vision du déplacement de l'enseignement de la preuve.

Institutionnellement parlant, si l'on s'interroge sur le référent de tout professeur de mathématiques, les instructions officielles tiennent la première place. Au chapitre précédent, nous avons analysé la forme et l'esprit de ces dernières en regard spécifiquement de l'objet qui nous concerne, c'est-à-dire la question de l'enseignement de l'idée du vrai et nous en avons pointé les contradictions internes.

Parmi les recommandations figurent deux options dont nous nous emparons. La première s'énonce ainsi : « poursuite du développement des capacités de découverte et de démonstration, mises en œuvre en particulier dans des situations non calculatoires » (pour la classe de $4^{\text{ième}}$).

Le mot poursuite oriente la pensée vers le fait que cette préoccupation à prouver se manifeste très tôt en collège. Certes dès la sixième, l'introduction à l'entraînement au raisonnement déductif est réellement mentionnée. Cependant, ce vers quoi l'on invite l'enseignant, relève plus du registre des attitudes que de celui qui l'inciterait à organiser un travail réel autour de la question du vrai. L'orientation des instructions officielles penche du côté de la performance (à faire produire aux élèves) à savoir, « démontrer », et non pas vers la compréhension des fondements de l'activité de démonstration. Il s'agit d'initier les élèves à manipuler la preuve tout en faisant l'économie d'une réflexion autour de ce que véhicule l'idée de preuve.

En d'autres termes, il nous semble que les textes invitent à utiliser un outil sans postuler la nécessité de s'interroger sur l'objet du savoir en jeu, c'est-à-dire la question du vrai en mathématiques. L'exhortation à « entraîner les élèves à l'activité scientifique » qui est bien la deuxième injonction que prône les instructions officielles n'apporte guère un regard éclairant à ce sujet.

Ainsi donc verrions-nous la nécessité de dépasser cet enseignement de la preuve en tant que savoir-outil pour le compléter par un enseignement de la question du vrai comme savoir objet pour emmener les élèves à vivre des situations mathématiques au cours desquelles « *ils cherchent à saisir de quel problème ils se sont investis, quelle est la nature profonde des objets qu'ils ont construits, quel degré de certitude ils peuvent ou non attribuer aux raisonnements qu'ils parviennent à élaborer ».* [227]

Nous postulons donc que l'entraînement à démontrer ne peut se dissocier d'un travail qui comprendrait quatre axes :

- discuter du mode d'accès au vrai : sur quoi repose tout raisonnement ? (rôle des

[226] DOUADY R. - *Jeux de cadres et dialectique outil - objet dans l'enseignement des mathématiques, une réalisation de tout le cursus primaire* - Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paris VII . 1984.

[227] LEGRAND M. - *La dialectique outil - objet et les jeux de cadres* - proposés par R Douady - opus cit. p. 241.

prémisses assumées).

- élaborer les caractéristiques de l'idée du vrai (prise en compte de l'historicité à propos de l'idée de vérité).
- penser le rôle de l'homme par rapport à l'idée du vrai (mise en évidence de la notion de consensus social).
- se pencher sur les intérêts liés à l'idée du vrai (question du rapport au vrai et question d'éthique).

Selon nous, les mathématiques devraient initier au mieux aux capacités de discernement de l'individu de façon à ce qu'il soit en mesure d'être son propre penseur après qu'il ait pu rassembler et sélectionner des connaissances en les faisant passer au crible de son raisonnement.

L'enseignement des mathématiques irait donc de pair avec l'émergence de « l'honnête homme d'aujourd'hui », celui pour qui il est bon de veiller à faciliter son émancipation. Car, cet enseignement s'identifie à « *l'éducation* [qui] *est l'action susceptible d'aider à l'émergence de l'altérité dans une relation de parité asymétrique, tant le processus de l'éducation (le comment éduquer) n'est pas indépendant du produit de cette éducation (le pour quoi)* ». [228]

Autrement dit, enseigner les mathématiques ne serait pas rationaliser à la place de l'élève, mais bien enseigner à l'élève le comment faire pour raisonner, en lui permettant de discuter de la rationalité spécifique des mathématiques. Ce serait créer un espace de liberté adéquat à l'esprit de chacun. Enseigner l'esprit critique, ce qui inciterait à faire vivre les mathématiques comme une science et non comme un dogme (au sens poppérien). Accentuer le rôle du débat quant aux principes mêmes sur lesquels repose l'édifice mathématique, pour discuter des principes de validation et des statuts particuliers des postulats et axiomes au sein des mathématiques nous paraîtrait fort salutaire pour la santé de l'esprit et permettrait à notre avis de se méfier du démon de la procédologie (expression empruntée à Brousseau qui fait référence au poids de tous les mécanismes, procédures et recettes au sein de la résolution de problème, au point de ne plus discerner l'objet de l'enseignement).

En résumé et pour faire écho à ce que J. Lalanne [229] définit pour les sciences (expérimentales) nous avançons qu'en ce qui concerne les mathématiques, il s'agit de développer chez les élèves «la maîtrise et la fonctionnalité des concepts», de leur apprendre à adopter «des processus de recherche» et nous ajoutons également que l'enseignement devrait viser à leur *faire apprécier la limite des concepts au sein des mathématiques* (dans notre cas celui de la notion de vrai).

Afin d'exemplifier ce que nous semblons ériger en doctrine (relativement à notre conception des finalités de l'enseignement des mathématiques) et de manière à illustrer nos propos en rapport direct avec notre recherche, nous reviendrons de façon plus

[228] DEVELAY M. - *Propos sur les sciences de l'éducation - Réflexions épistémologiques* - Edition ESF .2001. p. 32.

[229] LALANNE J. in Aster n° 1 - *Apprendre les sciences* - 1985. p. 155

pragmatique par la suite sur les grands axes de travail permettant de penser l'enseignement de l'idée du vrai autrement. Ces axes de travail sont en cohérence avec nos finalités afin de parvenir à établir une congruence entre faire des mathématiques et comprendre le monde par l'intermédiaire de l'idée du vrai : nous nous soumettrons à cet exercice prochainement.

Le modèle constructiviste et interactionniste associé aux conséquences qui en découlent ont permis d'expliciter ce sur quoi reposait notre conception de l'apprentissage. Avant d'abandonner ce point particulier, nous citons longuement, en guise de conclusion et pour clarifier ce que nous venons de présenter les trois points de repère auxquels fait référence M. Develay pour caractériser les apprentissages scolaires :

« ...apprendre, c'est trouver du sens dans une situation d'enseignement. Une situation d'enseignement est une situation en attente de sens pour celui qui apprend. Ce n'est qu'à la condition d'investir du désir et d'être motivé par cette situation qu'un apprentissage est possible. Pour savoir, il faut avoir envie d'apprendre. ...apprendre, c'est maîtriser une habilité. Au terme de l'apprentissage, l'apprenant est capable d'une performance nouvelle dont il n'était pas capable au début de l'apprentissage. Apprendre, c'est savoir, pour faire ou parvenir à être, cette maîtrise n'étant assurée que si elle est transférable à de nouvelles situations. Apprendre, c'est comprendre pour pouvoir agir dans d'autres situations. ...apprendre, c'est créer des ponts cognitifs entre des éléments de savoirs isolés. (...)l'apprentissage réussi est celui qui établit des ponts avec d'autres éléments de savoirs possédés antérieurement. Apprendre, c'est relier et non isoler, c'est donc progressivement accéder à une culture qui traduit la cohérence de ces liens... » [230]

3. Modélisation de l'enseignement actuel de l'idée du vrai.

Un outil de théorisation des observations : l'idée de modélisation.

Comme le dirait Le Moigne [231] , la modélisation permet de transformer l'action en connaissance et la connaissance en action.

Nous entendons transformer l'action en connaissance en produisant une modélisation qui rendra compte de la lecture, que nous faisons, de l'enseignement actuel du vrai et auquel nous ne souscrivons pas.

Cette modélisation s'articulera en regard de notre cadre théorique et conceptuel autour de :

- la construction du vrai chez l'élève
- les visées de l'enseignement du vrai
- la construction d'un paradigme du vrai

[230] ***DEVELAY M. - Peut-on former les enseignants ?- Edition ESF. 1994. p. 25***

[231] LE MOIGNE J.L. - *La modélisation des systèmes complexes* - Edition Dunod. 1990. p. 24

Mais, pour parodier Bachelard, nous n'hésiterons pas à mettre en exergue que l'approche modélisée que nous proposons ne donne qu'une « bande du spectre notionnel » de l'idée de l'enseignement du vrai, et qu'il serait nécessaire de la croiser avec d'autres approches de manière à avoir le « spectre notionnel complet d'une connaissance particulière », tant du point de vue didactique, pédagogique, qu'épistémologique.

Dans le même registre de mise en garde, il est sans doute important de revenir sur ce terme de modélisation qui est l'action de modéliser, c'est-à-dire de créer un modèle dont on attend qu'il soit le plus proche de la réalité. Si notre ambition se situe bien à ce niveau, notre prudence nous engage cependant à tenir compte de la différence qu'évoque Rouche entre modèle et idéal type. *«En même temps qu'il rencontre l'exigence de clarté qui donne sens à l'activité intellectuelle, le type idéal est le signe d'une pensée qui donne sens à l'activité intellectuelle, le type idéal est le signe d'une pensée qui respecte la réalité, qui a conscience de ne jamais en rendre compte complètement et donc ne se prend pas pour plus forte qu'elle n'est. Le type idéal veut concilier, dans la mesure du possible, la netteté logique et la prudence épistémologique. Il est un instrument de pensée, non un résultat de la science. Il relève de la méthode ».* [232]

Ces précautions sémantiques étant posées, nous emploierons ce terme de modélisation, « gorgé » des nuances invoquées car il trouve sa place dans le champ des Sciences de l'Education. Reste à tenir compte de la contrainte de clarté afin de remplir au mieux notre tâche d'objectivation théorique de la réalité.

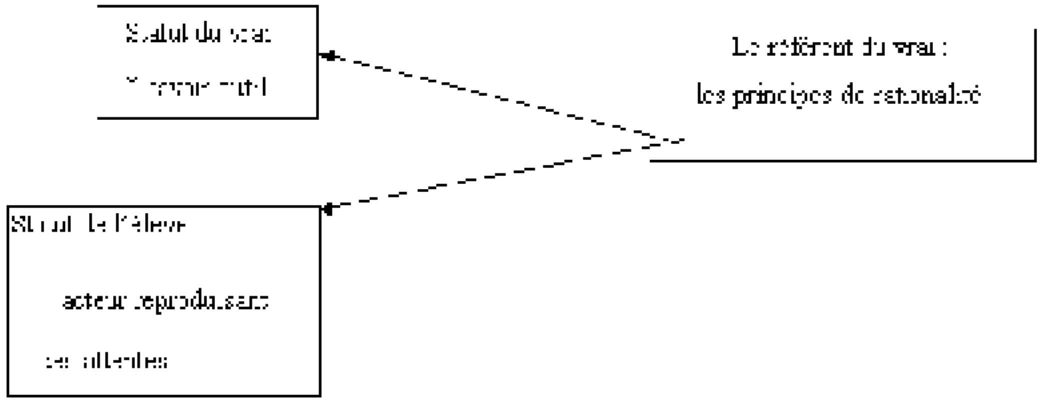
Explicitation par morceaux.

L'objet de cette modélisation est donc de faire comprendre quels sont les paramètres susceptibles d'exercer une influence significative sur l'enseignement de l'idée du vrai et qui sont dominants dans les pratiques. Et ce, actuellement. Pour concevoir un ensemble de principes didactico-pédagogiques susceptibles d'orienter vers d'autres effets d'apprentissage.

Elle met en scène bien entendu les trois pôles du triangle didactique.

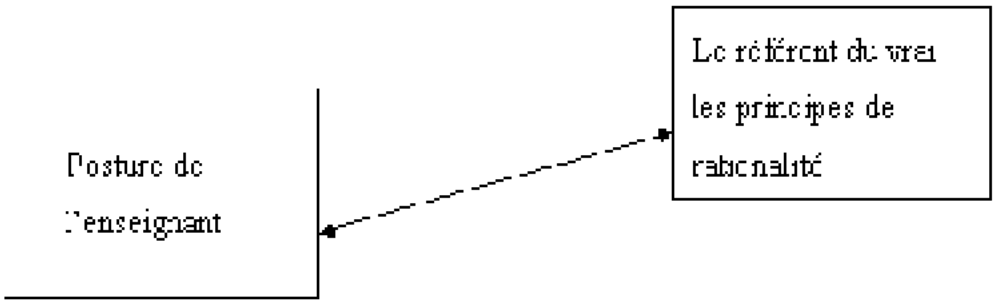
D'abord, elle montre que la centration sur le vrai qui prend pour objet d'enseignement les principes de rationalité dans leur forme expositive renforce le statut du vrai en tant que savoir outil, et relègue l'élève au rang d'un acteur reproduisant des attentes.

[232] ROUCHE N. - in Bulletin de l'APMEP : journées nationales de Brest - Loctudy 1994 - n° 397 - Février 1995 - p.351



Ensuite, cette modélisation met en évidence, l'interaction qu'il y a, du côté de l'enseignant, entre son rapport aux mathématiques et l'orientation qu'il donne à l'enseignement du vrai.

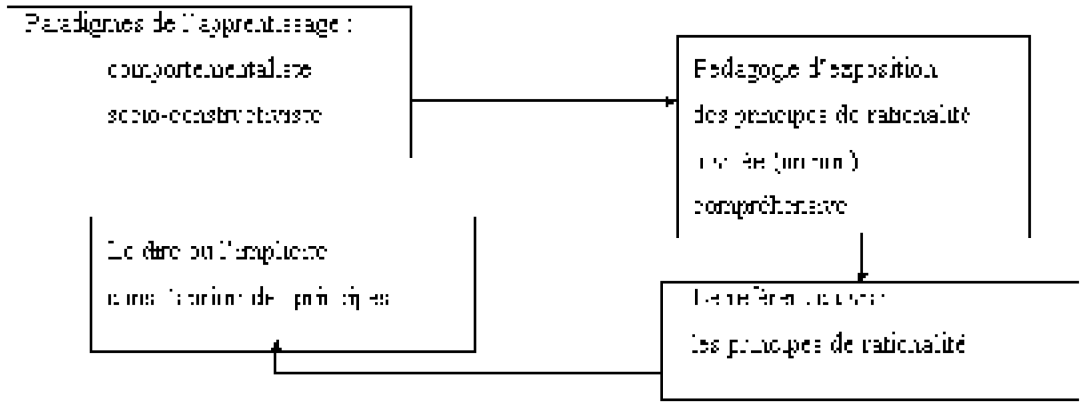
On conçoit aisément que la prégnance d'un rapport objectal aux mathématiques au travers d'un fantasme d'absolu prédispose à sélectionner comme objet d'enseignement les principes de rationalité en tant que tels. [233] Et réciproquement, l'attachement de l'idée du vrai au travers de l'enseignement des principes de rationalité en tant que tels (et non questionnés) renseigne certainement sur le type de conception des mathématiques auquel adhère l'enseignant.



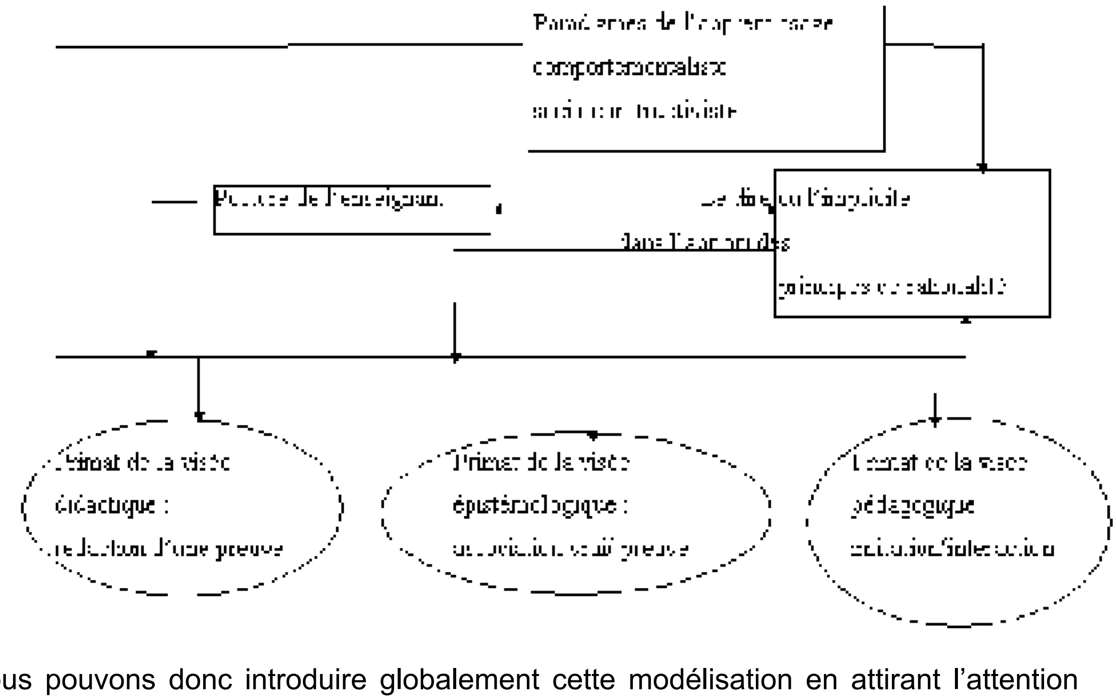
En troisième lieu nous montrons que le paradigme d'apprentissage ne garantit pas du changement de vision de l'enseignement du vrai. Que le modèle d'apprentissage de référence de l'enseignant soit de type comportementaliste ou socio-constructiviste, l'objet d'enseignement sélectionné pour travailler l'idée de vrai reste inchangé. Sans doute, au niveau de la manière de mener cet enseignement y aura t - il des nuances fortes. L'on peut présumer que le dire ou l'implicite des principes, serait plutôt du côté du modèle comportementaliste tandis que le modèle socio-constructiviste garantirait une visée plus

[233] Nous faisons un lien également avec notre recherche en maîtrise qui a fait apparaître que le facteur d'influence prédominant qui serait à l'origine de la non dévolution de la démonstration aux élèves était la conception des mathématiques basée sur une tendance formaliste du type : math : science infaillible ; math : science où les idées se substituent aux calculs ; rigueur existe en soi, indépendante de l'époque.

compréhensive (et moins implicite)



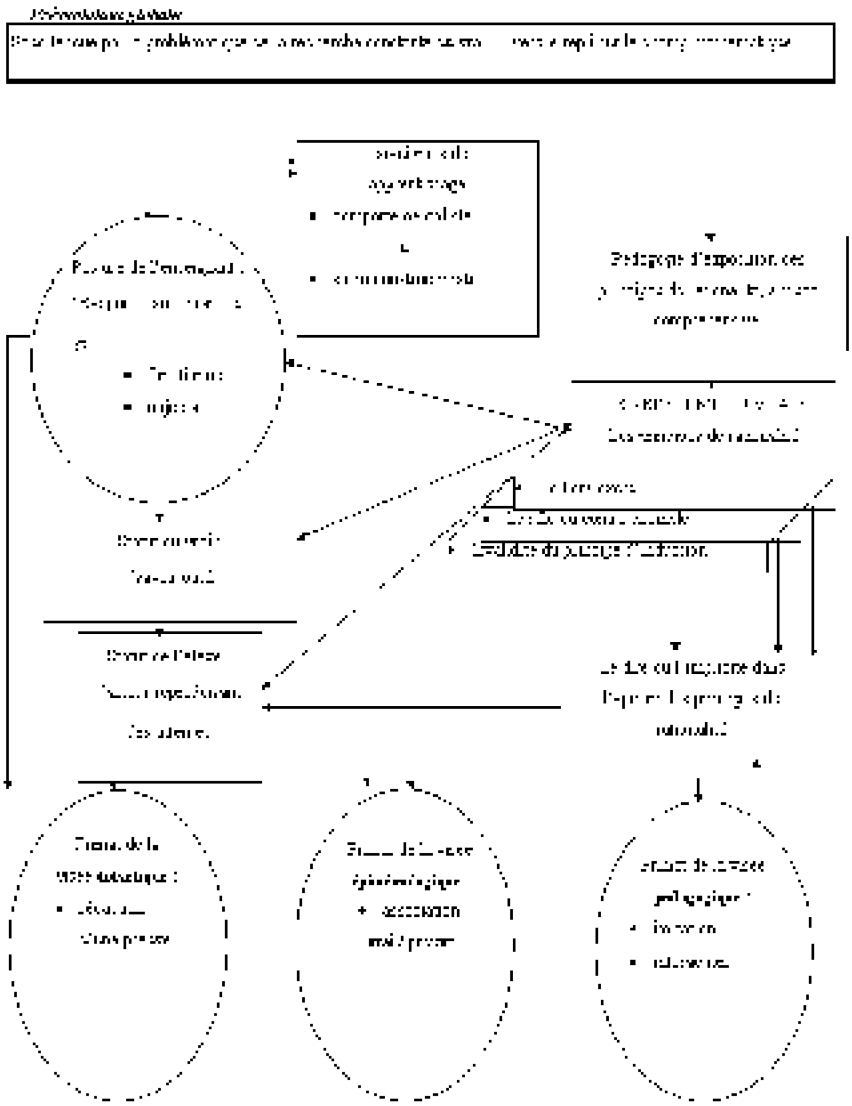
Enfin nous faisons ressortir également que, quels que soient les paradigmes d'apprentissage, quelle que soit la posture de l'enseignant, il existe une visée, dans tout enseignement du vrai conçu à partir de l'exposition ou l'implicite des principes de rationalité qui seraient ou / et didactique, épistémologique, pédagogique. Ce que nous signifions de plus, ce sont les caractérisations respectives de ces visées qui sont elles, en revanche, largement connotées par le fait même d'introduire l'enseignement du vrai qu'à partir des principes de rationalité posés sans questionnement.



Nous pouvons donc introduire globalement cette modélisation en attirant l'attention sur le fait que la manière, quelque peu linéaire d'avoir présenté des groupes successifs d'éléments qui nous paraissent, et caractériser, et jouer un rôle fort dans l'orientation de l'enseignement de l'idée du vrai, n'induit pas une lecture linéaire qui sous-entendrait une vision déterministe des observations à laquelle nous n'adhérons pas.

Il s'agit d'interpréter ce schéma de manière systémique : les boucles de rétro - action qui y figurent sont là pour favoriser une approche dans ce sens. Elles permettent de souligner à la fois, les facteurs influençant l'enseignement du vrai, et ceux qui relèvent de la manière dont est appréhendée l'idée du vrai dans les pratiques, ainsi que ceux qui influent sur les associations naissantes au sujet de l'idée du vrai, implicitement, dans l'acte d'enseigner. Et ce, pour comprendre la construction d'un paradigme du vrai véhiculé par l 'enseignant. Ces trois éléments inter agissant forcément entre eux.

Présentation globale.



4. Vers un dépassement de la modélisation actuelle

Si comme M. Develay l'affirme justement, «*tout enseignant est porteur d'une théorie implicite de l'apprentissage qu'il est possible de lire en filigrane de ses pratiques* » [234] , nous postulons de la même manière qu'il est tout aussi possible de lire en filigrane des ses pratiques l'idée du vrai qu'il véhicule. De même qu'à travers les programmes officiels il est facile de situer ce qui est préconisé en regard de l'enseignement de l'idée du vrai et d'en déduire les conséquences sur les visées de l'enseignement.

Pour notre part, nous affichons une position critique envers l'enseignement du vrai crypto-dogmatique trop prégnant à notre sens dans l'enseignement des mathématiques, tel que le donne à voir la modélisation précédente.

Le souci d'organiser un enseignement rendant attentif à l'idée du vrai, implique que nous postulons un dépassement du traitement actuel de l'idée du vrai dans le champ scolaire.

Au préalable, il nous paraît nécessaire d'expliciter certains éléments qui seront mis en modèle par la suite, selon «l'exigence de calculabilité» pour reprendre une expression de S. Joshua.

Nous sélectionnons les éléments principaux suivants : définir ce que nous entendons par savoir et rapport au savoir. Expliciter le statut de l'idée du vrai articulé au rôle de « personne apprenante » [235] que nous entendons attribuer à l'élève. Et enfin, cerner autrement la mission de l'enseignant de mathématiques toujours en regard de la construction de l'idée du vrai chez l'élève.

La notion de savoir et de rapport au savoir.

Notre ligne d'horizon se profile de plus en plus clairement: par l'intermédiaire de l'enseignement de l'idée du vrai dans le cadre des cours de mathématiques nous visons à établir une congruence entre « faire des mathématiques» et éviter toute prosternation devant l'idée du vrai. Il s'agit donc bien de réfléchir au sens que cela peut représenter de travailler l'idée du vrai comme objet de savoir (et non plus seulement en tant que savoir outil via l'exercice de rédaction de preuve).

En somme, éclaircir les enjeux liés au rapport à ces savoirs, de manière à faire émerger qu'une finalité de cette orientation didactico-pédagogique est, qu'à travers le rapport à l'idée du vrai le rapport aux mathématiques peut certainement évoluer, tant du côté de l'enseignant que de celui de l'élève, puisque « *le choix d'une discipline scolaire et encore mieux le choix d'enseigner cette discipline reposent sur des mécanismes complexes qui engagent des équilibres entiers de personnalité. En effet, notre expérience commune nous a appris que lorsqu'un sujet arrive à prendre conscience de ce qui l'a motivé au cours de son trajet et à comprendre un peu mieux les mécanismes sous-jacents de son choix, cela l'amène à une modification de son rapport au savoir. Et nous avons pu constater que cette modification va dans le sens d'un assouplissement et que, en conséquence, cette fluidité retrouvé lui permet de donner plus de souplesse dans la transmission de ce savoir* » [236] .

Ainsi donc, pour mieux cerner le sens et le rôle que nous attribuons à la notion de savoir en mathématiques (au sujet de l'idée du vrai) insistons nous à réduire son aspect

[234] M. DEVELAY - *De l'apprentissage à l'enseignement* - Edition ESF - 5[ième] Edition - 1999. p. 143

[235] Nous empruntons le terme à C. Gérard (Université de Nantes).

particulièrement procédurier, technisciste et mécaniste encore souvent prépondérant en collège. D'autant plus, si nous sommes à l'écoute des propos de E. Bautier qui livre que, « *en premier lieu, au lycée, plus qu'au collège, la construction des savoirs est indissociable de la nature des tâches scolaires, des formés dans lesquels les savoirs et les activités scolaires sont présentés et évalués ; la philosophie n'existe pas sans le débat et la dissertation [...] ni les mathématiques sans les problèmes...On ne peut ignorer que passe par ces formes le partage d'une culture au double sens des connaissances et de construction d'un mode de pensée, mais aussi que s'y construit en particulier dans le travail de commentaire, de lecture critique, d'analyse un processus de transformation de soi et de son regard sur le monde, processus que les élèves ressentent d'ailleurs comme un processus d'acculturation quand ils investissent les activités scolaires. Cette transformation, cette acculturation, ne se produisent qu'à certaines conditions que l'apprentissage de ces formes scolaires normées et de leurs productions s'accompagne d'un réel travail des savoirs disciplinaires et de leur mise en forme langagière et ne se réduise pas à une simple « mise en conformité » à des comportements ou à des rituels »* [237] .

Autrement dit, pour ce qui nous concerne, nous postulons que l'enseignement de l'idée du vrai ne se réduit pas à axer un travail autour de la preuve uniquement dans le seul objectif d'enseigner à prouver, mais qu'il constitue un tremplin pour penser le dire vrai ou faux en mathématiques de telle manière qu'il fasse sens autrement chez l'élève.

Le statut que nous réservons à ce savoir tend à dépasser le simple enseignement du dire vrai pour développer une culture autour du vrai en mathématiques. De manière récurrente apparaît toute la dialectique à propos du « savoir-objet et du savoir-outil » afin que, dans l'enseignement, les savoirs subissent les deux traitements.

Mais, en ce qui concerne l'idée du vrai, ce savoir là n'existe pas en tant qu'objet, mais seulement en tant qu'outil. L'élève est mis en situation (au mieux) d'apprendre à prouver comme si implicitement sa représentation de l'idée du vrai coïncidait a priori, avec celle communément admise dans la noosphère. Au pire, l'élève est entraîné à reproduire un discours censé incarné l'idée du vrai. Dans les deux cas, c'est comme si l'idée du vrai se réduisait à la performance à prouver, c'est-à-dire à se conformer à un type d'argumentation qui aurait le statut de preuve. Nous le redisons, l'exercice de preuve est plutôt de l'ordre du rituel et cet acte là, est seulement au service d'une communication, mais n'est pas suffisant pour garantir la construction d'une pensée sur le vrai en résonance avec des questions que peuvent se poser les élèves.

A cet égard, l'exploitation dans l'enseignement des travaux de N. Balacheff est déjà un support porteur dans l'élaboration d'une pensée sur le vrai mais qu'il s'agit d'élargir, pour que l'élève entretienne un rapport avec l'idée du vrai qui puisse se décliner sous « *deux registres non exclusifs l'un de l'autre : le registre identitaire et le registre*

[236] BLANCHARD - LAVILLE C. et SCHEIR D. Sous la direction de J Beillerot - *Pour une clinique du rapport au savoir* - Edition l'Harmattan - 1996. p. 241

[237] BAUTIER E. et ROCHEX J.Y. - *L'expérience scolaire des nouveaux lycéens - Démocratisation ou massification.* Paris VIII . Edition Armand Colin. 1998. p. 53 et 54.

épistémique, lesquels sont présents chez chaque élève sous des formes diverses, différenciées et différenciatrices. Le rapport identitaire correspond à la façon dont le savoir prend sens par référence à des modèles, à des attentes, à des repères identificatoires, à la vie que l'on veut mener, au métier que l'on veut faire. La relation de sens entre l'individu et le savoir s'enracine dans l'histoire en devenir du sujet, et ce pour une large part à l'insu

de celui-ci. Le rapport épistémique se définit, lui, en référence à la nature de l'activité que le sujet met sous les termes apprendre et savoir : apprendre, c'est faire quoi ? Quel type d'activité est ici impliqué ? Le rapport épistémique est cette relation à la nature de l'acte d'apprendre et au fait de savoir ». [238]

Enseigner l'idée du vrai c'est avant tout penser ces deux rapports. C'est être conscient de l'incidence que peut avoir la dualisation des lieux du vrai sur la pensée de l'idée du vrai chez l'élève : la rationalité en mathématiques rejoint-elle la rationalité du quotidien ? Qu'en est-il aussi de la nature même de ce savoir mathématique ? L'idée du vrai n'aurait-elle pas une incidence sur le rapport aux mathématiques ?

Une allusion aux propos de D. Guedj nous permettra de faire une analogie avec le savoir concernant l'idée du vrai. En effet, *« comme tous les élèves du monde, Jonathan avait croisé Thalès à plusieurs reprises. Chaque fois, le professeur leur avait parlé du théorème, jamais de l'homme. D'ailleurs en cours de maths, on ne parlait jamais de personne. De temps en temps, un nom tombait, Thalès, Pythagore, Pascal, Descartes, mais c'était seulement un nom. Comme celui d'un fromage ou d'une station de métro. On ne parlait pas non plus de où ni quand ça s'était fait. Les formules les démonstrations, les théorèmes atterrissaient sur le tableau. Comme si personne ne les avait crées, comme s'ils avaient été là tout le temps, comme les montagnes ou les fleuves. Encore que les montagnes, elles, n'avaient pas été là de tous temps. Et l'on arrivait à ceci que les théorèmes avaient l'air plus intemporels que les montagnes ou les fleuves ! Les maths, ce n'était ni l'histoire, ni la géographie, ni la géologie. C'était quoi au juste ? La question n'intéressait pas grand monde* ». [239] Ce que pointe (entre autres) l'auteur de ces lignes n'échappe à personne : l'enseignement des mathématiques apparaît complètement désincarné, atemporel, et vide de toute préoccupation visant à introduire la genèse des savoirs par exemple. Pour ce qui concerne l'idée du vrai, nous ferions volontiers un parallèle. Nous avons précédemment déploré le fait que dans l'enseignement, l'idée du vrai n'était abordée que du point de vue du savoir outil par l'intermédiaire de l'exercice rituel de la preuve. Nous tenons à mettre l'accent sur le fait qui consiste à présenter l'idée du vrai en introduisant soit implicitement soit dogmatiquement les principes de rationalité comme un écho à «l*es formules les démonstrations, les théorèmes atterrissaient sur le tableau ».*Ces principes à l'allure *plus intemporels que les montagnes ou les fleuves* qui se résument classiquement à la toute puissance du tiers exclu associé au principe de non contradiction en osmose avec la condamnation du raisonnement par induction, résonnent aux oreilles de tout collégien et très tôt.

Mais qu'en est-il de l'impact sur la *raison* et sur le *« moi »* du collégien ? Introduire un

[238] BAUTIER E. et ROCHEX J.Y. opus cit. p. 34 et 35.

[239] GUEDJ D. - *Le théorème du Perroquet* - Edition du Seuil . 1998. p.27.

peu de *géologie* concernant ces principes de rationalité serait certainement bénéfique pour la qualité des savoirs mathématiques ainsi que sur l'évolution de la vision du monde que l'élève pourrait alors engager. Dans la mesure où l'élève aurait la possibilité de remettre en cause la vision de l'idée du vrai véhiculée ordinairement.

A propos du statut de l'idée du vrai et la notion de personne apprenante.

En nous appuyant sur les propos de A. Revuz, C. Gérard et J.L Le Moigne nous entendons défendre l'incidence du statut du vrai sur la personne apprenante (métamorphose de l'élève). D'abord, « *beaucoup d'élèves, loin d'être d'abord entraînés à imaginer, à expérimenter, à chercher, à concevoir et à résoudre des problèmes, sont conditionnés à suivre des voies tracées, banalisées, pauvres en mathématiques. Certes, de grands progrès ont émergé ces dernières années. Les mathématiques ont libéré les esprits. Les évolutions ont reconnu leurs possibilités immenses et leurs responsabilités quant à l'utilisation des axiomes qui jusqu'alors étaient considérés comme ne pouvant pas être contredis »* [240] mais *« le déterminisme qui plane sur les mathématiques reste encore particulièrement présent aujourd'hui, au point qu'il incarne souvent le mythe de la vérité absolue. Ainsi, nous pourrions penser que les mathématiques s'apparentent souvent encore aux fondements de ce que nous pourrions appeler une épistémologie positiviste. Ce qui nous conduit à postuler, après J.L Le Moigne, une certaine permanence du paradigme*

dans lequel s'inscrivent les mathématiques. En effet il souligne que «jusqu'au début du XXième siècle, la plupart des nouvelles disciplines pouvaient être insérées sans trop de contorsions dans l'une des cases du tableau synoptique élaboré par A. Comte dès 1826 » [241] » [242] .

La première idée forte que nous entendons prolonger est en écho avec ce qu'avance A Revuz : il s'agira pour nous de définir la finalisation des apprentissages en mathématiques, en regard de l'idée du vrai et du passage à la personne apprenante concernant l'élève.

Ensuite, nous reviendrons sur les propos de C. Gérard dans la mesure où ils entretiennent une proximité avec notre objet d'étude car ils nous ouvrent l'espace pour aborder en quoi le statut du vrai peut renforcer cette idée de mathématiques dogmatiques, préjudiciable au passage vers la personne apprenante.

Enfin J.L Moigne nous fournira le prétexte à éclaircir le type de mathématiques vers lequel nous entendons tendre par l'intermédiaire de l'étude de l'idée du vrai dans l'enseignement.

Au sujet de la finalisation des apprentissages en mathématiques (en

[240] REVUZ A. - *Est-il impossible d'enseigner les mathématiques ?* - Edition PUF. 1980. p.99

[241] GERARD C. - *Au bonheur des maths - De la résolution à la construction de problèmes* - Edition l'Harmattan. 1999. p.27

[242] LE MOIGNE J.L opus cit. p.133

l'occurrence : l'idée du vrai) et du passage à la personne apprenante.

Notre insistance à prôner que l'idée du vrai doive conjointement être considérée comme un savoir outil et un savoir objet situe l'enseignement au cœur de la problématique du sens, à double titre. D'une part pour préserver le sens du contenu mathématique et d'autre part pour privilégier le sens pour celui qui apprend.

Nous nous autorisons à défendre le point de vue que l'idée du vrai doit être « une matière à pensée » [243] agissant comme un principe organisateur de la pensée de l'élève. Enseigner l'idée du vrai devient dès lors, objet d'enseignement (pour l'enseignant), générateur de connaissances (chez l'élève). L'idée du vrai, comme objet d'enseignement, implique de ne plus réduire l'idée du vrai à l'exercice de la preuve mais à comprendre les fondements sur lesquels reposent cet exercice de preuve.

Nous revenons évidemment sur le rôle et le statut des prémisses et la nécessité de les interroger du point de vue épistémologique voire anthropologique.

La conséquence dans l'enseignement pourrait marquer le fait qu'il ne suffit plus de s'inscrire dans une perspective de construction de la preuve. L'orientation est du côté du dépassement du caractère dogmatique associé aux principes de rationalité, caractère qui subsiste même dans une perspective socio- constructiviste. Car il ne suffit pas d'avoir fait découvrir (au mieux) les principes de rationalité pour assurer une pensée sur le vrai. Si l'on vise une auto appropriation de l'idée du vrai il nous faut être conscient des systèmes de valeurs qui pilotent les choix des élèves car comme le souligne C. Gérard « *pour beaucoup d'élèves et notamment pour ceux qui sont en quête de sens le caractère utilitaire des mathématiques et les démarches de formation contribuent à ce que la personne pilote ses apprentissages. En effet, c'est par de tels chemins qu'une personne finalise ses savoirs mathématiques, développe des stratégies de conceptualisation et élève l'objet mathématique au niveau de ses valeurs personnelles ».* [244]

L'idée du vrai comme « matière à pensée » favoriserait donc le passage de savoir élaboré a priori de l'extérieur vers la recherche de compréhension originelle des principes fondateurs du vrai en mathématiques. En cela elle établirait une résonance sur ce que Varéla appelle l'auto référence de la personne (son univers sensible, dit rapidement) creuset de l'émergence du sens et interroge « *la constitution même du Je épistémique, donc les rapports avec le Moi empirique (avec un sujet porteur d'expériences que, inévitablement, il a déjà entrepris d'interpréter*). [245]

Dès lors, nous ne manquons pas de faire référence à la notion de situation problème qui « *constitue le point de départ d'une réflexion profonde sur les expériences et l'apprentissage des procédures mises en œuvre »* [246] pour introduire une nuance.

[243] Allusion au titre de l'ouvrage de A. Connes et J. P. Changeux

[244] GERARD C. opus cit. p.21

[245] CHARLOT B. - *Les Jeunes et le Savoir* - Perspectives internationales. Edition Economica. Collection Anthropos. 2001. p.9

[246] BOUVIER A. - *La mystification mathématique* - Edition Hermann . 1981. p.137 et 138

Cet outil didactique se révèle comme étant un facteur d'optimisation de sens et d'activité chez l'apprenant, certes, mais il n'en est pas moins vrai que la situation problème a ses limites, comme le fait ressortir M. Fabre en montrant *« les ambiguïtés théoriques et pratiques de cette forme pédagogique tiraillée entre deux épistémologies concurrentes : celle de la résolution de problème et celle de la problématisation »* [247] . En effet, même dans la situation problème accompagnée de son acte de dévolution, c'est l'enseignant qui pose le problème et l'acte de problématisation n'est plus à faire, ce qui pour le coup interroge directement l'enseignement de l'idée du vrai. Qu'advient-il du souci de faire problématiser les élèves quand ils ne sont qu'assujettis à résoudre des problèmes pré fabriqués et prêts à prouver ?

Questionner le rôle et le statut des prémisses, en regard des principes de rationalité et de l'exercice de la preuve marquent ce souci de s'emparer de la question du vrai pour faire problématiser les élèves afin de dépasser le seul aspect de résolution. Les connaissances qui émergeraient de ce questionnement serait l'oeuvre de l'élève en vue de l'élaboration d'une pensée réflexive sur le vrai en mathématiques qui ne manquerait pas dès lors, d'interpeller la vision des mathématiques elles-mêmes. En ce sens l'interpellation de l'auto référence de l'élève pourrait être effective puisque l'enseignant ouvrirait un espace dans lequel l'élève exercerait sa pensée, autrement que d'un point de vue purement opératoire d'application de principes ou de processus mécanisés. Ouverture d'un espace, pour faire place au statut de personne apprenante .

Le paradigme behavioriste associé au développement d'une pensée heuristico-algorithmique s'oppose, à notre sens, à une telle perspective. Il renforce même l'idée que les « *mathématiques apparaissent achevées, présentées sous une forme définitive. Elles sont ainsi purement déductives et ne comportent que des preuves »* [248] *.* L'idée du vrai véhiculée par un tel paradigme s'apparente étroitement au développement d'une pensée qui se préoccupe essentiellement du caractère outil du vrai via une centration sur la notion de preuve et n'accorde que peu d'égard à l'auto référence de l'élève .

Le paradigme socio-constructiviste dont nous nous réclamons ne saurait se suffire, non plus à lui-même si l'idée du vrai s'associe uniquement au souci de la construction de la preuve. Le développement d'une pensée sur le vrai en mathématiques réclame que l'on s'interroge sur le contenu des supports propres à l'apprentissage. Le pari que nous engageons est que, de l'association d'un paradigme d'apprentissage qui place l'élève au centre des apprentissages, et d'une étude pensée sur l'objet d'enseignement (l'idée du vrai) facilite la reconnaissance de la personne apprenante. Se pencher sur les objets d'enseignement c'est attirer son attention sur le fait que « *la résolution fait primer « l'objet mathématique » et la problématisation « le sens pour la personne » qui apprend »* [249] *.*

Dit autrement, les principes de rationalité, la preuve, la notion d'hypothèse doivent se prêter à la problématisation en regard de l'idée du vrai et ne pas se comporter uniquement

[247] FABRE M. - *De la résolution de problème à la problématisation* - in Didactique IV . 1993. cité par GERARD C. opus cit . p.162

[248] POLYA G. *Comment poser et résoudre un problème* ? Edition Dunod .1957. cité par GERARD opus cit . p.162

[249] GERARD C. opus cit p 159

comme des arguments d'autorité si la problématique du sens est au cœur de la pratique enseignante.

Au sujet de la mission enseignante en regard de l'idée du vrai.

Résoudre des problèmes par l'intermédiaire de l'élaboration d'une preuve est bien entendu un des objectifs de la « mission enseignante ». Mais d'abord, ce que nous avançons c'est que, développer une pensée sur l'idée du vrai est conjointement nécessaire, pour appréhender et le sens et le rôle de la notion de preuve en mathématiques.

Ensuite, pour songer à développer une pensée sur le vrai en mathématiques il s'avère important de réfléchir à la notion de problématisation de cette idée du vrai pour favoriser un questionnement sur ses fondements, ce qui invite à penser l'enseignement des principes de rationalité et de la preuve autrement.

Enfin, cette persistance à vouloir faire coexister les deux statuts (outil et objet) concernant l'idée du vrai trouve sa légitimité dans la volonté de considérer les mathématiques comme un moyen au service de l'émancipation de l'élève et non pas comme une fin en soi.

Chapitre 3. A trois principes régulateurs et trois principes d'action.

C'est parce que nous venons de montrer qu'il est nécessaire que s'opère le dépassement de la modélisation de l'enseignement actuel de l'idée du vrai et c'est parce qu'à l'instar de M. Legrand, nous pensons que les élèves, le maître et le savoir doivent être pour l'essentiel, assujettis aux contraintes du scientifique que nous nous proposons de poser dans un premier temps des principes régulateurs afin que soit prise en compte, autrement, la question du vrai dans l'enseignement des mathématiques. Principes régulateurs qui visent aussi bien l'idéal d'une bonne reproduction par l'élève d'une activité scientifique susceptible de modifier son regard face aux situations que celui de doter la connaissance (l'idée du vrai) d'un caractère fonctionnellement scientifique.

1. Enoncé des principes régulateurs

a) Trop de rationalité implicite tue la rationalité.

Au risque de paraître provocateur ce titre présente l'avantage de réfracter l'incidence de

l'enseignement sur l'apprentissage. L'idée, certes, n'est pas neuve, si l'on se réfère aux concepts de représentations et d'obstacle didactique [250] . A la lumière de la pensée bachelardienne et contre la tabula rasa aristotélicienne, on mesure maintenant combien l'acte d'enseignement peut relever d'une certaine violence cognitive, tant l'entreprise consiste à mettre l'élève face à ses représentations souvent non conformes à la norme du savoir, afin que ces dernières soient questionnées et réajustées de préférence par le groupe classe.

En l'espèce, les observations que nous avions mises en évidence lors de l'étude de l'échantillon nous permettent de questionner l'enseignement implicite d'un principe de rationalité (en l'occurrence le tiers exclu) en pointant les conséquences qu'il produit sur l'apprentissage de l'idée du vrai que des élèves en retirent.

Il nous faut donc mentionner à nouveau cette tendance qu'un nombre d'élèves avaient manifesté quand ils abordaient la première activité que nous leur avions soumise : l'avancée du vrai ou du faux se manifestait en mobilisant le tiers exclu tout en laissant la notion de contexte dans l'implicite total [251] .

Manifestation d'une idée du vrai des élèves, en étroite dépendance avec un des principes fondateurs de la rationalité mathématique (certes !) mais qui, dans le même temps, accentue la méconnaissance du recours nécessaire à l'existence de prémisse(s) assumée(s) au départ par rapport à laquelle (auxquelles) l'injonction de ce principe aura du sens. Dit autrement, l'on constate que le fait de se référer au principe du tiers exclu n'est pas indicateur d'une vision de l'idée du vrai qui tendrait vers les apports, repérés lors de l'évolution des conceptions du vrai, que nous avons mis en évidence antérieurement.

En d'autres termes et pour conclure, chez certains élèves l'hypothèse holiste ne fait pas partie de leur paysage du vrai en ce sens qu'ils ne perçoivent pas que toute proposition vraie ne peut l'être sans avoir posé, au préalable, tout un corpus d'autres propositions vraies [252] .

b)Le chimérique garant du vrai.

Dans la pensée des hommes, les exemples de garants du vrai fourmillent. Tour à tour pour jouer ce rôle sont invoquées, l'expérience, l'intuition, la puissance divine, l'axiomatisation, la logique, ou bien la raison. Dans la représentation des élèves, prime l'idée que ne peut être vrai que ce qui découle de la raison. En conséquence, le vrai tire son essence de la puissance de la preuve caricaturée par l'enchaînement si ...alors, ce

[250] Il existe trois sortes d'obstacles. L'obstacle épistémologique dû à Bachelard, constitutif de la connaissance visée qui se retrouve dans l'histoire du concept lui-même. L'obstacle ontologique lié au développement des connaissances appropriés à ses moyens et à ses buts (en résonance avec la ligne de développement proximale de Vygotsky). L'obstacle didactique lié au système d'enseignement (on peut noter la contribution de Brousseau concernant les nombres décimaux par exemple).

[251] Citons pour exemple la réponse de l'élève A9904 : « *Les deux élèves ne peuvent pas avoir raison tous les deux raison car une affirmation est soit juste soit fausse(il n'y a pas de milieu)[...]* ». Ou encore celle de l'élève A9905 : « *Non je pense que ces élèves ne peuvent pas avoir raison tous les deux alors qu'ils ont donné une réponse totalement opposée. C'est comme si on disait qu'une chaise est un objet et l'autre que c'est un fruit C'est impossible qu'ils aient tous les deux raison* ».

[252] Pour illustration, ces propos de l'élève B9901 : « *Non, car l'un dit que l'arrondi au dixième est égal à la troncature au dix*[ième], *l'autre pense que ce n'est pas égal or égal et pas égal c'est différent. Donc ils ne peuvent pas avoir raison tous les deux ». Ou bien l'élève B9909 : « non, je ne pense pas que dans ce calcul, il y ait plusieurs résultats* ».

qui scelle la certitude qu'à coup de déductions, le vrai est au bout de l'exercice. Les élèves manifestent leur points de vue sur la signification du vrai en le qualifiant comme « *quelque chose de précis* » ou comme « *des bonnes réponses* » et encore comme « *des choses qui sont toujours vraies dans le cycle des mathématiques* » [253] . Réapparaissent alors le vrai substance (quelque chose) au côté du vrai qui sécurise (adjectif bonnes) conjointement associé à cette idée de la pérennité du vrai mathématique (toujours vrai...dans le cycle mathématique ; l'éternité du vrai). De là, la déduction que le raisonnement est une source sécurisante puisque producteur de vrai. Cette certitude à considérer la puissance du raisonnement renforce la nécessité d'introduire le schéma relativiste dans le traitement du vrai au collège.

Comme représentations du vrai, nous avons aussi rencontré l'idée que cette notion conférait de l'utilité aux mathématiques dans le quotidien. Autrement dit, le raisonnement mis en œuvre au sein des mathématiques, serait directement transposable dans les résolutions de problème au quotidien. D'où un accroissement de la puissance du type de raisonnement hypothético-déductif d'autant plus qu'en collège, la mise en œuvre du raisonnement par l'absurde est rare et le raisonnement par récurrence n'existe pas encore (ce qui serait l'occasion de questionner les principes de déduction et d'induction).

Néanmoins l'importance que les élèves accordent au raisonnement hypothético-déductif ne contribue pas à déclencher la prise de conscience que, ce qui prime, dans le vocable hypothético-déductif c'est bien l'hypothèse avant la déduction.

Dans la pensée des élèves l'instrumentalisation du vrai prévaut sur ses fondements.

Ces rappels de représentations des élèves, confrontés à l'évolution des conceptions du vrai, renforce notre position sur la nécessité d'orienter les collégiens du côté de la réflexion sur le rôle de l'hypothèse pour penser cette notion de garant (ultime) du vrai..

c) Un autre regard sur l'enseignement de la preuve.

D'une part, il nous est apparu après l'examen des représentations des élèves en fin de 4ième, que tous les élèves n'avaient pas parcouru le même chemin quant à la vision de l'idée du vrai. D'autre part, l'évolution de la conception du vrai dans la pensée nous a permis d'asseoir l'idée que cette question du rôle de l'hypothèse dans l'enseignement, gagnerait à être élucidée car « *quand on a un peu réfléchi, on a aperçu la place tenue par l'hypothèse [...] ; nous devons donc examiner avec soin, son rôle ; [...] ; nous reconnaîtrons alors, non seulement qu'il est nécessaire, mais que le plus souvent il est légitime* » [254] .

D'aucuns ne verront là que pure banalité. Nous admettons volontiers que cela en est une du point de vue théorique. Mais nous avançons que l'innovation se situe sur le versant didactico-pédagogique. Introduire l'enseignement de l'idée du vrai et éveiller à une praxis tournée du côté de l'hypothèse se distingue des positions académiques en s'écartant de la conformité programmatique qu'elles suggèrent. Le programme n'est qu'un

[253] Propos issus des tâches effectuées par les élèves de fin de quatrième et visibles en Annexe 3.

[254] POINCARE H. opus cit. - *La science et l'hypothèse* - p.25

attribut de l'enseignement des mathématiques et pas le fondement.

L'enjeu n'est plus (seulement) de former à une méthode idiosyncrétique garant de l'accès au vrai, mais de parvenir à interroger la notion de preuve pour penser la question du vrai. Le vrai religieux repose sur la révélation, le vrai idéologique sur la passion et le vrai mathématique sur la méthode face à laquelle nous entendons considérer la preuve comme l'alibi pour travailler l'idée du vrai, et non une fin en soi. L'enseignement des mathématiques véhicule des dogmes et cherche trop souvent à mettre les élèves en conformité avec le dogme de la déférence. La systématisation à l'entraînement à la preuve, sans autre questionnement, fait courir à l'enseignement des mathématiques, le risque de promouvoir un modèle de connaissance standardisant la pensée. Du point de vue du dogme scolaire de la connaissance, d'aucuns verront peut-être dans la volonté de penser l'enseignement de l'idée du vrai, au sein des mathématiques, une proposition subversive.

Nous en assumons le risque tant nous partageons les vues de Kerlan quand il déclare qu'il est grand temps de restituer « *à la pensée scientifique sa vraie dimension d'aventure, de spéculation, de tâtonnement, de risque intellectuel ; en favorisant la réappropriation critique de la rationalité scientifique* ». [255] Nous défendons cette optique à dépasser le simple dressage des élèves en matière de preuve au nom de valeurs didactique et éthique car « *il convient de le répéter : c'est dans la méthode d'élaboration du savoir que réside la socialisation éventuelle et non dans la possession d'un savoir scientifique présenté tout élaboré* ». [256]

2. Principes d'action pour penser l'enseignement apprentissage de la vérité.

Ces principes d'action s'articulent complètement aux quatre axes que nous avions préalablement définis et que nous rappelons.

- discuter du mode d'accès au vrai : sur quoi repose tout raisonnement ? (rôle des prémisses assumées).
- élaborer les caractéristiques de l'idée du vrai (prise en compte de l'historicité à propos de l'idée de vérité).
- penser le rôle de l'homme par rapport à l'idée du vrai (mise en évidence de la notion de consensus social).
- se pencher sur les intérêts liés à l'idée du vrai (question du rapport au vrai et question d'éthique).

Principe d'action 1 (en lien avec le premier axe)

[255] KERLAN A. DEVELAY M. LEGRAND L. - *Quelle école voulons-nous ? - Dialogue sur l'école avec la Ligue de l'enseignement* - Edition ESF - 2001 . p.44.

[256] LEGRAND L. in opus cit p. 15.

Si le tiers exclu est présenté comme un argument d'autorité dans l'enseignement, il devient un obstacle à la représentation de l'idée du vrai chez les élèves.

Recommandation 1

Plutôt que de travailler seulement sur les principes de rationalité en tant que tels, aborder en particulier le tiers exclu en travaillant en amont, la mise en évidence de l'existence de prémisses qui fondent l'idée du vrai en le contextualisant.

Ce que nous voulons signifier c'est qu'introduire dans l'enseignement des mathématiques les principes de rationalité est nécessaire, mais pas suffisant.

Les travaux de l'IREM de Grenoble [257] pointent l'importance de travailler la notion de modèle en mathématiques, suite à la manière dont réagissent des adultes en formation ou des étudiants lors d'études de conjectures en lien avec un circuit électrique. Il s'agit donc de faire prendre conscience des grands principes de la rationalité en mathématiques et de les opposer à ceux de la rationalité quotidienne par exemple. Nous

ne nions pas l'importance de l'incidence de ces propositions sur la représentation du vrai chez les élèves. Nous pourrions dire que nos recommandations présentent la même tonalité en préconisant, tout en les prolongeant, l'étude des caractéristiques du modèle en mathématiques et des contraintes qu'il impose.

Il s'agira de prolonger la compréhension des principes de rationalité mais pas en tant que tels (l'idée de coexistence du vrai ou faux impossible ; ou l'utilisation du contre exemple) mais sous l'angle de ce sur quoi ces principes reposent. Autrement dit, en faisant émerger le rôle et le statut des prémisses assumées à l'intérieur d'un contexte qui leur donne sens.

En effet, nos observations nous poussent à penser que la représentation de l'idée du vrai est fortement induite par le principe du tiers exclu.

Une condition potentielle pour opérer le déplacement de cette dernière, réside dans l'optique de faire percevoir aux élèves la limite de cette notion de vrai au sein même des mathématiques.

Pour ce faire, il serait sans doute souhaitable de travailler *en amont* des principes de rationalité.

Car le problème n'est pas tant que les élèves ne comprennent pas l'impossibilité de concevoir du vrai et du faux en même temps, au contraire. L'obstacle c'est précisément qu'ils ne retiennent que trop que le vrai et le faux ne peuvent coexister, et qu'ils gomment le rôle et le statut des prémisses assumées au départ qui rendent ce tiers exclu valide. Il nous paraît important de mener un travail qui viserait à faire émerger que c'est à l'intérieur d'un contexte donné que le tiers exclu s'entend. Cela nous paraît d'autant plus riche que ce travail orienterait aussi vers l'incitation à soumettre aux élèves des situations de doute dont la visée ultime serait de poser des jalons facilitant une orientation future du côté de la notion d'indécidabilité et ce, dès la $4^{ième}$ et la $3^{ième}$ de collège.

[257] *Le vrai et le faux en Mathématiques au collège et au lycée* - Université Joseph Fourier - 1997.

Principe d'action 2 (en lien avec le deuxième axe)

Il nous semble pertinent de travailler avec les élèves l'idée que la validité d'une démarche n'engage pas, a priori, l'accès à l'idée du vrai .

Recommandation 2

Pour cela une piste serait de développer la notion de contexte chez les élèves pour démythifier le vrai en soi, au profit du vrai local, ce qui serait un levier d'action pour intervenir sur le rapport aux mathématiques en lien avec le rapport au monde. Dans cette alternative, il s'agirait de faire réfléchir sur le sens que revêt l'expression « une hypothèse est vraie ».

Plutôt que d'entraîner à raisonner sous l'angle de la dextérité systématique consistant à reproduire un discours conforme (aux représentations des enseignants), favoriser la prise de distance envers la puissance de la raison pour faire découvrir l'incidence du choix des prémisses dans l'exercice de la pensée mathématique. Que signifie partir d'une hypothèse validée ?

Il semble, d'après nos observations, que les élèves parviennent à mettre en place, assez spontanément, des critères pour vérifier la validité des démarches et qu'à partir de là, ils l'amalgament avec l'idée du vrai. Ils vérifient la validité de la démarche et concluent sur la vérité du résultat sans avoir interrogé « le vrai » des prémisses. La nécessité de dissocier les deux notions nous paraît fondamentale.

D'une part, pour prolonger le travail sur l'existence des prémisses assumées (on peut affirmer que le résultat est vrai en regard de quoi ?) et d'autre part, pour clarifier et mettre en évidence le rôle du contexte qui lui-même est constitué d'un ensemble de prémisses dont il faut faire le choix ou exhiber explicitement (réintroduction de l'humain par une ou des prise(s) de décision).

Nos propos établissent donc une nouvelle tonalité par rapport aux instructions officielles. Ces dernières préconisent essentiellement un travail autour de la preuve, dans l'esprit de développer chez les élèves, que l'accès au vrai en mathématiques introduit une rupture avec la simple conviction et qu'il faut, pour atteindre le vrai, un outil puissant (qui semble nier toute touche humaine pour les élèves). Nous ne minimisons pas cet aspect, mais le risque est qu'en « *l'absence d'un traitement didactique « officiel », l'art de la démonstration* [soit l'accès au vrai]*, tend à se présenter, surtout chez les jeunes élèves, comme une série de normes, de règles non négociables où les nécessités didactiques se confondent avec les nécessités logiques* ». [258]

Si ce travail sur la preuve est bien entendu incontournable, il n'est encore pas suffisant, quelque peu par trop idéalisé donc trompeur et de surcroît dangereux (trop lié au renforcement de la pensée magique). Il occulte totalement la dimension du sens du vrai en mathématiques, en faisant de la forme un primat car « *l'élève ne peut pas considérer la*

[258] BROUSSEAU G . ANTIBI A.- *La dé-transposition de connaissances scolaires* in *Recherches en didactique des mathématiques* - volume 20/1. 2000. p. 11

démonstration en partant de la conclusion parce que l'instrument dont il a besoin pour cela, son raisonnement (sa logique de constructeur), est lui même isomorphe à l'objet, et donc ne peut donc opérer que dans l'ordre standard ».[259]

En effet, toujours développer l'entraînement au raisonnement (déductif qui plus est) en collant systématiquement aux lois et règles du système formel des mathématiques sans se poser de questions, éloigne précisément de l'idée du vrai, dans la mesure où l'on ne fait ni ressortir les limites dudit système, ni explicitement référence au rôle et à la nature des a priori de départ qui sont à l'origine de la mise en œuvre du raisonnement. De plus, ce travail systématique entretient aussi l'illusion qu'en mathématiques, l'on puisse toujours trancher dans la mesure où l'on dispose d'un outil suprême en la démonstration.

Il nous semble important dès lors, d'introduire un peu de modération dans ce domaine en mettant en évidence le « ce sur quoi s'ancre » toute démarche de preuve par l'intermédiaire d'un travail sur le contexte qui fait émerger la corrélation étroite entre les prémisses de départ et le pouvoir de décision.

Ce que nous cherchons à éveiller sur le plan didactique c'est la relégation de l'implicite au profit de l'explicite au sujet du rôle et de la nature des prémisses assumées, étant donné un référent donné et un contexte donné. Il s'agit d'éveiller à la nécessité de prendre conscience qu'une fois ces prémisses posées elles doivent être validées (au sens de admises pour vraies). Ainsi donc, pensons-nous ouvrir une voie pour faire comprendre qu'à un moment donné, il n'est pas possible (même) en mathématiques de prouver le vrai par le raisonnement : tremplin vers la notion du vrai ultime comme une chimère.

Arrivée à ce point, nous mettons l'accent sur la nécessité de faire émerger chez les élèves une réflexion qui oriente vers l'importance du choix des prémisses avant toute démarche d'accès au vrai (ou au faux). Si l'exercice systématique de l'entraînement à la recherche de preuve n'est pas à sous-estimer, il faut cependant lui associer un objectif qui serait en quelque sorte davantage méthodologique, pour faire ressortir, qu'avant de mettre en œuvre des critères aussi pertinents puissent-ils être pour prouver, il faut d'abord questionner leur cadre d'application.

Il s'agit alors d'entretenir un questionnement autour du choix des prémisses qui sont nécessaires pour construire un contexte dans lequel pourra s'entendre l'idée du vrai. Quelles prémisses permettent de mettre en oeuvre une heuristique ? Quelle est l'incidence du changement des prémisses en regard de la décision du vrai ou du faux ? Comment être sûr que la prémisse est admise pour vraie ? A quoi servent les principes de rationalité ? Quel rôle jouent ces principes de rationalité ?

C'est donc promouvoir une vision résolument contextualisée de l'idée du vrai, au lieu d'entretenir l'illusion que tout raisonnement vient à bout de toute question qui suscite le doute, sous prétexte qu'il se situe dans le champ mathématique.

Cela invite alors à travailler en amont de l'idée de raisonnement pour faire ressortir l'importance des objets par rapport auxquels il s'applique.

Il nous semble opportun dès lors d'engendrer une réflexion sur la différenciation de

[259] Ibidem p. 28.

nature des prémisses. Les prémisses qui ne sont pas à remettre en cause car appartenant au système formel donc au référent mathématique (principes de rationalité ; postulats et axiomes). Et les prémisses dépendantes du contexte et qui en découlent (données ; propriétés ou théorèmes à mobiliser localement).

Principe d'action 3 (en lien avec le deuxième, le troisième et le quatrième axe)

Il nous semble que développer l'idée du vrai en mathématiques dépasse le cadre de cette matière et incite à interpeller même en troisième, une réflexion de type épistémologique.

Recommandation 3

Ainsi donc prônons-nous de travailler l'idée de norme au sein même des mathématiques. Ouverture vers une réflexion qui, tout en recentrant l'idée du vrai au sein des mathématiques, donne le prétexte à l'élargir du côté de questions à tendance certes plus philosophiques. En retour, ces dernières permettraient d'éclairer la nature du vrai en mathématiques La manière dont on accède au vrai en mathématiques, et le sens du « quelque chose » est vrai au creux de cette science, ce qui n'est pas contradictoire avec nos deux recommandations précédentes mais complémentaires au contraire.

Cette optique jouerait le rôle de principe organisateur d'une pensée sur l'idée du vrai dans le sens où elle opérerait une espèce de globalisation en faisant apparaître les proximités qu'il y aurait entre les notions de prémisses, de référent et de contexte, et de raisonnement .

Cet éveil au regard épistémologique des élèves fonderait leur réflexion sur les mathématiques, en les invitant à se pencher sur le type de questions qui caractérisent les mathématiques, la manière dont cette science y répond, et d'envisager comment l'homme peut avoir une marge d'initiative par rapport à ce savoir.

Le lecteur remarquera à nouveau que l'objet d'étude à privilégier ne correspond pas à travailler une modalité de l'idée du vrai (c'est-à-dire l'entraînement à la recherche et à l'élaboration de preuve) mais bien de défier un enseignement qui favorise l'idée du vrai en soi. Il s'agit de mener avec les élèves de troisième (et de quatrième) de collège, une étude réflexive qui consiste à s'interroger sur l'origine et le statut de l'idée du vrai en mathématiques, pour introduire de la vigilance, et accomplir une distanciation par rapport aux représentations véhiculées principalement par la constance à l'entraînement à la démonstration systématique, à propos de situations où le doute n'existe d'ailleurs même pas.

L'objectif, on l'aura compris, consiste à introduire alors une rupture avec cette sorte de « prosternation » envers l'idée du vrai qui se manifeste par l'amalgame simplificateur que l'enseignement entretient entre vrai et preuve largement encouragé par les programmes officiels.

Principe d'action 4 (en lien avec le premier axe)

La prégnance de l'association entre idée du vrai et preuve nous invite à postuler qu'il est important de repenser le statut de l'enseignement de la preuve .

Recommandation 4

De notre point de vue, il serait nécessaire d'introduire l'idée du vrai comme savoir-objet et ne pas seulement le considérer en tant que savoir-outil en l'amalgamant uniquement à l'exercice de la preuve (nous reprenons ces concepts à R Douady [260]). D'une autre manière nous dirions qu'il faut dépasser l'étude du référent du vrai (où il s'agit d'exposer les principes de rationalité) pour aller du côté du vrai du référent (où il s'agit de comprendre ce sur quoi se fonde le vrai).

Il s'agit alors de repositionner le statut de l'élève qui deviendra autre et non plus un acteur reproduisant simplement des attentes. Il s'agira également de penser la posture de l'enseignant par rapport au vrai, afin que son rapport au vrai dépasse le type d'une pure fonctionnalité par rapport à la preuve. Pour le penser au travers d'un rapport au vrai de type davantage épistémologique déclencheur d'une réflexion sur une autre manière d'enseigner l'idée du vrai. Dépasser l'entraînement systématique à prouver pour prouver car tout comme C. Margolinas déclare « *nous ne pensons pas que le point de vue de la validation soit englobé tout entier dans celui de la preuve* » [261] nous postulons également que la question du vrai n'est pas englobée toute entière dans celle de la performance à prouver.

En d'autres termes, nous invitons à penser que l'idée du vrai dans le champ des mathématiques puisse être le prétexte à réintroduire de l'humain. Passer du repli sur le champ mathématique vers un rapport au monde par le biais d'une étude sur l'idée du vrai.

3. Tableau illustrant les principes d'action et leur mise en œuvre en 4ième

Ces principes clés ont trois origines.

La première est directement issue de notre premier statut, celui de professeur de mathématiques en collège et de formatrice d'où l'aspect pragmatique.

La seconde, relève d'une pensée spéculative qui s'est appuyée sur des légitimations théoriques (épistémologique et didactique) à partir de questionnements issus de la pratique.

La troisième provient de notre participation au groupe de recherche en mathématiques du CEPEC. Notre posture d'enseignant chercheur s'inscrit dans le courant de la recherche action qui *« constitue une contribution déterminante à la conduite du changement dans l'école »* [262] d'autant plus, si nous prêtons quelque crédit au

[260] Se reporter à R. DOUADY *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques*. Thèse pour le doctorat d'Etat . Université Paris VII. 1984.

[261] MARGOLINAS C. - *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques* - Edition La pensée sauvage. 1992. p.22

témoignage d'Edgar Morin qui déclare de son côté que, l'apprentissage de l'auto-observation fait partie de l'apprentissage de la lucidité.

Nous voulons attirer l'attention du lecteur sur le fait que ces principes veulent articuler l'idée du vrai dans le savoir savant que nous avons tenté de cerner avec leurs incidences sur les pratiques. Il nous a semblé opportun de faciliter la lecture de ces principes en privilégiant la forme d'un tableau.

Les lettres minuscules d, m, et p, accolées à la numération sont là pour attirer l'attention sur la *prédominance de l'origine du principe* considéré et rappelle respectivement les champs : didactique, mathématique et pédagogique.

La liste de ces principe peut paraître longue, à première vue, et par là-même peu digne d'intérêt dans la mesure où ces principes inclineraient à penser qu'ils ne sont là que pour renforcer le caractère utopique et la vision peu réaliste de celle qui les présente ! Or, nous entendons défendre l'idée que enseigner ne résulte pas d'application ordonnée et répétitive de recettes miracles. Enseigner n'est-ce pas l'art de gérer de la complexité ? Convenons donc que ces principes et leur mise en réseau sont posés à la fois comme principes organisateurs d'une démarche didactico-pédagogique soucieuse d'être attentive à l'enseignement de l'idée du vrai et comme principes régulateurs de cette démarche. Ces principes ne sont pas des décrets mais invitent aux métissages d'actions se réclamant des trois champs pré cités pour favoriser l'émergence d'une nouvelle pensée sur l'enseignement de l'idée du vrai en collège.

Pour des questions de format nous les présentons à partir de la page suivante.

[262] DELORME C. - *De l'animation pédagogique à la recherche action* - Thèse de Doctorat de Sciences de l'Education - Edition Chronique sociale. 1981. p.162

[263] Résultat d'une recherche que le groupe a mené à la suite du DEA en didactiques des mathématiques, Lyon I, par A. Bartolucci, formateur au CEPEC, sur le profil de sortie. Nous y reviendrons en détails par la suite.

PRINCIPES CLES	LEUR RAPPORT A L'IDEE DU VRAI.	LEURS INCIDENCES SUR LES PRATIQUES
1d) Valoriser le rôle de l'erreur	Vrai et obstacle épistémologique	Utilisation de la situation problème Etudier les représentations du vrai chez les élèves
2d) Penser les rapports entre mathématiques, didactique et pédagogie	Vrai et principe d'autorité Quête du vrai éternel Vérité et finalité socio-humaniste	Au delà des contenus à enseigner travailler les fondamentaux [263]
3d) Entraîner à se poser des questions plutôt que de systématiser la résolution. PRINCIPES CLES	Le vrai n'est pas toujours accessible LEUR RAPPORT A L'DEE DE VRAI	Renversement de logique : développer la démarche de recherche avant d'inciter à la démarche de résolution : anticiper ; prévoir Activités basées sur la reconnaissance de contexte pour savoir mobiliser le bon outil (sans résolution) Etude critique de certaines notions qui sont abordées très tôt et qui posent question en regard de la vision du vrai : tout carré est positif somme de relatifs logique arithmétique (somme LEURS INCIDENCES SUR LES PRATIQUES
		de fractions et notes) Organiser un travail sur le doute tâches impossibles à résoudre en 4^{ième} travail sur équations sans solution
4d) Co-élaborer de manière constructive les critères de validation d'une preuve	Rôle d'une communauté dans l'exercice de validation donc dans la décision du vrai Vrai dépendant de la construction sociale aussi bien au niveau des critères que de la constitution de la notion de démarche validée.	Faire discuter de la pertinence des critères d'évaluation d'un devoir surveillé Mettre en tension la notion de rationalité du quotidien et de la rationalité mathématique : problème de la majorité Faire construire des grilles d'évaluation à partir d'un sujet donné et provoquer la discussion. A partir de la démonstration d'un théorème élaboré en groupes, produire des critères qui permettent de valider les différentes preuves aboutissant à la démonstration du théorème.
5d) Faire preuve de vigilance épistémologique : prendre en compte la transposition	Non admission, dans le savoir savant de l'infaillibilité de la notion du vrai LEUR	Centrer une évaluation sur les rapports résultat / processus : questionner l'évaluation ne prenant en

[263] Résultat d'une recherche que le groupe a mené à la suite du DEA en didactiques des mathématiques, Lyon I, par A. Bartolucci, formateur au CEPEC, sur le profil de sortie. Nous y reviendrons en détails par la suite.

didactique du vrai . PRINCIPES CLES	RAPPORT A L'DEE DU VRAI	compte que le résultat final Favoriser une « pluri diversité » des modes d'approches du vrai (pragmatique ; intuitif ; formaliste) LEURS INCIDENCES DANS LES PRATIQUES
		pour en discuter en regard de la rationalité
6d) Entraîner à la recherche conjointe du vrai et du faux	Les mathématiques ne sont pas un creuset de vérités absolues mais prise en compte cependant que l'idée du vrai est porteuse de sécurité ontologique. Rapport entre idée du vrai et dogmatisme, scepticisme, relativisme.	Critiquer des preuves pour en détecter d'éventuelles failles Travailler sur les syllogismes Entraîner à argumenter pour défendre la reconnaissance de la validité d'une preuve
1m)Elaborer une pensée sur le vrai pour dépasser la simple préoccupation du dire le vrai.	Le vrai comme participant à l'éclairage de l'environnement de l'homme : le vrai au service de la recherche de lois.	Travail sur le statut du contre exemple en mathématiques Critique de son rôle à travers les rationalité du quotidien et des mathématiques Travail sur les différents niveaux de preuves
2m)Faire vivre l'idée de vrai provisoire.	Vrai et conjecture : problème de la falsification en mathématiques	Travail sur le contre exemple Entraîner aux raisonnements inductif, déductif et analogique pour en percevoir les limites
3m)Prendre en compte la dimension historique dans la constitution de l'idée du vrai	Idée du vrai locale : rôle de la norme et de son développement . Rôle des prémisses assumées dès le départ : statut des axiomes et des postulats.	Penser l'enseignement des paradoxes
4m)Démystifier l'idée du vrai au sein des mathématiques PRINCIPES CLES	Idée du vrai infaillible porte sur les liens logiques existant LEUR RAPPORT AVEC L'IDEE DU VRAI	Travail relatif à la modélisation travail sur figure/dessin LEURS INCIDENCES SUR LES PRATIQUES
	entre les propositions et non sur les contenus des propositions elles-mêmes et non sur la réalité matérielle Vrai et statut des objets mathématiques	travail sur formules/équation travail sur propriétés, théorèmes et réciproques
5m)Eclairer le rapport vrai mathématiques et homme	Vrai extérieur au sujet connaissant ? Vrai et principe	Travail sur la structure de la preuve : sur quoi repose t elle , comment

	du tiers exclu	s'articule t elle ? Travail sur le statut des propriétés et théorèmes Travail sur les possibilités de l'existence de valeurs de vérité en mathématiques : mise en perspective avec le champ physique
1p) Progression non linéaire des chapitres	Mode de construction du vrai : le vrai se constitue non selon une logique d'empilement de savoirs mais selon une logique d'inter actions des savoirs (courants 19^{ième} et 20^{ième} siècle très significatifs à ce sujet) vrai : guidé par le principe de non contradiction - recherche de la cohérence	Mise en réseau des savoirs à partir d'un plan de formation qui établit des thèmes de contenus entretenant entre eux des passerelles pour faire des liens conceptuels au détriment de la succession de chapitres sans rapport les uns avec les autres
2p)Faire ressortir le caractère paradigmatique lié à l'idée du vrai. PRINCIPES CLES	Rôle du consensus dans la recherche du vrai par rapport à un ensemble de croyances données admises LEUR RAPPORT AVEC L'IDEE DU VRAI	Favoriser les travaux de groupes à deux ou à trois ou à quatre, avec remontée systématique en groupe classe en essayant LEURS INCIDENCES SUR LES PRATIQUES..
	par une communauté	d'établir des règles de vie qui se vivent dans une communauté scientifique.
3p) Intégrer l'idée de temps dans les pratiques	Idée que l'approche de la notion du vrai et durée dans le temps sont intimement liées car le vrai est une construction sociale dans ses fondements. A l'intérieur d'un référent quand c'est vrai , c'est toujours vrai : « vérité éternelle n'est autre que le processus logique c'est-à-dire le processus historique lui même »	Organiser la progression de manière à ce que les phases d'institutionnalisation ne soient pas systématiquement consécutives aux séquences de cours : répond à la logique : différer le savoir constitué au profit des savoirs en voie de constitution pour prendre en compte la reconstitution du savoir par l'élève (passage du savoir à la connaissance [Joshua])
4p)Accorder des valeurs de vérités aux productions écrites et orales des élèves	Vrai local dépendant d'un référent donné.	Valoriser la pensée élève en sollicitant leur prise de parole Reconnaissance de leur parole en prenant le temps de : récapituler au tableau ce qui est dit de susciter les réactions Favoriser une évaluation critériée en prenant en compte les notions de compétence .

Illustration dans le champ scolaire : présentation des pistes mises en œuvre en classe de quatrième.

Dans ce paragraphe, nous sélectionnons des situations didactiques qui nous sont apparues cruciales dans la mise en œuvre avec les élèves. Nous les présenterons d'abord sous un titre générique. Nous énonçons clairement les principes clés avec lesquels elles s'articulent. Nous irons jusqu'à décrire des scénarios de cours précis réellement mis en place afin d'atténuer le caractère potentiellement utopique que l'on peut leur accorder a priori car même si « *en définitive, il est vraisemblable qu'à l'heure actuelle personne ne sait répondre convenablement à la question : à quel moment, dans quelles circonstances apprend-on l'essentiel, le décisif ?, il me paraît clair par contre, qu'il y a des moments, des instants cruciaux, des contextes privilégiés où le sujet apprenant fait un bond en avant considérable dans sa compréhension globale du savoir, bond en avant qui résulte certainement en grande partie d'un long travail préalable de maturation « invisible pour le professeur », bond en avant qui est souvent un effet d'après coup, mais bond en avant que l'enseignant peut (et à mon sens doit) orchestrer en organisant des situations susceptibles de provoquer les chocs cognitifs adaptés. Ces bonds en avant, l'expérience montre qu'ils ne se produisent que très rarement et que pour très peu d'élèves lorsque ces déclencheurs (les situations fondamentales) ne sont pas là pour apporter à un moment donné le questionnement et l'énergie critique indispensables* » [264] .

Construction de principes (par les élèves) qui permettent de valider une preuve [265] à travers le débat mathématique.

Cette situation se veut répondre aux principes clés suivants (en suivant la nomenclature posée précédemment) :

- 2 d) rapport entre didactique, pédagogie et mathématiques.
- 4 d) co élaboration de manière constructive des critères de validation d'une preuve et rôle de la communauté dans l'exercice de validation.
- 6 d) entraîner à la recherche conjointe du vrai et du faux.
- 2 m) faire vivre l'idée du vrai provisoire.
- 3 m) prise en compte de la dimension historique (au sens de construction sociale) dans la construction du vrai : notion de norme ; rôle des prémisses assumées au départ.
- 2 p) caractère paradigmatique du vrai.
- 3 p) intégration du temps dans les pratiques.

[264] LEGRAND M. - *La problématique des situations fondamentales* - in *Recherches en didactique es mathématiques.* Volume 16/2. Edition La pensée sauvage.1996 p.262

[265] Rappelons que dans les programmes officiels la notion de construction d'une preuve est l'objet nouveau en classe de quatrième : jusque là, les élèves sont familiarisés avec les justifications ou les déductions courtes.

· 4 p) accorder des valeurs de vérité aux productions écrites et orales des élèves.

Schéma des scénarios de cours, dans leur grandes lignes (durée : trois mois).

Objet d'enseignement qui sert de support à ce travail sur l'idée du vrai et appartenant au programme officiel : l'élaboration du théorème des milieux [266] .

Au départ un énoncé : tracer plusieurs triangles. Dans chaque triangle, tracer la droite qui joint les milieux de deux côtés. Quelles conjectures peut-on faire à partir de ces figures ? Que proposer pour que le résultat soit validé par tous ?

travail individuel pour émettre une conjecture. 1.

travail par groupes de trois pour échanger et trouver un accord pour l'énoncé de cette conjecture ; réflexion sur « que faire une fois la conjecture posée ? ». 2.

échanges sur le que faire en classe dialoguée ; prise de décision commune : rédiger une preuve pour valider la conjecture. 3.

chaque groupe doit élaborer une preuve. 4.

synthèse de toutes les propositions de preuves (récapitulation faite par l'enseignant sur rétro projecteur, en dehors des cours). 5.

en classe dialoguée, transmission de la synthèse et émission des critiques par rapport aux propositions de preuves faites par tous les groupes (récapitulation faite par l'enseignant sur rétro projecteur, en dehors des cours). 6.

en travail individuel, classer par grandes catégories toutes les critiques; confrontations et échanges par groupes de deux. 7.

en classe dialoguée remontée des classifications de tous les groupes en lien avec la notion de preuve ; prise de décision sur les classes de critiques à adopter ; essai de nomination de critères. 8.

reconstitution des groupes de trois au départ : en fonction des catégories de critiques élaborées et nommées par la classe reprendre la rédaction de la preuve. 9.

retour aux points 5 et 6. 10.

propositions de preuves validées. 11.

rédaction écrite des critères de validation d'une preuve que la classe a trouvé : document qui sera utilisé dès lors en 4ième et en 3ième. 12.

En annexe 4 nous rendons compte des productions des élèves des classes de 4^{ième}A et 4^{ième} E.

Séances de reconnaissance de contexte en lien avec des séances visant la différenciation entre démarche de recherche (travail sur l'heuristique) et la démarche de résolution (via la rédaction de preuve).

[266] Nous évoquons la partie directe du théorème des milieux qui s'énonce ainsi : « si une droite passe par les deux milieux de deux côtés d'un triangle alors elle est parallèle au troisième côté du triangle ».

Principes clés auxquels se réfèrent ces séances :

3d) entraîner à se poser des questions plutôt qu'à trouver des réponses.

5d) faire preuve de vigilance épistémologique ; maîtriser la transposition didactique du vrai.

5m) éclaire le rapport mathématiques et homme

4p) accorder des valeurs de vérité aux productions écrites et orales des élèves.

Schéma des scénarios de cours avec supports [267] annuels depuis la deuxième moitié du premier trimestre :

Il s'agit d'étudier un contexte de manière à pouvoir identifier quel(s) outil(s) l'on devra mobiliser pour résoudre le problème mais sans aller jusqu'à la résolution.

L'ambition n'est donc pas ici, d'élaborer une preuve (même si ces séances serviront de supports pour travailler l'élaboration de preuves, ultérieurement).

Ce travail est principalement axé sur la démarche d'anticipation : support pour apprendre à repérer des données (lien avec hypothèses assumées) ; à faire des liens avec des domaines de connaissance pour être en mesure d'appeler le bon outil qui permettra la résolution ultérieure.

Ce travail se compose de quatre séries d'énoncés qui sont distillées selon une période longue (l'année) de manière à garantir des possibilités d'apprentissage réelles dans la mesure où la durée joue un rôle essentiel .

Les énoncés font appel à tous les théorèmes ou définitions fondamentales appartenant au niveau de 4$^{\text{ième}}$: en ce sens les tâches proposées sont volontairement complexes .

Progression annuelle et enseignement de l'idée du vrai.

L'idée essentielle est d'établir une rupture d'avec la progression traditionnelle et fort prégnante en mathématiques qui consiste à enchaîner linéairement les chapitres, les uns après les autres, de manière à ce que cette construction d'une pensée sur le vrai puisse s'enraciner dans la manière même de présenter les savoirs mathématiques.

La progression n'est pas linéaire mais essaie de mettre en réseau un certain nombre de concepts par le biais d'activités et de situations problèmes élaborées en fonction des obstacles et questionnements qui apparaissent ponctuellement chez les élèves : c'est ainsi que ces thèmes s'articulent.

Ce type de progression penche du côté de la progression dite spiralée qui a pour caractéristique de ne pas boucler une notion en un temps t, mais de l'approfondir au fur et à mesure de l'année scolaire.

La référence aux fondamentaux (qui apparaît dans ces progressions) mérite d'être explicitée. Ils sont directement en lien avec le questionnement de l'enseignant : au-delà des contenus que convient-il de développer chez l'élève ?

[267] Les supports sont visibles en annexe 5.

Pur éclairer ce que nous entendons par fondamentaux, (dont nous avons fait précédemment allusion) nous stipulons que c'est « **un réseau de notions basiques sur lesquelles se construisent les autres notions et sur lesquelles se construisent les savoirs mathématiques** » . [268]

Cette proposition s'inscrit directement dans le champ didactico-pédagogique. Elle est donc empreinte de pragmatisme, même si elle repose sur un postulat qui a du mal à s'ancrer dans les pratiques : l'acceptation de concevoir la relation d'enseignement apprentissage sous l'angle de l'inachevé et de l'incertitude.

L'introduction des fondamentaux dans l'enseignement sert de base pour construire des situations d'apprentissage de manière à ce qu'elles agissent sur les

représentations des élèves mais sans préjuger de leurs effets immédiats. Souvenons-nous des propos de M. Serres [269] quand il décrit « qu'aucun apprentissage n'évite le voyage » et « qu'apprendre lance l'errance ».

Les fondamentaux font donc un pari sur le long terme (le collège) et sur l'idée de l'évolution des représentations autrement qu'à travers l'enseignement strict des contenus, eux-mêmes orchestrés par les programmes officiels.

Ainsi donc, l'enseignant pourra t- il produire à ses élèves des activités qui les feront non plus travailler sur des micro-objectifs mais autour de niches conceptuelles de façon à favoriser la tension entre les concepts, de manière à tisser des réseaux conceptuels. Illustrons par un exemple : on favorisera un travail en réseau sur équation - fonction - formule pour faire émerger les différences de statut entre inconnue, variable et indéterminée. Cette perspective ne semble pas anodine puisque dans les commentaires des nouveaux programmes de troisième on peut lire que les équations de droites ont été supprimées précisément à cause des difficultés qu'ont les élèves à maîtriser ces différences de statut évoquées. Dans l'état actuel des programmes l'on peut donc faire le constat que la difficulté n'est pas traitée mais reléguée en classe de seconde. Aussi paraît-il intéressant et prioritaire d'outiller conceptuellement le collégien sur ce « sujet » pour qu'une approche ultérieure (des équations de droites dans l'exemple) puisse se construire sur un terrain favorable.

L'optique des fondamentaux peut alors avoir une incidence sur la progression et la gestion de la classe, mais une telle proposition se conduit dans la durée et à travers différentes activités visant les niches conceptuelles. Il serait illusoire de penser qu'une activité suffirait à atteindre les enjeux d'apprentissage. Mais, en revanche, la proposition s'intègre facilement dans le travail qu'entend mettre sur place l'enseignant, d'autant plus qu'elle ne relève d'aucune contrainte d'ordre chronologique : la liberté du professeur est alors sauvegardée.

Une mise en garde s'impose : cette proposition n'est ni un modèle théorique ni une méthode d'enseignement. Elle tend à permettre d'assurer et d'optimiser une vigilance notionnelle forte et s'inspire des travaux menés en didactique des mathématiques.

[268] Elaboration par le Groupe de recherche de mathématiques du CEPEC . (1993 - 1998) .

[269] SERRES M. - *Le Tiers Instruit* - Edition F. Bourin Gallimard. 1991 . p.28

Elle favorise un autre regard sur les savoirs mathématiques à enseigner et incite l'enseignant à identifier des zones cruciales d'apprentissage : les fondamentaux sont une modélisation pour penser l'action. Ce n'est pas un mode d'emploi prêt à appliquer. La proposition laisse à l'enseignant toute la latitude pour imaginer, créer, et réfléchir tout en assurant des points de repère qui nourrissent et interpellent ces pratiques.

Les fondamentaux orientent certainement aussi vers un autre positionnement de l'enseignement des mathématiques en instaurant un cadre, qui prend en compte et dépasse les strictes exigences officielles. Ils sont là pour guider l'action au moment des préparations des séquences et sont autant de jalons pour élaborer une progression annuelle.

A l'heure où comme le prône le document d'accompagnement des nouveaux programmes de troisième «il est essentiel que les connaissances prennent du sens par rapport aux questions que l'élève se pose» et où « une bonne articulation entre le collège et la seconde constitue un enjeu capital » les fondamentaux ouvrent une voie qui peut participer à ce que les intentions qui précèdent puissent trouver un retentissement sur le terrain.

Nous renvoyons le lecteur en Annexe 6, s'il le désire pour prendre connaissance de la présentation des fondamentaux sous forme de schéma.

Le détour par les fondamentaux entretient une proximité avec l'enseignement de l'idée du vrai dans la mesure où ils définissent mieux notre contexte didactico-pédagogique dans lequel se conçoit notre proposition de l'entrée de l'enseignement du vrai, autrement qu'à travers un travail essentiellement axé sur la dextérité à prouver.

Type de progression annuelle mise en œuvre en $4^{ième}$ (celle de $3^{ième}$ suit le même modèle) :

THEMES	FONDAMENTAUX	THEMES	FONDAMENTAUX
T1 NOMBRES ET CALCULS NUMERIQUES	Calculer - comparer égalité □ rapport nombre Raisonner	T5 TRIANGLES RECTANGLES ET CERCLES	Modéliser dessin □ figure dessin figure □ configuration géométrique
T2 TRIANGLES ET PARALLELES	Calculer - comparer égalité □ rapport nombre □grandeur Modéliser figure □ dessin □ configurations géométrique Raisonner	T6 STATISTIQUES	Calculer - comparer égalité □ rapport nombre □grandeur Raisonner exemple □ contre exemple propriété□réciproque propriété □ prouver
T3 CALCUL LITTERAL	Modéliser équation □formule □ fonction Raisonner Calculer - comparer grandeur □périmètre aire égalité	T7 TRANSLATION	Modéliser figure □ dessin configurations géom. Transformation égalité écart rapport grandeur
T4 GESTION DES DONNEES PROPORTIONNA LITE. □TRAITE TOUTE L'ANNEE	Calculer - comparer égalité □ rapport nombre □grandeur Modéliser figure □ dessin configurations géom. fonction Raisonner propriétés - théorème prouver	T8 PYRAMIDE ET CONE □ABORDE EN TR1 et en TR2	Raisonner Modéliser formule □ équation Calculer égalité □ rapport nombre □grandeur
T5 TRIANGLES RECTANGLES ET CERCLES □ ABORDE EN TR1 ; TR2 □Utilisé toute l'année	Raisonner exemple □ contre exemple propriété□réciproque propriété □ prouver		

4. Analyse du cahier de bord des élèves de 3ième E de l'échantillon en début de troisième.

Analyse du cahier de bord des élèves de l'échantillon en début de troisième.

Présentation et intentions.

Cette analyse porte sur l'échantillon composé d'élèves de 3ième E dans laquelle s'est déroulée l'expérimentation. L'échantillon est le même que depuis le début des observations à un élève près puisque l'élève identifié E003 était absent au moment de la passation de ces questions.

Les élèves ainsi étudiés ont été soumis au type d'enseignement qui s'adosse au modèle d'apprentissage constructiviste et interactionniste associé à la vision de l'enseignement de l'idée du vrai que nous défendons. Mais nous devons souligner que la recherche action dans laquelle nous nous inscrivons s'est heurtée à un obstacle d'ordre institutionnel puisque l'attribution des classes ne dépend pas de nous, mais de notre chef d'établissement qui nous a confié deux classes de 4$^{\text{ième}}$ durant l'année 1998/1999 (première année de l'application des programmes de 1995 en classe de quatrième et année universitaire correspondant à notre première année de doctorat) et pas de classe de troisième (mais deux de 6$^{\text{ième}}$). Puis durant l'année 1999/2000 nous avions deux classes de 3$^{\text{ième}}$, les mêmes qu'en 4$^{\text{ième}}$ (première année de l'application des programmes de 1995 en classe de troisième et année universitaire correspondant à notre deuxième année de doctorat) et pas de classe de 4$^{\text{ième}}$(mais toujours deux 6$^{\text{ième}}$).

En conséquence, nous n'avons pu appliquer dans notre pratique l'intégralité de nos principes d'action en classe de 4 $^{\text{ième}}$ puisque qu'il nous fallait assurer simultanément le penser, l'agir et le réflexif et que nous n'avons disposé que d'une année scolaire pour ce faire. *De fait, aucune phase de rétro action n'a pu se mettre en place.*

La mise en place de ces principes dans leur intégralité n'a été effective qu'en classe de 3$^{\text{ième}}$.

L'abord de points précis du programme de 3$^{\text{ième}}$ fut le prétexte pour engendrer les tâches demandées qui résultent d'allers et retours entre débats et réflexions individuelles. Réflexions individuelles consignées par écrit et qui, au fur et à mesure, constituent une espèce de cahier de bord de l'élève permettant de laisser une trace sur la manière dont il envisage la question du vrai tout au long de son cursus de 3$^{\text{ième}}$ (des exemples peuvent être consultés en annexe 7).

Il s'agit de repérer trois points à travers trois questions qui ont surgi respectivement en septembre 1999 (pour les deux premières) et en octobre 2000 ; ces questions faisaient suite à un travail d'élaboration du théorème de Thalès dans la configuration des triangles croisés [270] .

La formulation des trois questions ainsi que les représentations qu'il nous intéresse de repérer sont les suivantes :

<u>question1 :</u> sur quelle(s) hypothèse(s) repose la preuve que les rapports sont égaux dans la configuration des triangles croisés ?

<u>représentation 1</u> : repérer si les élèves savent identifier correctement toutes les hypothèses de départ qui permettent d'élaborer une preuve.

<u>question 2 directement liée à la question 1:</u> comment cela vous interpelle t - il par rapport à la notion de vrai en mathématiques et par rapport à la relation qu'il y a entre

[270] Nous précisons ce que cela signifie pour le lecteur non averti : le théorème de Thalès est une occasion de traiter des situations de proportionnalité dans le cadre géométrique du plan et de l'espace et s'énonce ainsi : soient d et d' deux droites sécantes en A ; soient B et M deux points distincts de A ; soient C et N deux points de d' distincts de A. Si les droites (BC) et (MN)sont parallèles, alors AM/AB=AN/AC=MN / BC

preuve et accès au vrai ?

représentation 2 : repérer si les élèves font le lien entre vrai soumis à des prémisses assumées au départ.

question 3 : quel sens cela a t - il pour vous, de dire que « quelque chose » est vrai en mathématiques ?

représentation 3 : sens du vrai du côté des élèves à cette période.

Analyse et traitement.

Le modèle d'analyse est à nouveau celui de l'analyse de tâche selon Vergnaud.

A propos de la question 1 :

sur quelle(s) hypothèse(s) repose la preuve que les rapports sont égaux dans la configuration des triangles croisés?

	Elèves sachant repérer toutes les hypothèses.	Elèves sachant repérer les hypothèses de manière incomplète.	Elèves ne sachant pas repérer les hypothèses.
1^{ier} tiers	2	5	2
2^{ième} tiers	1	7	1

Si nous avons fait intervenir le 2^{ième} tiers c'est pour vérifier si la variable niveau intervient sur ce que nous constatons .

Cette vérification faite nous constatons donc qu'en début de 3^{ième} les élèves sont capables d'identifier des hypothèses mais la proportion élevée qui ne parvient pas à les cibler toutes incite à ce que nous relevions que leur rôle peut encore poser question.

Lorsque nous approfondissons l'analyse, nous notons que l'hypothèse qui a été oubliée, une hypothèse « auxiliaire » [271] qui permet précisément d'appliquer le théorème des milieux pour prouver l'égalité des rapports (dans cette configuration des triangles croisés) :son rôle est donc fondamental puisque conditionnant le chemin conduisant au vrai via la possibilité d'appliquer le théorème des milieux.

Nous avançons donc, que si une partie du rôle que tiennent les hypothèses semble évoluer favorablement dans la mesure où la confusion entre hypothèse et conclusion n'a jamais été rencontrée dans les propositions des élèves (ce qui est très prégnant d'ordinaire, en collège), il n'en reste pas moins difficile pour eux de les « détecter » toutes. La notion de prémisse du point de vue de son existence semble être mieux assurée. Mais l'obstacle majeur demeure du point de vue de son rôle déclencheur dans l'accès au vrai en tant que conditions nécessaires, puisque les élèves ne remarquent pas que le défaut de cette hypothèse « auxiliaire », interdit la démarche de résolution.

[271] Cette hypothèse consiste à poser 2 points B' et C' tel que AB'=AB et AC'=AC dans la figure où les 2 triangles ADE et ABC ont un sommet commun et 2 droites (DE) et (BC) parallèles et où les triangles sont croisés.

Autrement dit, la question de la prémisse qui doit être assumée au départ , c'est-à-dire comme hypothèse posée et admise est évacuée.

A propos de la question 2 :

comment cela vous interpelle t-il par rapport à la notion de vrai en mathématiques et par rapport à la relation qu'il y a entre preuve et accès au vrai ?

Le corpus des données et leur format de type invoqué obligent à changer de modèle d'analyse : nous adoptons celui du découpage des textes en unités d'analyse selon la modalité de rubriques construites par écho analogique selon Van Der Maren [272] .

PREMIÈRE ÉTAPE : ANALYSE DU MATÉRIEL ET EXTRACTION DES DONNÉES.

La question étant ouverte, et pour ne pas négliger les apports des élèves, nous transcrirons dans un premier temps toutes les idées qui sont contenues dans leurs propos écrits et qui correspondent aux expressions employées par les élèves eux-mêmes en ayant éliminé le bruit de l'information.

· Elève E1 :

– on ne peut pas prouver sans hypothèse de départ.
– nécessité de fonder la démonstration sur des bases solides.
– mais avec un contre exemple, il peut y avoir plusieurs vérités qui pourtant veulent peut-être exprimer la même vérité.

· Elève E2 :

– une preuve n'existe pas sans hypothèse de départ.
– on peut accéder au vrai grâce à une démonstration car on s'appuie sur des choses que l'on connaît déjà pour prouver quelque chose.

· Elève E3 : absent.

· Elève E4 :

– une hypothèse est vérifiée si la démonstration est validée ; mais cette hypothèse est vraie seulement en partant de bases grâce auxquelles on a pu faire la démonstration.

· Elève E5 :

– c'est vrai quand la réponse est validée et justifiée et qui ne peut être contestée.
– la démonstration repose sur des hypothèses vérifiées et validées et qui ne peuvent

[272] Description détaillée en partie 4 chapitre 1 méthodologie.

être contestées.

· Elève E6 :

– pour accéder au vrai il suffit de mémoriser des théorèmes et être capable de les appliquer : mais les personnes qui arrivent à le faire sont-elles pour autant intelligentes ?
– l'intelligence ne s'arrête pas aux mathématiques mais les personnes intelligentes arrivent à accéder au vrai, et la notion de vrai n'est - elle pas valable qu'en math ? je ne le pense pas, mais une personne douée en math. saura t - elle accéder au vrai ailleurs ?
– cela paraît absurde que par un simple théorème l'on puisse accéder au vrai.

· Elève E7 :

– le vrai en math c'est ce que l'on peut prouver, que l'on peut démontrer par l'intermédiaire de théorèmes.

· Elève E8 :

– le vrai résulte d'une preuve.
– une preuve repose sur des hypothèses.

· Elève E9 :

– tout repose sur des hypothèses qui sont vérifiées pour former après des théorèmes.

Construction des rubriques qui sont autant de représentations types ciblées dans les données :

· Rubriques R1.

– la preuve repose sur des hypothèses (ou bases) admises au départ
– la reconnaissance de la preuve à accéder au vrai à travers la puissance (reconnue ou non) des théorèmes
– la découverte du rôle des hypothèses au départ comme socle
– le vrai est incontestable
– le vrai comme déclencheur de questionnement métaphysique

DEUXIÈME ÉTAPE : EXAMEN DES DONNÉES.

Tous les élèves ont répondu à la question.

Soulignons le fait que nous avons eu recours à deux entretiens séparés pour pouvoir exploiter correctement toutes les idées avancées car nous ne comprenions pas le sens de certains points précis (qui figurent ici en italique) et qui étaient avancés par les élèves E1 et E4 ; ces derniers nous donnèrent sans problème leur accord [273] (restait à vaincre la difficulté de dégager un espace temps).

Le vocabulaire est relativement ciblé et nous notons les occurrences nombreuses concernant le terme « hypothèse » ; reviennent aussi souvent les expressions « repose » « s'appuie » et « base ».

A part les deux élèves pour qui nous avons demandé une clarification terminologique et sémantique, les productions des élèves révèlent une manière de s'exprimer empreinte de

démarche hypothético-déductive. Traitant de la preuve ils paraissent rédiger suivant la forme stéréotypée du modèle de l'objet qu'ils étudient c'est-à-dire en privilégiant les enchaînements.

TROISIÈME PARTIE : TRAITEMENT DES DONNÉES ET PRODUCTION DE RÉSULTATS.

Nous remarquons que pour la majorité des élèves considérés, la notion de preuve est liée à la notion d'hypothèses du départ puisqu'en effet, la phrase « on ne peut prouver sans hypothèse de départ » a tendance à revenir comme un leitmotiv : pour autant, cette phrase revêt-elle toute sa puissance dans l'esprit de l'élève ?

Par ailleurs, l'incidence du contrat didactique n'est sans doute pas négligeable : bon nombre d'enseignants inculquent systématiquement la forme stéréotypée « hypothèses -

conclusion - démonstration » dès qu'ils travaillent cette notion de preuve.

Ce qui est intéressant c'est l'apparition des allusions « hypothèse vérifiée au départ » ou « base solide » et encore « des choses que l'on connaît déjà » pour prouver, qui annoncent la référence non seulement de la notion d'hypothèse mais bien d'hypothèse *assumée* au départ.

Il en résulte donc que les élèves s'orientent vers la nécessité de poser des prémisses assumées au départ pour prouver .

Le vrai comme résultant d'une preuve (sans autre allusion) n'est plus explicitement

[273] Nous avons donc pu élucider les propos de l'élève E1: « plusieurs vérités » qui signifiait plusieurs démarches de raisonnement possibles et aussi le fait que, prouver le faux est une vérité ; « exprimées la même vérité » qui signifiait prouver la même chose ; « contre exemple » signifiait vouloir prouver le faux . Autrement dit, l'élève avait voulu dire que pour prouver une chose donnée comme étant vraie ou fausse on pouvait prendre des chemins différents et le contre - exemple était là pour mettre en doute des hypothèses posées au départ. Concernant l'élève E4 : son intention était de faire ressortir le fait que les hypothèses ont des statuts différents : celles qui sont vérifiées grâce au raisonnement et celles qui sont vraies dès le départ (sens de : « hypothèses vraies en partant de bases ») et qui permettent de produire un raisonnement (« grâce auxquelles on a pu faire un raisonnement »).

mentionné ce qui peut traduire aussi une amorce de réflexion chez les élèves concernant le trio hypothèses - preuve - vrai puisque dans le même temps l'on voit bien apparaître dans les rubriques la liaison preuve - hypothèse .

Nous remarquons également que la notion de preuve s'associe avec le pouvoir (admis ou non d'ailleurs) des théorèmes ; signe de l'avancée du lien entre hypothèses - théorèmes - vrai.

La mise en évidence des différents statuts des hypothèses est révélateur de l'évolution qui s'amorce quant au rôle de la notion d'hypothèse.

Tandis que la représentation du « vrai incontestable » est en perte de vitesse, il y a une rubrique qui atteste que la question du vrai en mathématiques peut déclencher une réflexion tout à fait pertinente qui déborde du cadre mathématique, et nous la pointons particulièrement, dans la mesure où elle montre que l'élève peut s'emparer du vrai en mathématiques pour le penser en regard de préoccupations ontologiques et aiguiser sa pensée critique : être capable d'accéder au vrai en mathématiques est-il un indicateur de l'intelligence ? Le vrai existe t - il en dehors des mathématiques ? Le fait d'être bon en mathématiques confère t-il à l'être le pouvoir d'accéder au vrai en dehors du champ mathématique ?

A propos de la question 3 (abordée fin octobre):

quel sens cela a t-il pour vous, de dire que quelque chose est vrai en mathématiques ?

PREMIÈRE ÉTAPE : ANALYSE DU CONTENU.

Nous avons déterminé des unités d'analyse correspondantes à chaque phrase écrite par l'élève (les textes présentés dans leur ensemble représente une demi - page d'écrits grand maximum). Nous les avons réparties en rubriques différentes par écho analogique [274] , puisque nous n'avons pas de modèle à priori pour les exhiber des textes des élèves étant donné le format de nos données de type invoqué.

Ces rubriques sont directement localisées en troisième étape pour pouvoir produire des résultats et symbolisent l'ensemble des représentations types repérées .

Pour déterminer ces rubriques, nous livrons auparavant les phrases sélectionnées et relevées qui ont permis de les établir.

- Elève E1 :

– il n'y a pas une réponse mais DES points de vue.
– la vérité peut être exprimée avec des points de vue différents, sous des angles différents ; dans les math. ou dans la vie courante, la vérité est interprétée

[274] Nous spécifions par là en empruntant les propos de Van Der Maren que *« ce sont les passages du texte qui suggèrent les rubriques plutôt quelles n'y répondent : ils éveillent des échos dans les connaissances du chercheur. Les éléments qui permettent progressivement d'identifier le modèle de l'objet, ou d'en construire un modèle composite, surgiront donc au fur et à mesure de l'analyse »* opus cit. p. 429.

différemment selon les personnes ; plusieurs individus expliquent les mêmes faits avec des points de vue différents, des arguments différents.

- Elève E2 :
  - quelque chose est vrai tant qu'on n'a pas pu prouver le contraire.
  - une chose est vraie ou fausse en établissant un raisonnement qui permet de trancher.
  - la valeur du vrai dépend de la validité du raisonnement, des idées ou des arguments qui permettent de débattre.
- Elève E4 :
  - quelque chose est vrai en math si c'est accepté par une assemblée.
  - point de vue qui se base sur des théorèmes, des outils qui eux - mêmes sont considérés comme vrais.
  - une personne qui n'a pas le même point de vue peut réfuter en prouvant qu'il a raison s'il part sur d'autres bases qui sont considérées comme toutes aussi validées.
- Elève E5 :
  - le vrai en math. est quelque chose qui ne peut être contesté car ce n'est pas comme dans la vie quotidienne où c'est l'exception qui confirme la règle ; non, au contraire, s'il y a un seul contre exemple, ce quelque chose n'est plus vrai.
- Elève E6 :
  - peu de sens ce vrai en math. car il suffit d'un contre exemple pour démolir tout un théorème ; et même si certains sont très vieux, ils ne sont pas à l'abri de quelqu'un qui trouvera un jour un contre exemple ; la vérité d'un théorème est bien fragile.
- Elève E7 :
  - quelque chose est vrai en math. quand il n'y a pas de contre exemple possible, quand c'est prouvé auparavant par des mathématiciens ; pas toujours, exemple de Aristote qui fait abandonner l'idée d'atomes pendant vingt siècles ;
  - peut-être que quelqu'un trouvera un jour un contre exemple au théorème de Pythagore ou de Thalès ?
- <u>Elève E8 :</u> aucune réponse

· Elève E9 :

- le vrai n'existe pas vraiment car dans un problème, il peut y avoir plusieurs solutions valides, il n'y a pas de solution vraie.
- le vrai n'est qu'une imagination de l'homme car les théorèmes, les figures, les hypothèses ce sont les hommes qui les ont crées.
- les hommes sont des robots car les mathématiciens leur disent des théorèmes ou des règles de calcul et tout le monde applique ceci sans rien dire alors que cela pourrait très bien être faux malgré les bonnes démonstrations car les démonstrations sortent de l'intelligence de l'homme.

Constitution des rubriques qui sont autant de représentations types chez les élèves de 3ième E

· Rubriques R2.

- L'hypothèse peut inférer sur le types de preuve à mettre en œuvre.
- Dépendance de l'hypothèse sur la conclusion.
- Le vrai en référence aux principes de rationalité.
- Le vrai peut se transformer en faux (représentation obstacle)
- Un contre-exemple peut invalider un théorème (représentation obstacle)
- Le vrai à travers une vision ou un questionnement à tendance épistémologique.

DEUXIÈME PARTIE : EXAMEN DES DONNÉES.

Les textes des élèves sont de plus en plus longs.

Tous les élèves ont émis une réflexion à l'exception d'un qui n'a pas mentionné de raison particulière pour en rendre compte .

Les tournures des élèves ne présentent pas de difficulté majeure au niveau de la compréhension sauf pour deux élèves à qui nous avons demandé une clarification sémantique en entretien.

Dans l'ensemble, les élèves avancent un argument (au maximum) et le développe : c'est au cours du développement que peut se greffer d'autres éléments fondateurs de leur représentations.

Les représentations mises à jour dans cette étude commencent à être distribuées plus uniformément chez les élèves .

TROISIÈME ÉTAPE : TRAITEMENT DES DONNÉES ET PRODUCTION DE RÉSULTATS.

Nous observons qu'il y a 4 représentations types nouvelles qui ressortent nettement que nous allons plus précisément détailler.

Les deux premières se résumeraient ainsi : deux élèves (E1 et E4) [275] avancent respectivement que la vérité peut s'exprimer avec des façons de penser différentes à partir d'hypothèses différentes autrement dit, plusieurs individus expliquent les mêmes conclusions à partir de façons de penser différentes et une manière différente d'organiser des hypothèses. Ils précisent en outre que si l'on ne part pas des mêmes hypothèses, l'on va arriver à des conclusions différentes.

Autrement dit, ils reconnaissent qu'il n'y a pas le chemin d'accès au vrai mais des chemins différents et que le vrai dépend étroitement des prémisses assumées au départ. **Nous y voyons là une avancée vers le lien vrai et contexte, au sens d'ensemble d'hypothèses assumées au départ** (l'élève E4 emploie même l'expression « vrai :accepté par une assemblée » qui renvoie bien à cette idée de consensus par rapport à des règles, pour trancher).

La seconde représentation qui semble marquante pour quatre élèves est **la liaison du vrai avec la notion de prouver le faux** en référence explicite ou non à la notion de contre exemple : est vrai ce qui n'a pu être contré par un contre exemple.

Elle souligne le fait que le vrai fait directement écho à un des principes de rationalité en mathématiques qui s'est avéré, de plus en plus mobilisé tout au long des années scolaires de 4^{ième} et de 3^{ième} (mais qui n'a pas fait l'objet d'un travail spécifique).

La troisième représentation type est elle-même composée par trois sous ensembles de représentations et concernent les élèves E6, E7 et E9.

L'élève très dubitatif quant à l'obtention du vrai grâce à l'application de théorèmes, (E6 du mois de septembre) a encore du mal à accepter les principes de rationalité mathématique et affiche toujours le même scepticisme quant au statut des théorèmes puisqu'il livre que ceux-ci ne sont pas à l'abri de contre-exemple : assurément cet élève méconnaît que *« un théorème valide ne décrit pas un fait habituel mais donne un énoncé certain* » [276] .

On retrouve cette « pensée » également chez l'élève E7. Dans un premier temps, cela peut être un indicateur soit de la mauvaise compréhension du statut du théorème en regard de l'idée du vrai, soit de la mauvaise compréhension de la notion de contre exemple, soit de la non différenciation entre théorème et hypothèse, soit de la confusion entre la rationalité mathématique et la rationalité physique (référence à la notion de réfutation poppérienne) ou encore de la non différenciation entre théorème et postulat ou d'une conjonction de ces causes. Dans un deuxième temps, en ce qui concerne l'élève E7, si l'on prend en considération la phrase sur Aristote, on pourrait se demander si cet élève ne met pas en évidence l'idée implicite, qu'à partir du moment où l'on pose une

[275] Nous rappelons que nous avons eu un entretien de clarification avec ces élèves pour qu'ils précisent mieux leur pensée oralement en nous livrant des synonymes. Pour l'élève E1 : pour « point de vue » : façon de penser , façon de raisonner ; « angles différents » : à partir d'hypothèses différentes ; « fait » : ce que l'on veut prouver (conclusion) « argument » ; organisation d'hypothèses qui s'enchaînent et qui servent à prouver la conclusion. Pour l'élève E4 : « point de vue » : conclusion à laquelle on arrive au bout d'une preuve.

[276] DE VERCLOS F. - *Logique assurément , élémentaire pas si sûr...* - in Pratiques math n° 30 Mars 1999 p.28.

hypothèse fausse l'on arrive à développer une pensée fausse, ce qui serait illustré par l'exemple auquel il se réfère (même s'il appartient au champ physique). Néanmoins, l'obstacle lié au statut du théorème surgit à nouveau puisqu'il évoque le contre exemple comme source d'invalidation d'un théorème.

Il en résulte que ce qui caractérise ces **deux élèves c'est qu'ils pensent que du vrai en mathématiques peut se transformer en faux** ce qui pour nous est révélateur, de la prégnance de l'obstacle épistémologique du type : si le vrai (d'une conclusion) est établi à partir de prémisses assumées au départ, il ne peut être contesté et que seul un changement au niveau des prémisses peut aboutir à du faux ou à une autre conclusion.

L'élève E9 qui déclare que le vrai en mathématiques n'est qu'une illusion parce que invention humaine met en évidence, outre le scepticisme fort en la fiabilité des cerveaux des mathématiciens, le détachement total par rapport aux principes de rationalité mathématique : le mathématicien artisan du vrai se meut dans un univers sans contrainte guidé par sa seule raison. Cette vision est renforcée nous semble t-il par la distinction que fait cet élève entre solution valide qui n'est pas solution vraie. **Il semble clair à nouveau que la notion de vrai en regard d'un contexte (au sens d'ensemble de prémisses assumées au départ) et du référent (au sens d'ensemble des principes de rationalité mathématique) se pose encore en obstacle.**

Néanmoins, pour la deuxième fois, l'on peut observer qu'à partir d'une réflexion sur le vrai, la présence de l'homme est invoquée. Cette fois-ci c'est sa raison qui fait l'objet d'un problème pour l'élève et qui a un retentissement sur le pouvoir des mathématiques. En quoi le raisonnement mathématiques est-il fiable ? Quel crédit accorder à une pensée mathématique qui se fonde sur l'imagination de l'homme ?

La résurgence du terme validité traitée en parallèle de la question du vrai pointe que la réflexion dans le champ de l'épistémologie semble latente. La position qu'adopte l'élève sur le sujet « pas de solution vraie » mais des solutions valides souligne la prise de conscience de vrai en fonction de...

Conclusions.

Clarification préliminaire nécessaire à la compréhension des conclusions.

Les conclusions de cette étude portant sur les élèves de début de $3^{ième}$ doivent donc être lues en fonction de la contrainte qui nous a été imposée institutionnellement et que nous avons rappelée au début de cette étude.

Enoncé des conclusions des études sur l'échantillon des élèves de début de $3^{ième}$ selon les conditions d'expérimentation pré citées.

Résumons d'abord les représentations fortes qui émergent chez les élèves de $3^{ième}$E fin octobre et que nous avons rencontrées depuis le début de $3^{ième}$ E en les classant en deux groupes :

- les représentations conformes au modèle mathématique :

- la preuve repose sur des hypothèses (ou bases) admises au départ
- la reconnaissance de la preuve à accéder au vrai à travers la puissance (reconnue ou non) des théorèmes
- la découverte du rôle des hypothèses au départ comme socle
- le vrai est incontestable
- le vrai comme déclencheur de questionnement métaphysique
- dépendance de l'hypothèse sur la conclusion.
- le vrai en référence aux principes de rationalité.

· les représentations non conformes au modèle mathématique :

- le vrai peut se transformer en faux (sans allusion aux prémisses) (représentation obstacle)
- un contre-exemple peut invalider un théorème (représentation obstacle)

Récapitulation de cette étude en regard des critères que nous avons posés a priori pour évaluer l'évolution de ces représentations :

· la présence ou non de l'évocation des prémisses dans leur vision de l'idée du vrai ; manière dont ils conçoivent le rôle de ces prémisses.

Si la reconnaissance de la présence de la notion d'hypothèse (ou prémisse) tient une place importante dans la représentation des élèves, le rôle de l'hypothèse et le fait qu'elle ne doit pas seulement exister mais être vérifiée ou assumée ne semble pas encore tenir une place notable.

· leur capacité à mobiliser la référence aux principes de rationalité dans leur vision du vrai et leur « perception » par rapport au sens des (ou du) principe(s) de rationalité que les élèves mobilisent .

Certes, la mobilisation du contre exemple est relativement spontanée mais sa contribution dans l'accès au vrai est parfois mal cerné du point de vue de la relation avec la notion de prémisse assumée.

· mise en évidence et analyse des idées fortes repérées pour esquisser leur paysage de l'idée du vrai.

La présence conjointe de représentations conformes et non conformes au champ mathématiques est révélateur que cette question du vrai est loin d'aller de soi chez les élèves.

Les représentations non conformes que les élèves ont pu faire émerger en 3ième nous apportent un éclairage intéressant pour enrichir la recherche de l'enseignement de l'idée du vrai et pour émettre des conclusions.

Conclusion 1 :

La persistance de représentations non conformes au modèle mathématique confirme tout naturellement la nécessité de situer l'apprentissage dans le temps et la difficulté de l'objet d'enseignement. Prendre comme objet d'enseignement , l'idée du vrai en mathématiques, soulève d'autres obstacles que d'enseigner seulement le théorème de Pythagore !

Conclusion 2 :

Cette persistance de représentations non conformes au modèle mathématique peut aussi prendre son origine dans le fait même que les principes élaborés ont été balayés mais n'ont pas bénéficié d'une réelle mise en œuvre par le biais d'une mise en place effective d'un assez grand nombre de situations didactiques cruciales riches et variées.

Nous pouvons remarquer la carence au niveau notamment du travail sur le contre exemple, dont l'utilisation a été systématique mais qui n'a pas fait l'objet d'un travail spécifique en regard de la notion des prémisses assumées au départ .

Nous pouvons remarquer également la même carence en ce qui concerne le travail autour du statut du théorème et de sa différenciation d'avec une simple hypothèse (qui renvoie au rôle et au statut des prémisses qui n'a pas été abordé selon un travail de fond en $4^{ième}$).

Conclusion 3 :

En dernier lieu, cette persistance de représentations non conformes au modèle mathématique invite à élargir la réflexion et à déduire que l'application intégrale de tous les principes élaborés est sûrement nécessaire.

5. Modélisation de l'idée du vrai selon notre thèse.

Montrons comment s'articule l'enseignement de l'idée du vrai dans la modélisation du traitement actuel de l'enseignement de l'idée du vrai .

Sous l'hypothèse que le paradigme de l'apprentissage soit comportementaliste nous postulons que l'idée même de l'enseignement de l'idée du vrai est absente tant le modèle d'imitation qu'il induit ne fait qu'encourager une pensée dogmatique sur le sujet, pédagogiquement et didactiquement parlant.

Nous présupposons donc au moins que le paradigme d'apprentissage est socio-constructiviste : mais est-ce une garantie en soi ?

Non, car pour autant, le statut du vrai peut tout aussi bien rester de type « savoir outil », et l'axe pour développer l'idée du vrai ne peut être conçu qu'à travers une visée didactique qui consiste à entraîner à la rédaction de preuve (sous couvert, au mieux, d'un travail sur l'heuristique). Visée didactique sous-tendue par une visée épistémologique qui privilégie l'association vrai / preuve avec certes, une garantie pédagogique, basée sur l'interaction entre élèves.

Il n'en reste pas moins, que l'élève n'a pas plus d'espace pour penser les limites d'un enseignement déductif (de la géométrie par exemple) puisque *« on ne peut démontrer la vérité d'un énoncé qu'à partir de celle d'autres énoncés déjà connus pour vrais et si l'on veut tout démontrer, on sera conduit là aussi à une régression à l'infini, il faut donc admettre sans démonstration certains énoncés, ce seront les axiomes* »[277] .

Quand la prise en compte des difficultés (et non des obstacles) est mise à jour, elle peut se traduire, à l'endroit des élèves, par l'avancée d'expressions du type: difficulté à raisonner, problèmes de logique, confusion entre hypothèse et conclusion ce qui peut avoir pour conséquence un renforcement du travail axé sur la rédaction de preuve et sur le référent du vrai ; c'est-à-dire un travail d'entraînement au fonctionnement des principes de rationalité. Il s'agira d'une pédagogie expositive des principes de rationalité. On privilégie leur énoncé explicite ainsi que leur utilisation régulière, mais en présupposant qu'ils sont admis (allant de soi, compris et intégrés) par les élèves de 4ième et de 3ième, sous prétexte que depuis qu'ils font des mathématiques, « cela marche comme cela ».

Nous y voyons là encore une approche à tendance dogmatique de l'idée du vrai dont l'intention consiste à rendre performant les élèves par rapport à la dure entreprise de l'élaboration d'une preuve sans souci réel de développer une *pensée sur l'idée du vrai en mathématiques.*

Ainsi donc, la perspective socio-constructiviste dans laquelle s'inscrit un travail sur la question du vrai n'est-elle pas une garantie en soi, pour penser l'enseignement de l'idée du vrai autrement qu'à travers la performance à savoir prouver. Elle s'avère être une condition nécessaire, certes, mais non suffisante.

Considérons alors de quelle manière une pratique soucieuse d'intégrer les principes d'actions énoncés prend de la distance par rapport à la modélisation de l'enseignement actuel de l'idée du vrai.

Sans nul doute, l'approche de l'enseignement de l'idée du vrai est en rupture par rapport à celle qui transparaît dans la modélisation de l'enseignement actuel dans la mesure où, d'une part, le modèle d'apprentissage avancé se réclame du modèle socio-constructiviste exclusivement et que d'autre part, sa visée est compréhensive : elle tend à ***développer une pensée sur le vrai en mathématiques chez les élèves en questionnant cette idée du vrai* .**

L'intention est certes de faire entrer les élèves dans une démarche de « sensibilisation » par rapport à l'idée du vrai de manière moins dogmatique.

L'articulation des principes clés dans les champs didactique, mathématique et pédagogique en témoigne dans la mesure où l'enseignement est orienté par des axes forts.

Le statut du vrai subit également une transformation puisque sans négliger d'être un savoir outil, il prend aussi le statut de savoir objet et du même coup transforme le statut de l'élève par le passage de l'élève acteur reproduisant des attentes vers le statut de personne apprenante. L'utilisation de l'idée du vrai, via un travail sur la preuve, en faisant

[277] ARSAC G. - *Les limites d'un enseignement déductif de la géométrie* in Petit X n° 47- IREM de Grenoble - 1997 - 1998 . p.7.

fonctionner les principes de rationalité est encore présente, mais l'idée du vrai comme objet est abordée notamment à travers le travail de co-élaboration de manière constructive des critères de validation d'une preuve ou à travers la prise en compte de la dimension historique dans la constitution de l'idée du vrai mettant les élèves face à la notion de prémisses assumées au départ.

- dans la modélisation de l'enseignement actuel du vrai :

  – soit l'idée de développer chez l'élève une pensée sur le vrai est absente.
  – soit l'idée seule de l'enseignement de l'idée du vrai est présente via l'enseignement de la preuve.

- dans l'apport des principes clés sous-tendus par les principes régulateurs et les principes d'action :

  – l'idée de développer chez l'élève une pensée sur le vrai est présente et elle tend à garantir une meilleure congruence avec la clarification du vrai établie.

Des apports de la nouvelle modélisation.

Nous proposons une modélisation du traitement de l'idée du vrai dans l'enseignement au service d'un nécessaire changement du rapport au vrai chez les élèves.

Développer une pensée sur l'idée du vrai en mathématiques chez les élèves pour engendrer une prise de distance par rapport au pouvoir magique de la preuve. Pour interroger cette fascination que d'aucuns accordent au raisonnement hypothético-déductif. Entrevoir ses limites pour mieux en accroître la maîtrise.

Développer une pensée sur l'idée du vrai chez l'élève pour mieux les aider à « *penser scientifiquement* [c'est à dire] *se placer dans le champ épistémologique intermédiaire entre théorie et pratique, entre mathématiques et expérience. Connaître scientifiquement une loi naturelle c'est la connaître à la fois comme phénomène et comme noumène ».* [278] Risquons l'analogie en regard de notre objet d'étude, le phénomène serait la preuve et le noumène ce que véhicule la preuve, en somme l'idée du vrai.

Développer une pensée sur le vrai chez les élèves pour aider à renouveler ou à appréhender leur vision du monde pour les inviter à méditer que « *dans tous ses principes, la raison orthodoxe peut-être dialectisée par des paradoxes* » [279] et leur laisser entrevoir que « *c'est la nécessité de comprendre le devenir qui rationalise le réalisme de l'être* » [280] .

[278] BACHELARD G. - *La philosophie du non* - Edition PUF - 4ième édition - 1994 - p.5

[279] Ibidem p.16.

[280] Ibidem p.28.

Nous soulignons cependant que notre proposition s'inscrit dans une volonté de prolonger ce qui existe et non pas de gommer l'existant. L'enseignement de l'idée du vrai n'est pas un objet d'étude objectif, il n'existe pas comme réalité théorique, il existe, pensons nous, parce qu'il fait sens. Et le sens ne se réfère pas à une injonction de vérité mais à une possibilité de faisabilité.

En d'autres termes, nous postulons l'hypothèse qu'il est nécessaire d'adjoindre au modèle existant du traitement du vrai, celui que notre modèle propose. Modèle qui lui-même s'inspire des principes régulateurs et d'action élaborés.

Changement de la problématique.

Nous soutenons que la modélisation de l'enseignement actuel de l'idée du vrai reste river sur l'entraînement à la recherche constante du vrai, confortant l'amalgame vrai et preuve sans souci épistémologique. Elle établit finalement un repli sur le champ des mathématiques scolaires au sens où elle confine l'enseignement des mathématiques dans une visée principalement utilitariste dénuée de sens sur la question du vrai. En cela elle est contestable.

Il nous paraît incontournable de défendre l'idée qu'en effet « *comprendre, cela consiste à saisir la place qu'occupe une idée ou un fait dans une structure de savoir plus vaste. Lorsque nous comprenons quelque chose, nous le comprenons comme faisant partie d'un cadre conceptuel ou d'une théorie plus large ».* [281]

La modélisation que nous entendons joindre à la précédente consiste à prendre en compte la problématique de la quête du sens de l'idée du vrai. Elle, introduit le versus rapport au monde à travers cette volonté de développer une pensée sur l'idée du vrai . En somme, nous affichons la position qui consiste à faire passer les élèves du « second monde » [282] , celui des croyances personnelles et des opinions, au « troisième monde » celui du savoir justifié. Mettre en avant cette problématique c'est donc « *considérer que l 'enseignement devrait aider les enfants à saisir la différence entre, d'une part, ce qui est savoir personnel et, d'autre part, « ce que l'on doit savoir » selon la culture. Mais ils ne doivent pas seulement saisir cette distinction ils doivent également en comprendre le fondement dans l'histoire du savoir* » [283] .

Le paradigme de l'apprentissage.

Notre nouvelle modélisation exclut totalement le paradigme comportementaliste. Nous citerons simplement à nouveau Bruner pour renforcer notre position : « d*es études consacrées à l'expertise montrent que si l'on apprend seulement comment réaliser quelque chose de manière adroite, on n'atteint pas le degré d'adresse souple et*

[281] BRUNER J. - *L'éducation entrée dans la culture . Problème de l'école à la lumière de la psychologie culturelle* - Edition Retz - 1996. p.8.

[282] Nous empruntons l'expression à Popper.

[283] BRUNER J. opus cit. p.82.

adaptable auquel on atteint en apprenant par une combinaison de pratiques et d'explication conceptuelles : un bon pianiste a besoin de bien plus que ses mains intelligentes ; il a également besoin de connaître un certain nombre de choses sur l'harmonie, le solfège et la structure mélodique.

Aussi, une simple théorie de l'apprentissage par imitation convient à une société « traditionnelle » (et à y regarder de plus près d'ailleurs, les choses ne sont pas si simples) cela ne saurait suffir à une société plus avancée. » [284]

Enseigner à prouver par imitation c'est-à-dire interdire la dévolution de la démonstration aux élèves, et ne les confronter qu'à des « modèles » de démonstrations ne renseigne en rien l'élève sur les tenants et les aboutissants de la démonstration. L'on comprend aisément qu'enseigner l'idée du vrai de cette manière ne génère pas le développement d'une pensée sur le vrai sinon celle qu'en mathématiques « on passe son temps à prouver sans savoir pourquoi ni comment : les mathématiques c'est vraiment un monde à part et pas rassurant». [285]

Bruner nous le rappelle, la perspective d'enseignement adoptée n'est jamais innocente. Elle porte en elle-même un message et elle véhicule des enjeux. La persistance à vouloir faire entrer le développement d'une pensée sur l'idée du vrai en collège affiche un enjeu

d'ordre sociétal. Nous nous efforcerons de le clarifier ultérieurement.

Dans la modélisation que nous proposons il émerge de manière explicite la notion d'obstacles respectivement didactique, à la rationalité et épistémologique.

Les obstacles didactiques sont là pour mettre en évidence que le paradigme de l'apprentissage socio-constructiviste ne se comporte pas en argument d'autorité qui sous entendrait qu'il existe le bon modèle d'apprentissage sans faille. A lui seul, ce modèle ne garantit pas une optimisation du développement d'une pensée sur le vrai chez l'élève. Il se conduit comme une condition nécessaire pour ce que nous visons.

Les obstacles didactiques rappellent que si l'enseignant est peu enclin à exercer une pensée métacognitive sur ses actions, il est l'artisan de ces obstacles.

Les obstacles à la rationalité pointent le fait d'une part, que si enseigner l'idée du vrai interpelle à priori la raison, il n'en demeure pas moins que la résonance tant du point de vue philosophique que psychologique s'avère tout aussi réelle. D'autre part, que ces obstacles à la rationalité font aussi bien partie du panorama mental de l'enseignant que

de celui de l'élève.

Enfin les obstacles épistémologiques font référence à ce que nous avons pointé lors de l'étude des productions des élèves de fin de 4$^{\text{ième}}$ et qui furent à l'origine de l'élaboration de nos principes clés. Retenons en substance, en premier lieu, que si le tiers exclu était présenté comme un argument d'autorité il se comportait en obstacle au développement de l'idée du vrai et qu'en deuxième lieu, les élèves évacuaient le rôle et le

[284] BRUNER J. opus cit. p. 74

[285] Parole d'élève .

statut des prémisses assumées au départ dans l'accès au vrai en pensant que si une démarche est valide c'est suffisant pour prouver le vrai.

Nouveau statut de l'idée du vrai.

Dans notre nouvelle modélisation nous postulons la nécessité de considérer l'idée du vrai comme savoir objet adjointe bien entendu au statut de savoir outil que l'idée du vrai revêt automatiquement officiellement [286] .

Cependant le passage entre les deux statuts n'a encore pas fait l'objet d'une clarification : le prochain point apportera notre réponse.

Passage de l'objet d'étude «le référent du vrai » à l'objet d'étude « le vrai du référent ».

Outre un jeu de mots où se trouve l'apport ?

Et bien essentiellement dans le renversement de l'optique didactico-pédagogique : il ne s'agit plus d'exposer des principes de rationalité même dans une visée compréhensive mais il s'agit de travailler ce sur quoi se fonde le vrai.

En d'autres termes, de promouvoir une pédagogie des fondements des principes de rationalité : sur quoi se fonde le principe du tiers exclu ? Sur quoi se fonde le contre exemple ? Pourquoi le principe d'induction n'est-il pas valide en mathématiques [287] ? Comment s'articule en fait entre eux tous ces principes ?

Il s'agit de mettre en exergue le rôle et le statut des prémisses assumées au départ et non plus d'entraîner seulement à formuler des conjectures.

Cela veut dire travailler cette notion de prémisses assumées au départ, comme constitution de la notion de contexte (qui permet de construire une preuve) en lien avec la notion de référent comme ensemble de principes de rationalité.

Il s'agit d'articuler ce rôle et ce statut des prémisses assumées au départ aux principes de rationalité pour développer une pensée sur le vrai et ne plus se cantonner à développer l'entraînement à la preuve sans questionner les soubassements d'une telle activité.

Cela revient à dire que nous envisageons dans le développement de cette pensée sur l'idée du vrai deux composantes : une théorique et une pratique.

La première est spécifique de la modélisation que nous proposons et tire son appellation du fait même qu'elle interroge les fondements de l'idée du vrai en invitant à penser « les dessous » des principes de rationalité. En cela nous sommes dans la mouvance des propos de M. Fabre quand il stipule que *« le savoir scolaire, ne se donne t*

[286] L'étude des programmes en témoigne.

[287] Rappelons que nous sommes en collège et que nous évacuons la pensée de Poincaré à ce sujet en ce qui concerne sa vision du raisonnement par récurrence en lien avec le principe d'induction : ce qui peut d'ailleurs faire l'objet d'une introduction à la limite de ce principe en collège eu égard à la méconnaissance de ce type de raisonnement.

- il pas , de manière privilégiée, sous l'aspect de propositions considérées comme « vraies » mais le plus souvent déconnectées et sans lien avec les problèmes dont elles constituent les solutions ? Ce propositionnalisme scolaire incarne le refus d'un véritable savoir théorique qui seul pourrait conférer aux apprentissages leur pleine signification ». [288] Comprendre les fondements théoriques de l'idée du vrai peut en effet aider à mieux gérer son application systématique, à laquelle doit se plier tout collégien, en s'essayant à l'exercice de rédaction de preuve.

En outre, cela ouvre sur des propositions de réflexion qui nous semblent constitutives d'une culture mathématique susceptible d'intervenir sur « l'émancipation démocratique » de l'élève.

De plus, ce que suggère aussi pour nous, ce terme de théorique c'est qu'il renvoie à un traitement de l'idée du vrai, dont la finalité n'est pas d'exercer à la rédaction de preuve (même s'il contribue à cet apprentissage pour l'élève) et dont l'illustration par des situations didactiques ne sera pas celle qui correspond à ce qui existe dans les manuels.

La seconde composante est déjà apparue au niveau de l'élaboration des principes clés : elle consiste à faire vivre concrètement la nécessité d'élaborer des prémisses

de départ et des « garde fous » (allusion au référent : ensemble des principes de rationalité) pour entreprendre une démarche d'accès au vrai. Elle privilégie en cela l'étude conjointe du contexte et du référent qui, dans l'enseignement actuel font l'objet d'une utilisation régulière et systématique sans faire l'objet d'une étude particulière tant l'implicite est fort en ce domaine. L'enseignant considère que l'élève sait définir un contexte, qu'il maîtrise les principes de rationalité et qu'il y adhère, ce qui précisément, n'est pas une hypothèse assumée au départ dans l'enseignement des mathématiques en $4^{\text{ième}}$ et $3^{\text{ième}}$.

Il nous semble aussi que ce changement de perspective dans le mode d'enseignement de

l'idée du vrai exhibe la différence entre être un scientifique (au sens large) et apprendre la science. Pour satisfaire la première condition, il s'agit d'entrer dans une culture qui donne à « épouser » une construction parfois non rationnelle de la signification, ce que bon nombre d'enseignants en mathématiques n'envisagent pas.

Trois points essentiels :

1. enseigner ce qui est en amont des principes de rationalité mathématique en privilégiant l'étude sur le contre exemple et le tiers exclu en abordant la question du rôle (conditions pour établir le vrai) et du statut (comme constituant un contexte) des prémisses assumées au départ.
2. enseigner la notion de contexte et de référent en lien avec la question des prémisses assumées au départ et les principes de rationalité mathématique (comme instauration du référent).
3. éveiller le regard épistémologique de l'élève au sujet de la question du vrai en

[288] FABRE M. - *Situations problèmes et savoir scolaire* - Edition PUF- 1999 - p. 48.

mathématiques.

Statut de l'élève.

Nous avons évoqué ce changement de statut que propose notre modélisation lorsque nous entendions dépasser la modélisation de l'enseignement de l'idée du vrai [289] .

Nous ajoutons simplement que cette nouvelle vision de l'élève découle des fondements concernant la nature de l'esprit de celui qui apprend et de notre vision de l'éducation comme le décrit Bruner : « [...] l'*éducation n'est pas seulement un travail technique visant à un traitement correct de l'information, pas plus qu'elle n'est simplement l'occasion d'appliquer des « théories de l'apprentissage » à la classe ni qu'elle ne consiste à utiliser les résultats des « tests de réussite » dans chacune des disciplines. Il s'agit plutôt de la tentative complexe d'adapter une culture aux besoins de ses membres et d'adapter ses membres et leur manière d'apprendre aux besoins de la culture* ». [290]

Posture de l'enseignant.

Les types de représentations qui figurent à ce propos sont déduits de l'enquête restreinte par questionnaires que nous avons menée.

Les représentations de l'enseignant sont autant d'obstacles qui peuvent eux-mêmes générer des obstacles didactiques ou donner un éclairage pour comprendre à quoi peuvent être dus les obstacles à la rationalité chez l'enseignant.

Par rapport aux deux modélisations, elles demeurent identiques à priori. Néanmoins, les représentations influent sensiblement sur le rapport à l'idée du vrai de l'enseignant ce qui signifie que si l'on veut se soucier de l'enseignement de l'idée du vrai en collège au sens de développer une pensée sur le vrai, la question de la réflexivité du propre rapport de l'enseignant est certainement déterminant pour ses pratiques.

Primat des visées didactique, épistémologique, pédagogique et anthropologique.

Au sujet du primat de la visée didactique, nous mettons l'accent sur la dévolution du vrai aux élèves : l'enseignant laisse à la charge de l'élève quand il l'a décidé la charge d'apprendre. Ce qui sous entend que l'enseignant met à disposition des élèves des situations, autrement dit, ouvre un espace dans lequel les élèves émettent, produisent et communiquent ce qui deviendra des connaissances.

La transposition didactique, servant à rappeler la vigilance à soutenir pour que l'objet d'enseignement ne soit pas à ce point dénaturé de la référence au savoir savant qu'il n'y ait précisément plus rien à enseigner.

C'est pour cette raison que le primat de la visée épistémologique suit : le

[289] Nous renvoyons le lecteur à la partie 3 chapitre3 paragraphe 2°).

[290] BRUNER opus cit. p.62.

questionnement de l'idée du vrai ainsi que son ancrage historique nous semble un garde fou intéressant pour maîtriser la transposition didactique que nous avons rappelée précédemment. De même que cette visée épistémologique tend à rendre l'élève en phase avec l'idée du vrai puisqu'elle lui permettra de découvrir les questions auxquelles les mathématiques (par l'intermédiaire de cette question du vrai) répondent ; les méthodes dont est doté ce savoir pour y répondre (la notion de preuve entre autres) ainsi que les grandes questions qui le structure (la notion de modélisation et la question du vrai par exemple).

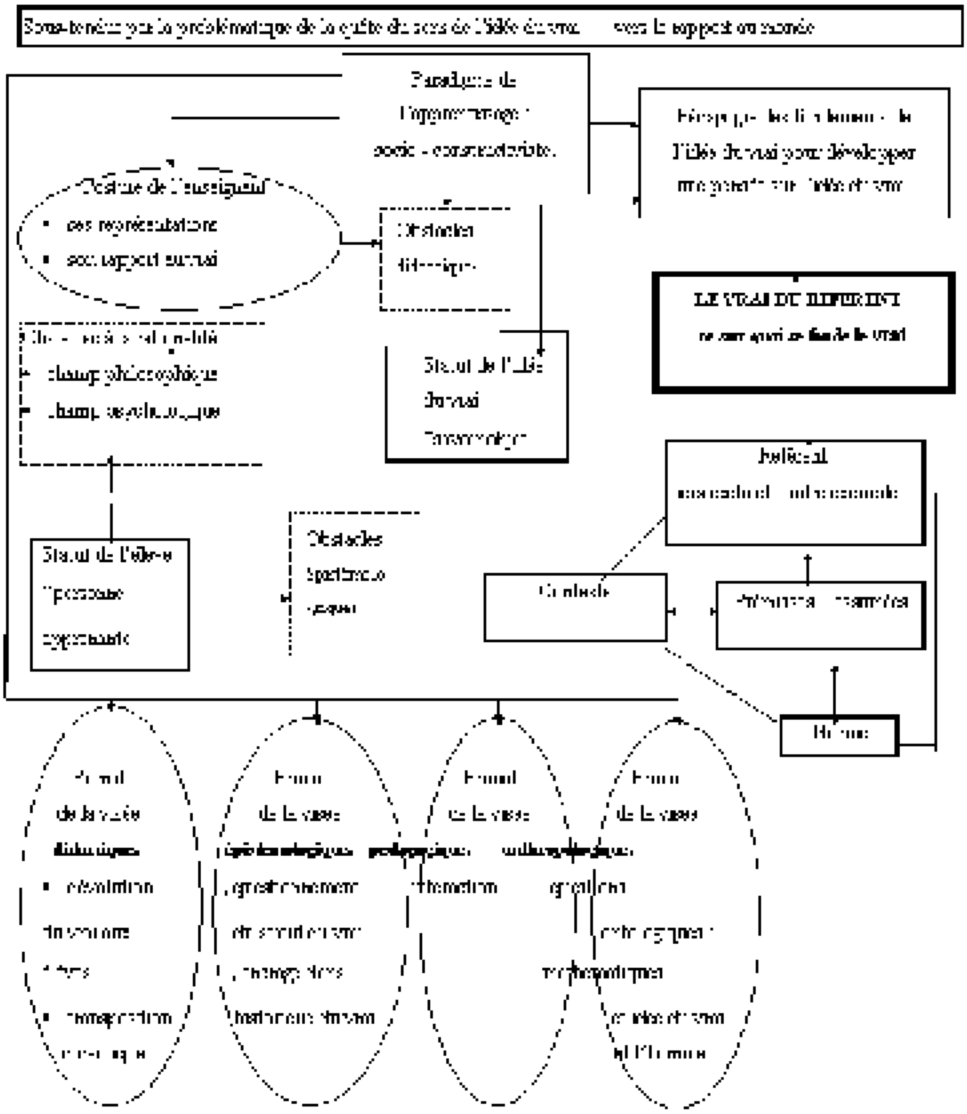
Le primat de la visée pédagogique exclut l'idée d'imitation comme nous l'avons précédemment abordé pour privilégier l'interaction et favoriser l'échange. Donner l'occasion aux élèves de penser ce qu'ils pensent, tant l'acte d'apprentissage puise dans l'amalgame complexe entre l'intrapsychique, l'interpsychique associé à l'outillage didactico-pédagogico-culturel que met l'enseignant à disposition de son auditoire.

Le primat de la visée anthropologique fait son apparition dans cette modélisation pour indiquer qu'il nous paraît souhaitable que des questions ontologiques soient abordées pour ébaucher une « rencontre des fondements anthropologiques » [291] des mathématiques, à travers la question du vrai. Etudier ensemble par exemple quelle place tiennent le singulier et l'universel ; approfondir cette question de la réalité et de la modélisation.

Nous venons d'expliciter par morceaux les composants successifs de la modélisation de l'enseignement de l'idée du vrai selon notre thèse. La linéarité de cette présentation détaillée ne suggère en rien une quelconque vision déterministe quant à l'enseignement

de l'idée du vrai : c'est de la mise en réseau des différents points évoqués que l'enseignement de l'idée du vrai prendra sens. La prise en compte de la complexité et de l'interaction des composants qu'elle met en présence doit bien entendu faire partie du paysage de lecture.

[291] Emprunt de l'expression à M. Develay in Cerfe n°15 - *Vers une socialisation démocratique* - Coordination M. Tozzi - 1998. p.129.



Modélisation de l'enseignement de l'idée du vrai selon notre thèse

Chapitre 4. Exemples de situations didactiques illustrant la thèse que nous défendons.

Nous avons expliqué notre changement de perspective quant au passage du savoir outil au savoir objet, concernant l'enseignement de l'idée du vrai, et nous avons évoqué deux composantes susceptibles d'introduire ce changement dans l'enseignement : une composante pratique dont la visée est de faire vivre l'idée du vrai à travers la preuve et une composante théorique dont la visée est de développer une pensée sur l'idée du vrai.

Nous ne nous appesantirons pas sur l'illustration de la première composante avec des situations didactiques car d'une part, ces dernières ne manquent pas et sont très connues du moins dans le milieu de la recherche (quoique difficiles à faire admettre encore dans les pratiques) et que d'autre part, nous en avons présentées au moins deux déjà antérieurement pour illustrer nos principes clés.Nous nous contentons d'en rappeler les grandes lignes.

Illustration de la composante pratique (faire vivre l'idée du vrai à travers la preuve) par des situations didactiques.

Nous situons l'enseignement de l'idée du vrai à travers la preuve par rapport aux pôles suivants orientant le choix de situations.

l'heuristique. 1.

la formulation de conjectures (hypothèse non encore validée). 2.

l'explicitation des différents niveaux de preuve. 3.

la confrontation au doute. 4.

les principes de rationalité (sous l'angle de leur utilisation). 5.

la différenciation entre démarche de recherche et démarche de rédaction de preuve. 6.

Nous rappelons aussi que lors de la réalisation des situations didactiques orientées par les pôles précédents la situation problème tient une place importante au niveau des pôles 1 ; 2 ; 4 ; 5 en attirant l'attention sur le fait que les situations problèmes mobilisées ne répondent pas toutes aux mêmes visées selon les pôles considérés. Cela mérite sans doute une explication.

En effet, les situations problèmes mobilisées pour les points 1 et 2 et qui appartiennent à la catégorie « *problèmes de développement et de cahier des charges* » [292] visent moins à développer une maîtrise conceptuelle qu'un développement de certaines capacités, méthodes et attitudes de l'apprenant. «*Elles se réfèrent soit à la collecte, l'organisation et le traitement des données soit à l'élaboration de procédés de résolution (procédés heuristiques) soit à la manière d'appréhender effectivement une tâche* ».

Les situations problèmes en lien avec l'axe 4 relèveront de la catégorie « *problèmes de maîtrise » où il s'agit de développer des capacités référées à la mobilisation de concepts divers et de schémas de traitement adaptés pour faire face à des situations de référence identifiées dans le profil de sortie de la formation. Il ne s'agit pas pour l'élève de restituer « un savoir » dans des situations déjà traitées mais bien d'utiliser pour répondre à un besoin ; il s'agit de manifester une compétence. L'obstacle est constitué par la mobilisation d'un grand nombre de concepts et propriétés d'une part et par l'identification de « l'espace problème » d'autre part ».* [293]

Enfin, en ce qui concerne les situations problèmes relatives au développement du

[292] Groupe de recherche de mathématiques du CEPEC in Pratiques Math numéro spécial : *situations problèmes*. p. 8.

[293] Ibidem p.8

pôle 5, elles se situent dans *« les problèmes de « mise en œuvre naturelle » : concept ou situation » où il s'agit de mettre en place un dispositif qui conduit pour être traité à mettre en œuvre le concept ou la gestion de la situation sans que ceux-ci aient été enseignés ».* [294]

Illustration de la composante théorique (développer une pensée sur l'idée du vrai) par des situations didactiques.

Le lecteur aura remarqué que même dans l'illustration de situations didactiques qui se

référent à la composante pratique de l'enseignement de l'idée du vrai, il y a des pôles qui ne réclament pas forcément l'entrée de la situation problème : ce sera également ce qui caractérise les situations didactiques se rapportant à la composante théorique de l'enseignement de l'idée du vrai.

Nous estimons que, si la situation problème s'avère un outil didactique très riche pour la mise en œuvre, la maîtrise et la remédiation conceptuelle au sein de l'enseignement des mathématiques et si son recours, favorise sans conteste, le développement d'attitudes et de postures de recherche chez l'élève, il n'en demeure pas moins qu'elle a ses limites face à des objectifs d'enseignement qui ne se réclament pas exclusivement de la didactique des mathématiques.

Et notre objet, l'idée du vrai est de ceux là.

Car, si une situation problème s'organise autour d'un problème fondamental, notre problème c'est que « *loin de se réduire à un techniscisme sans égard pour les sujets une didactique qui prendrait au sérieux la question du sens dans la totalité de ses dimensions permettrait précisément de doter l'enseignant d'outils de compréhension et de régulation d'un processus de formation où la quête de savoir serait en même temps quête d'existence* » [295] .

Le mot est lâché :existence. Rappel lancinant de la visée anthropologique de la modélisation de l'enseignement de l'idée du vrai selon notre thèse.

Certes ,cette dimension là n'a pas forcément une réalité tangible dans les milieux de la didactique des mathématiques dont la préoccupation s'axe foncièrement sur

le sujet épistémique. Cette perspective didactique porte néanmoins l'esquisse de la « dimension humaine » puisque le fait même d'adjoindre épistémé à élève implique que l'on ait des égards pour la raison de celui-ci, mais qu'en est-il de la prise en compte de ses états d'âme existentiels et de son questionnement ontologique ? En cela la didactique des mathématiques se trompe quand elle prétend pouvoir dissocier le sujet raison et le sujet empirique. [296]

D'aucuns nous reprocheront notre ton polémique, mais il marque notre insistance à développer une pensée sur l'idée du vrai conjointement au développement de la dextérité

[294] Ibidem p.8

[295] FABRE M. opus cit. p. 7.

à prouver .

Dans la nouvelle modélisation que nous avons livrée, nous nous sommes emparée de la notion de personne apprenante qui pointe bien les deux facettes de l'élève. Les situations didactiques faisant appel aux situations problèmes se tournent vers la dimension apprenante de l'élève. Les situations que nous proposons de mettre en place vont du côté de la personne pensante porteuse d'expériences : deuxième facette de l'élève. L'objectif de cet enseignement réside dans la volonté de faire comprendre que les mathématiques servent à autre chose qu'à entretenir une espèce de terrorisme intellectuel via le rôle de sélection quasi darwinienne qu'on lui fait jouer. A autre chose que de développer des attitudes de soumission.

Donc, ce que nous entendons défendre comme position, c'est que si l'enseignant souhaite développer une pensée sur l'idée du vrai, alors il peut avoir recours à des situations qui ne s'intègrent *pas totalement* dans le cadre conceptuel de la didactique des mathématiques bien qu'elles ne s'en éloignent pas non plus tant que cela. Car enfin, du point de vue de leur conception elles relèvent de la mise en œuvre des concepts de représentations et d'obstacle. Du point de vue de leur mise en place, elles s'emparent de la notion du débat mathématique. Elles représentent des situations cruciales. En somme, elles s'en écartent du point de vue de leur nature : ce ne sont pas des situations problèmes au sens strict. Cependant, elles appartiennent toujours au cadre théorique du constructivisme piagétien et bachelardien.

Si nous délaissons parfois la situation problème (dans cette composante), c'est parce que nous avons aussi intégré dans la modélisation de notre thèse la visée épistémologique qui ne semble pas avoir fait son entrée dans les pratiques, du moins, d'un point de vue formalisé. Or, développer une pensée sur l'idée du vrai ne peut se concevoir sans cette dimension, et c'est pourquoi les situations qui sont présentées ont pour objectif d'alimenter une réflexion sur l'évolution de l'idée du vrai au sein des mathématiques. De susciter et d'éclairer ce qui est relatif aux modes d'accès que se donnent les mathématiques pour traiter la question du vrai et d'approfondir la question des soubassements de cette idée du vrai. Ces situations seront sans cesse mises en réseau et ne résulteront pas d'une quelconque application linéaire. Pour que les élèves puissent franchir le pas de l'assertorique, où ils ont à observer une simple constatation de faits, à l'apodictique où ils auront à établir des relations nécessaires pour mettre en tension la dialectique être scientifique, et apprendre la science.

Ces situations qui ne se réfèrent plus spécifiquement à la notion de situation problème, trouvent également leur inspiration du point de vue de leur forme en référence à la pensée de Bruner au sujet de la construction de la science par les récits car il souligne que *« ce que je propose en revanche, c'est que l'éducation que nous donnons dans ce domaine soit de bout à bout consciente du processus vivant de construction de la science, plutôt que de se contenter de rendre compte de la « science achevée » telle qu'elle est représentée dans les manuels, dans les livres, ainsi que dans les*

[296] Encore qu'il faille apporter quelques nuances à ces propos à en juger par B. Charlot qui relate que le concept de « rapport au savoir » après avoir pénétré les champs de la sociologie, et de la psychanalyse gagne celui de la didactique ne serait-ce que par la contribution de Y. Chevallard [rapport institutionnel au savoir] et de M. Legrand (rapport scientifique au savoir).

« expériences » canoniques, d'un ennui souvent mortel . L'art de poser des questions provocatrices est aussi au moins important que celui qui consiste à donner des réponses claires. Les bonnes questions sont celles qui nous mettent devant un dilemme, qui subvertissent les « vérités » évidentes et canoniques, qui jettent le doute dans notre esprit ». [297]

Ces propos renforcent le renversement paradigmatique vers lequel les situations envisagées tendent (en se défendant d'accorder le primat à l'entraînement à la preuve) et accentuent quelque peu leur éloignement d'avec la situation problème (au sens strict) dans la mesure où « *la situation - problème est généralement focalisée sur la résolution. Mais n'est - ce - pas l'activité de problématisation, dans toutes ses phases - et en particulier la construction même du problème - qui seule peut lui conférer son véritable sens ? ».* [298]

Ces situations concrétisent la jolie formule de M. Develay qui considère que l'enseignant « *est le magister constructeur de situations, non pour le plaisir de l'action ou la croyance en la valeur du jeu, mais parce qu'il a compris que trouver du sens dans ce qu'ils vivent à l'école est la condition pour que les élèves apprennent* ». [299] Elles prennent en compte le point de vue qui affirme « [...] *on considère que la personne construit son identité (ses valeurs, ses connaissances, ses savoirs) via son autoréférence à partir des interactions qu'elle exerce avec son environnement et du sens qu'elle lui donne* ». [300] Leur visée réside dans la volonté de faire appréhender l'idée du vrai de part sa caractéristique principale en mathématiques tel que l'illustre ces propos : *« la somme des angles d'un triangle est égale à 180 degrés », cette phrase, qu'il se souvenait avoir toujours entendu proclamer comme une vérité absolue, indépendante de tout contexte, n'était qu'une vérité sous condition. Elle concernait certes tous les triangles du monde, mais tous les triangles PLANS du monde. L'adjectif changeait tout ! Comme dans la vie. Cette nécessité que les mathématiques ont, plus que toute autre connaissance, de préciser dans quel cadre, sous quelles conditions, avec quelles hypothèses une affirmation est vraie, les rendait exemplaires. Par ces quelques lignes écrites sur la fiche de Grosrouvre, M. Ruche toucha du doigt à quel point elles pouvaient être philosophiquement, et même politiquement, une école d'apprentissage contre l'absolutisme de la pensée* ». [301]

Présentation des exemples de situations.

[297] BRUNER J. opus cit. p.158.

[298] FABRE M. opus cit. p117.

[299] DEVELAY M. KERLAN A. LEGRAND L. FAVEY E.- *Quelle école voulons-nous ? Dialogue sur l'école avec la ligue de l'enseignement* - Edition ESF. 2001. p.108.

[300] GERARD C. in opus cit. p.85.

[301] GUEDJ D. opus cit. p.248.

Situations traitant de l'approche de l'idée du vrai par les textesEn réalité, les textes sont une mosaïque d'extraits que nous avons sélectionnés dans l'ouvrage de CHOUCHAN N. : Les Mathématiques - Edition Flammarion - 1999 - p.31 à 34 ; p.37 à 41. Présentation en Annexes 8. parlant des mathématiques. 1.

Interpellation sur : le statut et le rôle des prémisses assumées ; le rôle de la norme ; le rôle de la preuve ; la manière dont se construisent les connaissances mathématiques et l'évolution de l'idée du vrai.

Situations traitant de l'approche de l'idée du vrai par les textesLes textes sont une mosaïque d'extraits que nous avons sélectionnés dans l'ouvrage de AUDIRAC J.L : Vie et œuvre des grands mathématiciens de l'Antiquité jusqu'au 20ième siècle - Edition Magnard - 1990 - p.8 à 9 ; p. 12 à 16 ; p. 22 à 24. Présentation en Annexes 8. mettant en scène des objets mathématiques. 1.

Interpellation sur l'idée du vrai à travers la construction d'objets mathématiques ou la formulation de problèmes historiques.

Situations traitant de l'approche de l'idée du vrai par des activités.Extraites de Pratiques Math. CEPEC - n° 30 p.27 à 32 : Logique assurément, élémentaire pas si sûr... DE VERCLOS F. - Mars 1999 - et n° 31 p.18 à 20 : La redécouverte de la pyramide de Khéops CHOLLET G. Juin 1999 et n° 30 p. 13 à 26 Musimatique CHOLLET G. Mars 1999. Présentation en Annexes 8. 1.

Interpellation de l'idée de vrai en regard de la notion de logique en mathématiques ; confrontation de la rationalité mathématique avec celle du quotidien ; interpellation des notions de modélisation , réalité et idée du vrai .

Situations traitant de l'approche de l'idée du vrai par les textesA l'aide d'extraits du roman de Guedj D. - Le théorème du Perroquet - Edition du Seuil. 1998. Visible en Annexe 8.pour l'éclairer à la lueur de grands thèmes : exemple de l'infini (à travers la découverte des irrationnels par exemple et de pi en particulier). 1.

Situations traitant de l'approche du vrai par les textesExtraits de l'ouvrage de GUEDJ D. pré cité : montage des pages 38 à 59 visible en Annexe 8. romancés. 2.

Interpellation de l'idée du vrai en regard de la notion d'expérience en mathématiques ; notion d'intuition.

SituationsPropositions en Annexe 8. traitant de problèmes historiques relatant l'émergence difficile de certains objets mathématiques (les nombres négatifs par exemple).Situations faisant intervenir un changement de cadre. 1.

Interpellation de l'idée du vrai en regard de la reconnaissance ou non d'objets mathématiques d'usage courant ; et en regard du modèle et de la situation (par le biais du sens de solution d'une équation).

partie 4. mise a l'epreuve des principes cles - de leurs consequences didactico - pedagogiques.

Pouvoir être testé c'est pouvoir être réfuté Karl Popper La quête inachevée - Traduction R. Bouveresse Edition Calman Lévy - 1981 . p.209

Quand une femme de terrain se métamorphose en chercheur qui voudrait prouver quelque chose quant à sa pratique, en marquer scientifiquement la pertinence, le choix de la recherche action peut-elle installer un piège sous ses propres pieds ? Quel rapport au vrai la recherche action engage t-elle d'autant plus si l'on considère l'objet même de la recherche qui est précisément la question du vrai dans l'enseignement ?

Il s'agira alors de poser notre hypothèse de recherche en premier lieu car la recherche action témoigne du souci de sortir de l'empire de l'opinion en proposant de soumettre cette hypothèse de recherche, à une mise à l'épreuve traduisant un souci d'objectivation à travers ce processus continué de mise à l'épreuve.

Mais parce que la recherche action fonde une pratique de recherche qui est assimilable à une démarche d'enquête rationnellement organisée comme la définit C. Hadji nous inclurons cette hypothèse de recherche dans la dimension méthodologique.

En outre, la recherche action bâtit une expérimentation au sens de Chevallard qui permet de faire parler clairement le système observé en le perturbant d'une manière contrôlée. Car expérimenter, c'est voir ce qui se passe quand on impose un traitement particulier à une réalité en sachant que le champ de l'expérimentation était pour nous, fortement limité par des contraintes essentiellement institutionnelles. L'analyse des cahiers de bord des élèves permettra de rendre compte des résultats de l'expérimentation conduite sur deux ans (analyse qui fait suite aux deux autres effectuées précédemment).

Enfin, la recherche action a permis de fixer un cadre dans lequel l'hypothèse de recherche sera éprouvée et il sera donc question de poser le problème de sa validation.

Chapitre 1. Dimension méthodologique et hypothèse de recherche.

Tout comme dans un champ scientifique donné, d'après Y Chevallard [302] , il y a à un moment donné, une doxa propre à ce champ qui fonctionne comme orthodoxie scientifique il existe, au sujet de l'idée du vrai dans le champ scolaire des mathématiques une doxa qui lui est propre : l'association tenace entre vrai et preuve.

Or, l'idée du vrai selon notre thèse repose sur des conceptions épistémologiques qui consiste à défendre comme Alain, que penser c'est aller d'erreur en erreur. A travers la question du vrai, nous interpellons les conditions susceptibles de faire passer l'idée du vrai chez les élèves comme relevant d'une construction de connaissances et d'une construction de la rationalité. En somme, favoriser la mutation de l'idée du vrai « objet de contemplation » en l'idée du vrai « construction » pour contribuer à développer « le regard mathématique » ; c'est-à-dire outiller la pensée de l'élève pour qu'il puisse appréhender le monde autrement qu'en courbant l'échine face à toute pensée dogmatique. L'enseignement de l'idée du vrai s'inscrit en faux contre l'enseignement des recettes ou des stratégies mathématiques et se défie de programmer des élèves comme on programme un ordinateur.

L'idée du vrai dans l'enseignement participe à susciter le questionnement illimité, selon l'expression de Castoriadis. Au moment où notre siècle effectue une plongée vertigineuse dans la crise des fondements de la connaissance, l'enseignement des mathématiques est plus voué à former à l'incertitude qu'à dresser un panorama idyllique valorisant la purification de la pensée par l'élimination de toute scorie.

Aussi l'hypothèse de recherche que nous formulons s'articule t-elle autour des principes d'action que nous avons élaborés, en se saisissant des programmes de mathématiques comme autant de conditions susceptibles d'induire un changement dans le rapport des élèves aux mathématiques.

1. L'hypothèse de recherche.

[302] CHEVALLARD Y. *Qu'est-ce prouver* ? in Vers une nouvelle alliance opus cit. p.30

Si l'on aborde les principes de rationalité dans l'enseignement en mathématiques autrement que sous l'angle de l'argument d'autorité ; si l'on travaille avec les élèves l'idée que la validité d'une démarche n'engage pas, a priori, l'accès à l'idée du vrai ; si l'on axe l'idée du vrai dans une réflexion de type épistémologique ; si l'on repense le statut de l'enseignement de la preuve. Et si l'on respecte les contenus des programmes de mathématiques en classe de 4ième, 3ième, tout en dépassant les contradictions internes, il devient possible de transformer l'idée du vrai que les élèves de ces classes attribuent aux mathématiques et par là même, de modifier leur rapport aux mathématiques et au delà, à la connaissance.

Cette hypothèse de recherche traduit une assertion qu'il s'agira d'éprouver et non pas de prouver comme l'entend Zazzo. Car, si en mathématiques la démonstration est un élément de preuve invincible, le résultat d'une recherche ne peut être vrai que localement en regard du contexte dans lequel il prend naissance. Contexte défini par la méthodologie employée et par la référence aux cadres théoriques dont nous nous sommes dotée.

2. Cadre de la recherche - explicitation de l'expérimentation.

Compte tenu du critère de faisabilité et de fortes contraintes liées au champ professionnel nous avons donc opté pour « la recherche action ». Entendons par là que le chercheur modifie la réalité en introduisant un facteur expérimental pour répondre aux questions qu'il se pose suivant la pensée de Mialaret [303] . Nous ajoutons également que la recherche action nous fournit un modèle adéquat pour avancer une preuve par l'action,

qui certes, ne sera jamais véritablement preuve puisque comme le dit C. Hadji [304] , le discours sur lequel on se prononce n'a jamais la prétention de dire le réel tel qu'il est mais de dire comment on pourrait éventuellement le transformer pour le faire exister autrement.

a) Délimitation de la recherche du point de vue durée, espace et lieux.

L'expérimentation porte sur un cursus de deux années scolaires entières. Nous travaillons sur l'évolution de représentations de l'idée du vrai chez l'élève, cette expérimentation ne peut donc raisonnablement se concevoir que sur une longue durée en regard de la perspective constructiviste d'apprentissage dans laquelle nous nous plaçons. Perspective dont le choix théorique a été explicité antérieurement.

Le terme expérimentation indique qu'un facteur expérimental nouveau a été introduit dans les classes concernées. Ce fait expérimental nouveau désigne le dispositif didactico-pédagogique que nous défendons dans cette thèse. Dispositif didactico-pédagogique comprenant deux volets : la théorie d'apprentissage de référence et l'ensemble de principes et de pratiques élaborés mis en œuvre à l'intérieur d'une classe de 3ième .

L'expérimentation se dérouleau sein de notre collège et mobilise deux classes de

[303] MIALARET G. *L'année de la recherche en sciences de l'éducation*. Edition PUF. Paris. 1998. p.21

[304] HADJI C. - *Quel rapport au vrai l'acte éducation engage t-il ?* - in Vers une nouvelle alliance opus cit p.83

ième (4ième E et 4ième A) et une classe de 3ième (3ième E filiation de la 4ième E). Cependant, nous avons fait intervenir également une autre classe de 4ième (4ième B) et deux classes de 3ième (3ième A ; 3ième B) qui joueront un rôle particulier mieux défini dans ce qui suivra.

Les classes de 4ième A et de 4ième E comprennent un enseignement de deux langues vivantes dont l'allemand pour certains élèves. En 4ième B seul l'espagnol est enseigné en deuxième langue. Les classes de 3ième A et 3ième B ne présentent plus la même configuration qu'en 4ième puisque le chef d'établissement a effectué des remaniements entre les élèves issus de 4ième A et 4ième B ce qui modifient la composition des classes de 3ième du même nom.

En 3ième A et 3ième E, la deuxième langue est soi l'allemand soit l'espagnol ; en 3ième B seul l'espagnol est enseigné en deuxième langue.

L'expérimentation a été menée sur deux ans en 4ième E et en 3ième E (filiation de la 4ième E).

L'expérimentation n'a été menée que un an en 4ième A : cette classe jouera le rôle de « classe témoin » en 3ième dans le sens où le dispositif didactico-pédagogique mis en place à l'issue de cette 4ième A, donc en 3ième A, a été différent de celui expérimenté en 3ième E (à cause des décisions institutionnelles, qui nous ont été imposées et qui n'ont pas reconduit la filiation entre la 4ième A et la 3ième A).

Les classes de 4ième B et de 3ième B sont des « classes témoins » : le dispositif didactico-pédagogique que nous préconisons n'a jamais été appliqué dans ces deux classes c'est ce que traduit cette appellation de classe témoin

Du point de vue de la composition des classes de 3ième A et 3ième B nous devons souligner qu'elles ne sont pas composées des mêmes élèves que dans les 4ième respectives du même nom : un tiers des élèves de 3ième A n'appartenait pas à la classe de 4ième A.

Pour clarifier ces données il est important de préciser :

- ce que nous entendons par « groupe témoin », signifie que le dispositif didactico pédagogique que nous suggérons pour apprécier son influence sur l'évolution de l'idée du vrai n'a pas été mis en place dans les classes de 3ième qualifiées de témoin.
- les 4ième A et 4ième B possèdent deux enseignants différents.
- les 4ième E 4ième A possèdent le même enseignant.
- les 3ième B ont le même enseignant que l'année précédente en 4ième B.
- les 3ième A et les 3ième E ont le même enseignant que respectivement en 4ième E et 4ième A
- c'est l'enseignant en 4ième A et 4ième E et 3ième A et 3ième E qui produit cette thèse.

Le choix de ces classes se justifie par les considérations suivantes.

D'abord, selon une dimension institutionnelle (regard sur les programmes). Nous avons constaté que c'est à partir de la classe de 4ième que l'on recommande à l'enseignant de travailler plus en profondeur le « raisonnement » (d'où le lien avec l'idée du vrai qui émerge davantage).

Ensuite, nous affichons délibérément un parti pris qui souligne notre insistance à ne pas vouloir axer l'enseignement de 3ième uniquement sur un entraînement systématique à l'épreuve type du brevet Nous entendons préserver l'impératif formation en mathématiques au détriment d'une activité qui ne se réduirait qu'à un dressage en mathématiques, contraire à ce que nous espérons développer par le biais de l'enseignement de l'idée du vrai .

Nous tenons compte également de la « maturation cognitive » de notre public élève : placer cette quête du vrai de manière plus approfondie et systématique en 4ième et en 3ième tient compte du moment où les facultés de verbalisation et de compréhension face à des questions écrites sont en bonne évolution (en prévision des questionnaires).

Enfin, la « réalité psychologique » de l'élève dont l'esprit critique est fortement exacerbé à ces deux « stades » du collège nous a paru une condition favorable pour le projet didactico - pédagogique que nous poursuivons.

Le choix de classes qui se différencient par leur niveau [305] se justifie simultanément par rapport au souci de ne pas fausser l'expérimentation en ne nous appuyant que sur le cas d'élèves dont le cursus est bon de manière homogène (cas d'une majorité d'élèves de la 4ième E et par suite en 3ième E dans la proportion de 70%), et par la crainte de ne pas pouvoir pousser des investigations aussi loin que nous désirerions le faire en restreignant l'expérimentation à des élèves qui rencontrent d'ordinaire davantage de problèmes d'expression dans le registre écrit et oral (qui se rencontrent en proportion plus élevée dans les autres 4ième et 3ième) ; de plus, la contrainte institutionnelle qui fit que la composition de la classe de 3ième A n'était plus la même que celle de 4ième A obligea à abandonner l'expérimentation en 3ième A, de fait.

b) Dimension contextuelle de la situation d'éducation.

Nous l'avons déjà un peu ébauchée précédemment lors de l'ancrage de l'idée du vrai plus particulièrement dans les programmes et les classes évoquées.

Cependant nous ne pouvons pas ignorer que les élèves ne sont pas neufs par rapport à ce travail puisqu'ils ont contracté dès la 6ième l'habitude à argumenter. Argumentation dont la finalité réside dans le dire vrai ou faux et dans l'entraînement systématique à prouver. C'est en nous appuyant sur cette habitude que nous pouvons envisager de préparer un travail plus spécifiquement orienté non plus vers le dire vrai ou faux, mais vers la prise de conscience de la spécificité mathématique pour déterminer le vrai ou le faux afin de favoriser un travail sur la pensée du vrai et du faux. Nous prenons pour appui leur expérience du vrai et du faux pour essayer, par un ensemble de pratiques

[305] Nous entendons par niveau, le sens commun (que nous ne partageons pas) attribué selon la notation globale d'une classe par l'intermédiaire des moyennes de classe figurant sur les relevés de notes annuels même si nous n'entendons pas confondre notation et évaluation.

plus ciblées, de favoriser le rôle émancipatoire de l'enseignement des mathématiques, via le déplacement des représentations des élèves sur l'idée du vrai .

c) Description de la situation d'éducation : mise à jour des variables.

variables liées au groupe enseignant et chacune des classes, et variable temps.

Nous avons déjà eu la majorité des élèves de 4^{ième} E en 6^{ième} , pour les trois quarts d'entre eux.

En ce qui concerne les autres quatrièmes : en 4^{ième} A, à part deux élèves sur vingt neuf que nous avions eus en sixième, le reste de la classe nous était inconnu. La 4^{ième} B comprenait un auditoire qui nous était totalement inconnu hormis 4 élèves sur 28.

A part les 3^{iéme} E, dont la composition est restée inchangée par rapport à la 4^{ième} E, nous n'avons pas suivi tous nos élèves de quatrième (contrainte institutionnelle) puisque la 4^{ième} A que nous avions a subi un remaniement, en troisième, pour un tiers des élèves qui la composait à l'origine. Ce tiers d'élèves était constitué d'élèves ayant obtenu leur brevet mais non leur affectation vers la seconde de leur choix (d'où l'optique de doublement choisie nécessairement).

variables liées au groupe classe seulement : niveau

Les élèves de 4^{ième} E pour les trois quarts d'entre eux environ ont en général un passé scolaire bon, voire excellent pour certains. C'est ce qui a motivé leur parcours post CM2 dans une classe de 6^{ième} E de la part de leurs parents (pression forte, sous réserve tout de même de l'avis de l'institutrice concernée) où ils ont pratiqué depuis la 6^{ième} deux langues (ce qui dans les instructions pour la rentrée 1999 est prohibée). Il s'agit de l'anglais (initiation depuis le CM) et l'allemand. L'image de ces élèves dans le collège est particulièrement forte. Quelques élèves des autres classes n'hésitent pas à leur conférer un statut « d'intello ». Du côté de la gente enseignante cette tendance n'est pas entretenue ouvertement, mais au niveau des pratiques et du contrat, il n'y a pas toujours une volonté commune de non différenciation, entre tous les professeurs. Leur niveau global de classe est en général au dessus des autres classes de 4^{ième} si l'on prend pour référence la « moyenne » de classe. Leur rapport au travail dans le cadre des mathématiques ne pose pas de problème. Dès la 4^{ième} ,ces élèves, pour 70% d'entre eux ont été associés à d'autres élèves venant de 5^{ième} classique (entendre par là, sans la pratique de deux langues vivantes).

Sur le plan du niveau, les élèves sont répartis en très bons, bons, moyens, faibles (pour une minorité).

La classe de 4^{ième}A présente une configuration inverse de celle des 4^{ième} E du point de vue de la proportion d'élèves pratiquant deux langues depuis la sixième. En ce qui concerne la composition de la 4^{ième} B aucun des élèves ne pratiquent l'allemand comme deuxième langue. En général, les élèves de 4^{ième} A et 4^{ième} B ont des parcours plus sinueux voire même chaotiques pour certains. Pour quelques uns, le latin est une option à laquelle ils n'ont pas voulu renoncer (il s'agit d'une minorité).

Sur le plan du niveau global de classe on retrouve les typologies classiques grossièrement qualifiées de bons, moyens, faibles dans des proportions qui ne sont pas forcément égales. Leur rapport au travail est parfois plus problématique pour certains, que dans la 4ième E (et ce, dans beaucoup de matières).

Pour les troisièmes, les considérations ci-dessus sont les mêmes.

variable liée à la situation elle même :

Le fait que l'enseignant soit aussi le chercheur : ainsi la question du biais expérimental peut-elle se poser en regard d'une position positiviste de la recherche. Cependant, si l'on veut bien considérer la nature des propositions avancées pour faire évoluer les représentations sur l'idée du vrai, l'on ne manquera pas de remarquer qu'elles sont de nature didactique et pédagogique et nous adoptons une position réaliste bien traduite par les propos de J. Portugais qui avance que, « p*our nous, le leurre serait plutôt de croire que l'on peut oeuvrer dans un système de formation en se soustrayant à sa position d'acteur du système et à ses effets éventuels ».* [306] Cependant, cette remarque ne nous dispense pas de prendre le maximum de précautions possibles lorsque nous recueillerons

les données .

variables liées au contexte, pratique d'enseignement.

Notre rappelons que notre théorie de référence est la perspective socio-constructiviste

dans les classes dont nous avons eu la charge (en 4ième A ; 4ième E ; 3ième A ; 3ième E). Cette

perspective n'est pas partagée par les collègues de l'établissement qui pratiquent un enseignement dit « classique » d'où les situations problèmes sont exclues en général (cours basés sur définition/ application ; les exercices types en répétition sont nombreux et systématiques ; les chapitres se suivent les uns après les autres sans lien particulier entre eux avec des durées déterminées qui ne font guère l'objet d'adaptation par rapport à l'apprentissage).

Dans les classes expérimentées en 4ième A et 4ième E, les cours sont dispensés selon le dispositif didactico-pédagogique dont nous entendons tester la pertinence. La classe de 4ième B est une classe témoin, depuis le départ, dans laquelle ni la théorie d'apprentissage de référence ni le dispositif didactico-pédagogique que nous avons élaboré ne sont appliqués.

Nous attirons l'attention sur le fait que nous prendrons soin de proposer les mêmes situations didactiques et que nous serons soucieuse d'agir pédagogiquement de manière équivalente dans les classes au sein desquelles se déroule l'expérimentation en 4ième A et 4ième E (questionnaires de fin de 4ième) même si nous ne sommes pas dupe quant à l'illusion de la reproductibilité d'une situation d'enseignement.

[306] PORTUGAIS J. - *Didactique des mathématiques et formation des enseignants* - Edition Peter Lang. Editions scientifiques européennes . 1995. p.101

En ce qui concerne les 3ième .

Les 3ième E bénéficient d'un travail annuel axé sur un enseignement de l'idée du vrai comme nous le défendons dans notre thèse.

Les 3ième A deviennent une classe témoin en ce sens qu'ils reçoivent un enseignement classique tourné vers l'entraînement à l'exercice de la preuve uniquement; la perspective d'apprentissage est toujours socio-constructiviste.

Les 3ième B sont toujours une classe témoin. Ils reçoivent un enseignement classique tourné vers l'entraînement à l'exercice de la preuve uniquement; la perspective d'apprentissage n'est pas socio constructiviste mais se réclame du paradigme comportementaliste.

3. Méthodes et techniques de recherche.

« L'unité de méthode n'est pas nécessairement le bon gage d'un travail scientifique. Il suffit que le chercheur prenne bien conscience des limites et avantages et inconvénients de chacune des méthodes utilisées pour pouvoir faire une analyse critique de ses résultats ». [307] La rigueur scientifique se juge au rapport entre l'intention de démontrer et des moyens employés pour le faire. En outre, nous avons dû faire des choix et choisir, c'est renoncer à d'autres possibilités, à d'autres découvertes peut-être, mais le travail de deuil est incontournable.

De plus, cette thèse ne cherche pas à être ce qu'elle n'est pas : une recherche s'appuyant sur une batterie de tests expérimentaux.

Nous avertissons le lecteur que nous avons opéré un choix et que notre travail de recherche repose sur une méthodologie qualitative. Ce qui nous importe, n'est pas d'axer nos observations sur un très grand nombre de sujets pour en déduire une étude statistique, mais bien de nous limiter à un nombre restreint de manière à exhiber des comportements significatifs en regard de notre objet d'étude.

a)Premier niveau méthodologique : description des instruments de recueil de données.

Les questionnaires distribués à une population de trois classes de quatrième de collège.

Les contenus de ces derniers sont à la disposition du lecteur en annexe 3.

Nous distinguons deux temps.

D'abord, une première série de questionnaires a été adressée aux élèves qui ont poursuivi une année de 4ième B avec un enseignement dit « classique » ainsi qu'à tous les élèves des deux classes 4ième A et 4ième E, ce qui représente environ 90 élèves au total. Ils ont été distribués au cours du mois de Juin 1999 .

[307] MIALARET G. opus cit p.21

Ils comprenaient trois tâches portant sur une résolution de problèmes du niveau de 4ième et deux questions ouvertes.

Ensuite, une deuxième série de questionnaires a été adressée aux élèves de troisième. Sous la forme d'un Q sort s'adressant aux élèves de $3^{\text{ième}}$ E, $3^{\text{ième}}$ A et 3ième B au cours du mois de juin 2000 . Rappelons que l'échantillon des élèves concernés en $3^{\text{ième}}$ E était le même que celui de $4^{\text{ième}}$ E. Le mode d'identification ayant été réalisé en $4^{\text{ième}}$ et ne variant pas avec leur passage en $3^{\text{ième}}$.

Sur le plan pratique en effet, pour permettre le traitement ultérieur de nos études, les élèves ont été préalablement identifiés par un système de codage qui a permis leur repérage, tout en préservant leur anonymat au cours de la passation. Il symbolisait leur repérage annuel en mathématiques en $4^{\text{ième}}$ E .

Nous rappelons que l'étude longitudinale est justifiée pour tester notre hypothèse en regard de l'influence de la variable temps dans l'évolution du rapport l'idée du vrai chez les élèves.

L'étude comparée entre classe soumise à l'expérimentation ($4^{\text{ième}}$ E ; $4^{\text{ième}}$ A ; 3ième E) et classes témoins ($4^{\text{ième}}$ B ; $3^{\text{ième}}$ A ; $3^{\text{ième}}$ B) est justifiée pour apprécier la variable dispositif

didactico-pédagogique en regard du déplacement de l'idée du vrai.

L'étude du cahier de bord des élèves issus d'un échantillon composé d'élèves appartenant à la population.

Cette étude forme une troisième série de recueil de données.

Le cahier de bord est composé de quatre séries de feuilles qui prennent forme au cours de l'année de troisième suivant quatre périodes de l'année

Elles ont porté uniquement sur un nombre réduit d'élèves, soit 18, appartenant à la classe de $3^{\text{ième}}$ E identifiés et repérés par le codage annoncé ci-dessus pour permettre leur repérage rapide par rapport aux trois tiers de leur classe de $4^{\text{ième}}$ selon la typologie annoncée dans le paragraphe variable liée au groupe classe seulement (premier tiers : « très bons - bons » ; deuxième tiers élèves « moyens » ; troisième tiers élèves « faibles »).

en $3^{\text{ième}}$ E : 30 élèves groupés selon leur appartenance respective aux premier tiers soit 9 élèves, deuxième tiers soit 5 élèves ou troisième tiers soit 4 élèves du point de vue de leur niveau de $4^{\text{ième}}$.

Cette étude relative à l'échantillon de $3^{\text{ième}}$ E s'est déroulée de Septembre à Juin 2000.

Elles s'est appliquée sur les matériaux suivants :

- en Septembre 2000.

à propos de l'élaboration du théorème de Thalès (dans la configuration des triangles croisés)

- quelle est l'hypothèse sur laquelle repose la démonstration du théorème ?
- comment cela vous interpelle t-il par rapport la notion de vrai en mathématiques ?

- en Octobre 2000.

question ouverte :

- quel sens cela a t-il de dire que quelque chose est vrai en mathématiques ?

- en Mars 2000.

à partir d'un texte extrait de « les Mathématiques textes choisis de N. Chouchan » [308] au sujet de hypothèses et vérité en mathématiques.

question ouverte :

- comment ce texte vous interpelle t - il au sujet de l'idée de vérité ?

- en Mai 2000 [309] .

à partir d'un texte extrait de « les Mathématiques textes choisis de N. Chouchan » qui porte sur « mathématiques et vérité »

- déterminez les grandes idées fortes en regard de l'idée de vérité que vous retenez .

Justification du non recours aux entretiens.

Elle tient à un facteur qui relève d'une impossibilité à les mettre en place pour deux raisons. Nous avons opté pour la recherche action et il y aurait eu un biais dans le fait de mener les entretiens nous-même. En outre, le collège dans lequel nous sommes est en zône rurale, et les élèves sont astreints à des trajets en car dont les horaires n'ont pas permis de déterminer des créneaux après les cours pour organiser d'éventuels entretiens avec un tiers. C'est au prix de contorsions coûteuses que nous avons réussi à dégager un temps court pour un entretien de clarification seulement avec deux élèves.

Justification du choix du, journal de bord et Q sort.

Ils tirent leur légitimité de part l'isomorphisme qu'ils entretiennent avec notre conception de l'enseignement apprentissage car ils prennent en considération la variable temps, permettent aux élèves de construire des connaissances en concomitance avec leur geste d'écriture, et leur offrent un espace pour penser autrement.

b)Deuxième niveau méthodologique : traitement des données et modèles d'analyse

[308] Les textes de N. Chouchan (montages d'extraits) se trouvent en Annexe 8

[309] Les copies d'élèves de Septembre à Mai figurent en Annexe 9

Justifications théoriques préliminaires.

Nous avons tenu compte de trois recommandations d'Huberman et Miles qui invitent d'abord à considérer l'obligation de condenser les données car « *au fur et à mesure du recueil de données, d'autres phases de condensation apparaissent (résumés, codage, repérage de thèmes, regroupements, divisions). On ne peut dissocier la condensation des données de l'analyse. Elle en fait partie. Quand le chercheur décide des blocs de données à coder, de ceux à extraire, des configurations (patterns) qui vont intégrer tel bloc, et de la façon dont les événements se sont enchaînés, il procède à des choix analytiques. La condensation des données est une forme d'analyse qui consiste à élaguer, trier, distinguer, rejeter et organiser les données de telle sorte que l'on puisse en tirer des conclusions finales et les vérifier* » [310] .

Ensuite, nous nous sommes autorisée à « *alterner un travail de réflexion sur les données déjà collectées et une mise au point de nouvelles stratégies pour en collecter d'autres [...] [puisque] l'analyse devient alors une entreprise dynamique, en constante progression alimenté en permanence par le travail sur le terrain* » [311] .

Enfin, nous avons repris à notre compte la considération suivante, « *si les mots sont plus difficiles à manier que les chiffres, ils permettent cependant une « description dense ». En d'autres termes, ils parlent plus que les seuls chiffres et on devrait s'attacher à les conserver tout au long de l'analyse. Un chercheur qui laisse de côté les mots après les avoir converti en chiffres s'oppose à toutes sortes de mésaventures. Il part alors du principe que la principale caractéristique des mots est leur distribution quantitative. Ceci bien sûr n'est qu'un aspect de ce que sont les mots et certainement pas le plus important. En se concentrant uniquement sur des chiffres, notre attention passe de la substance à l'arithmétique, et par conséquent rejette tout le qualitatif* » [312] .

Relativement aux questionnaires distribués à une population d'élèves de trois classes de quatrième.

La première série nous a permis de dresser un ensemble de représentations de l'idée du vrai en mathématiques chez les élèves de 4^ième^ suivant la variable dispositif didactico-pédagogique.

Les activités portant sur des sujets mathématiques, nous les avons traitées d'un point de vue didactique en relevant les types d'erreurs commises par les élèves pour en déterminer les futurs obstacles.

Le modèle d'analyse retenu est celui de l'analyse de tâches selon Vergnaud consistant à mettre en évidence pour chaque tâche particulière, les contraintes

[310] HUBERMAN A. M. et MILES M. B. - *Analyse des données qualitatives - Recueil de nouvelles méthodes* - Edition De Boeck. 1991. p.95.

[311] HUBERMAN A. M. et MILES M. B. opus cit. p. 85.

[312] HUBERMAN A. M. et MILES M. B. opus cit. p. 95.

spécifiques qui la caractérise et à dégager les opérations - tant en pensée qu'en acte - que la tâche réclame. Cette analyse de tâche engage à considérer les diverses sources de traitement que la résolution demande et que l'élève mobilise, aussi bien dans les registres mathématique, cognitif, ou psychologique.

La deuxième série (Q sort compris) avait pour mission de donner une photographie des représentations de l'idée du vrai en fin de 3ième de manière à pouvoir observer a posteriori s'il y a eu déplacement des représentations sur l'idée du vrai en comparant avec la première série (questionnaires qui font émerger des représentations de 4ième) et la troisième série (études de l'échantillon qui font émerger des représentations de 3ième) : dimension longitudinale.

Cette comparaison est effectuée pour juger de l'influence de la variable dispositif didactico-pédagogique ainsi que celle relative au niveau .

Le modèle d'analyse met en œuvre la définition a priori des grandes rubriques qui seront des indicateurs de l'état des représentations des élèves sur l'idée du vrai qui transparaît au travers de ce Qsort.

Relativement à l'étude du cahier de bord des élèves de l'échantillon.

Ces études serviront essentiellement à repérer comment s'est manifestée chez les élèves tout au long de l'année 1999/2000, l'évolution des représentations de l'idée du vrai. Elles permettront d'apprécier le déplacement ou non de l'idée du vrai chez les élèves : dimension transversale.

Suivant les matériaux pré cités dans les instruments de recueils de données nous nous sommes référée :

- <u>relativement au texte 1 de N. Chouchan « hypothèses et vérité »</u> : au modèle d'analyse de contenus manifestes pour « condenser, ou éclairer le contenu de la pensée d'un ou plusieurs énonciateurs ou encore examiner l'évolution et l'importance relative de différentes énonciations réparties dans le temps ou l'espace » [313]

Selon Van Der Maren toujours, nous avons procédé à un découpage des textes en unités d'analyse correspondant à des sélections d'extraits de production d'élèves repérés par écho analogique [314] en regard de notre modèle a priori construit en référence au cadre conceptuel du vrai et qui pointait les critères suivants.

Mise en évidence a priori des critères d'appréciation du déplacement :

- mise en évidence et analyse des idées fortes repérées pour esquisser le paysage de l'idée du vrai des élèves.
- présence ou non de l'évocation des prémisses dans leur vision de l'idée du vrai ; manière dont ils conçoivent le rôle de ces prémisses.

[313] VAN DER MAREN J. M. - *Méthodes de recherche pour l'éducation* - Edition De Boeck. 2ième édition. 1996. p 414.

[314] Nous reprenons les propos de Van Der Maren pour éclairer le sens de cette expression : « *sera reconnu comme unité significative tout passage du texte qui éveille un écho, qui suscite une analogie ou une correspondance avec un modèle ou une théorie* » opus cit. p. 429.

- capacité à mobiliser la référence aux principes de rationalité (tiers exclu ; contre - exemple).
- « perception » par rapport au sens des (ou du) principe(s) de rationalité que les élèves mobilisent.

- Relativement au texte 2 de N Chouchan « mathématiques et vérité » nous recourons au modèle d'analyse d'exploitation globale de matériel selon Van Der Maren dont le but est *« d'élaborer un modèle du sens ou de la signification du texte à analyser afin, le plus souvent, d'en montrer la valeur ou les défauts »* [315] .

En déclinant la stratégie suivante : nous exposerons le modèle du sens attendu du texte en faisant apparaître les idées fortes qu'il devrait contenir (en tenant compte du niveau des élèves : 3ième de collège).

Nous vérifierons alors pour chaque production d'élève et par une référence aux extraits d'écrits des élèves la présence, ou l'absence, des éléments du modèle.

Nous émettrons alors des interprétations en regard du sens que cela apporte au vu de l'émergence des représentations de l'idée du vrai chez les élèves et en faisant référence aux liens entre les éléments du modèle et les rubriques constituées a priori en fonction du cadre conceptuel du vrai (toujours les mêmes).

En outre, de manière à ce que ce modèle d'analyse choisi pour ce texte ne confère pas à la recherche un manque de rigueur ou de crédibilité au niveau des résultats obtenus, nous n'avons ni évacué l'examen des données, ni leur traitement, ni la question de la validation des interprétations.

4. Précautions méthodologiques et déontologiques.

Lorsque nous avons conçu notre dispositif d'expérimentation, un certain nombre de « démons » nous hantaient et nous rendons compte de nos vigilances.

Nous avons déjà évoqué le biais lié au dispositif expérimental, mais il faudrait apporter quelques précisions à ce sujet pour informer le lecteur de notre attention par rapport aux trois autres types de biais classiques lors de l'analyse de notre corpus de données.

Le biais de confirmation caractérisé par une attitude qui tend à privilégier l'information permettant de confirmer une hypothèse au détriment de celle qui vise plutôt à l'infirmer.

Le biais d'appariement : tendance du sujet à choisir un exemple dont les éléments coïncident avec ceux qui sont mentionnés dans la règle.

Et pour finir, l'effet d'atmosphère et ses risques d'induction.

En outre afin de nous assurer de la validité interne de notre recherche qualitative nous avons recouru chaque fois à l'explicitation de nos modèles d'analyse et veiller à la pertinence des modèles proposés a priori en regard de notre cadre théorique et conceptuel.

[315] VAN DER MAREN opus cit. p. 404.

Notre deuxième démon est lié au problème du réductionnisme. Quel crédit accordé aux futures interprétations liées à notre expérimentation et à la portée de nos conclusions ultérieures étant donné le caractère particulièrement contextualisé et du cadre restreint dans lequel elles s'appliquent ? Nous ferons alors appel à S. Joshua pour apporter quelque légitimation quant aux connaissances que nous pensons produire. *« Les sophistes ont passé quelques siècles à montrer (avec quelle puissance) que la science était impossible. Vous voulez parler (expliquer, théoriser) à propos du bain que vous prenez dans ce fleuve ? Quelle vanité ! On se baigne jamais deux fois dans le même fleuve. Les sophistes ont-ils raison de proclamer qu'on ne peut « expliquer » mon bain dans ce fleuve ? Peut-on bâtir une théorie, ou même seulement des connaissances sur les fleuves en général ? Si oui, il est clair, comme l'on montré les sophistes, qu'on ne parlera d'aucun fleuve en particulier et donc en conséquence, d'aucun fleuve réel. Quelles sont alors la portée et la pertinence des connaissances ainsi construites ? Elles ne peuvent se juger que par la mise en correspondance, toujours approximative, des inférences ou des calculs (dans les sciences les plus formalisées) conduits dans le cadre du modèle, et des informations tirées du réel. Ou plus particulièrement de cette partie du réel qui peut être légitimement postulée en correspondance (encore le réductionnisme [316]), et qu'on peut appeler la structure praxéologique , pas la complexité supposée de l'objet d'étude qui fait problème ».* Donc, les résultats que nous obtiendrons seront contingents du cadrage que nous nous sommes efforcée de délimiter mais sont porteurs de possibles généralisations.

Ajouté à cela, un troisième démon (dans la même mouvance) qui pourrait s'exprimer à travers l'interrogation tout aussi persistante que lancinante concernant la garantie de scientificité qu'offrent nos choix méthodologiques. En l'occurrence, s'agissant de notre option expérimentale nous mettons en jeu un objet d'étude théorique (l'enseignement de l'idée du vrai en mathématiques qui ne fait pas partie des programmes officiels tel que nous le concevons dans sa totalité) qui s'applique à des acteurs humains, puisqu'il s'agit d'observer la répercussion de cet enseignement sur les élèves. Ainsi donc, décrivons-nous une situation singulière, alors comment pouvons-nous avoir l'ambition de produire de la connaissance qui, elle, aurait un caractère d'universalité alors même que se greffe en plus l'aspect téléologique de nos sujets qui confère à nos situations une dynamique quelque peu instable ? Aboutissons-nous à une aporie de laquelle nous ne pourrions nous échapper ? Nous choisirons alors de nous comporter de manière cohérente avec ce sur quoi porte notre recherche et nous sortirons de ce semblant de paradoxe en posant nos présupposés de départ : la visée de nos choix méthodologiques résidera dans l'obtention d'une « *simple stabilité des résultats obtenus dans des contextes semblables »* comme le souligne justement Artigue. Autrement dit, le gage de scientificité de notre recherche résultera au niveau de notre vigilance à respecter le cadre explicatif qui nous permettra d'exhiber des résultats fiables, c'est-à-dire de contextualiser lesdits résultats par rapport à notre cadre théorique et en lien avec les situations de classe

[316] Clarifions le sens que lui donne Joshua : « construction théorique d'objets, par focalisation sur un nombre restreint de facteurs » pour qu'il soit « irrecevable sur le plan épistémologique de le critiquer au seul motif qu'il néglige par là même une infinité d'autres facteurs possibles voire tout simplement de relations possibles entre les seuls facteurs retenus ». *L'année de la recherche en sciences de l'éducation*. Peut-on vraiment expérimenter, à quelles conditions ? Edition PUF. 1998. p.116.

dans lesquelles ils sont obtenus.

Nous ne saurions conclure cette partie réservée à la méthodologie sans rendre compte des précautions déontologiques que nous avons prises à l'égard des élèves concernés par l'expérimentation après avoir relevé les questionnaires ou effectué l'étude sur l'échantillon.

Elles consistent à signaler que nous avons informé nos classes de 4ième que nous menions une recherche (sans en expliciter en détails l'objet) et que nous avions besoin qu'ils nous donnent leur consentement quant à la possibilité que nous exploitions leurs éventuelles productions écrites. Nous les avons également assurés de notre totale discrétion en leur signalant qu'en aucun cas ce qu'ils proposeraient serait sujet à évaluation puisque notre

posture n'était dans ces moments là plus la même (allusion à notre métamorphose enseignant / chercheur). Nous avons renforcé nos propos en faisant allusion à la norme d'anonymat à laquelle nous souscrivions à leur égard au moment où nous prenions connaissance de leurs écrits.

En troisième, nous n'avons pas rappelé notre posture et nous avons travaillé ensemble sans autre allusion jusqu'à la fin de l'année scolaire.

Chapitre 2. Analyse du cahier de bord des élèves de l'échantillon en fin de troisième

L'analyse des productions d'élèves entreprise le sera pour la troisième fois. Le temps écoulé depuis les dernières productions de ces mêmes élèves est de cinq mois quand l'étude des productions de Mars est effectuée et de huit mois lorsque la dernière analyse est produite (Juin 2000).

1. Ancrage dans le contexte didactico-pédagogique de leur naissance.

Donc, le travail d'analyse porte sur les documents des élèves qui ont été respectivement réalisés en Mars 2000, Mai 2000, et Juin 2000.

En arrière plan, il faut considérer l'évolution du contexte dans lesquelles elles prennent sens : les principes d'action illustrés par certaines situations didactiques ont été mises en place (même si tout l'éventail des propositions n'a pu être expérimenté).

2. Description du matériel de données et de la méthode d'analyse.

Le recueil de données .

Il se fera au cours de trois phases par rapport à trois matériaux [317] différents.

Les première et deuxième phase, s'organisent autour d'écrits d'élèves résultant de l'approche des deux textes « hypothèses et vérité » et « mathématiques et vérité » [318] qui fait suite à des séances didactiques mises places dans lesquelles le débat a joué un rôle fondamental tout au long de l'année.

Les écrits analysés se rapportent aux élèves de 3$^{\text{ième}}$ E répartis de la manière suivante : le premier tiers de la classe (le même échantillon que depuis le début des analyses) augmenté de 4 élèves appartenant au deuxième tiers et 5 appartenant au troisième tiers.

Les productions écrites des élèves sont composées de textes (dont l'assemblage forme le cahier de bord) dont le nombre de pages varie, pour chaque production entre trois quarts de page et deux et demi (grand format).

Elles font suite aux traces écrites précédentes (Septembre - Octobre) permettant d'élaborer un cahier de bord offrant un espace écrit pour chaque élève, afin qu'il puisse se pencher sur la question du vrai durant l'année de 3$^{\text{ième}}$. Cette réflexion écrite est menée, hors séances scolaires, parallèlement au traitement d'autres situations. Les élèves disposent d'une durée d'un mois et demi environ entre chacune des phases.

Dès lors, par souci méthodologique, avant le codage des copies, ces dernières ont été soumises au professeur de français de la classe concernée afin qu'il évalue si la part personnelle des élèves était effective (repérée essentiellement à partir de la manière de s'exprimer par écrit) : le verdict a été positif .

La troisième phase donnera à voir le traitement du Q sort et des interprétations que l'on peut en tirer à propos de la représentation des élèves sur l'idée du vrai . Elle se rapportera aux élèves de 3$^{\text{ième}}$ E (classe entière); 3$^{\text{ième}}$ A (classe témoin) et 3$^{\text{ième}}$ B (classe témoin).

La passation s'est déroulée sur une séance de une heure face à nous.

Le modèle de la méthode d'analyse et de traitement .

- Pour la première phase : texte « hypothèses et vérité » (Mars 2000).

Nous reprendrons la technique de découpage des textes en unités d'analyse.

Ces unités d'analyse sont sélectionnées en fonction de notre modèle de repérage a priori dont nous rappelons les critères :

- la présence ou non de l'évocation des prémisses dans la vision des élèves de l'idée du vrai ; manière dont ils conçoivent le rôle de ces prémisses.
- la capacité des élèves à mobiliser la référence aux principes de rationalité dans leur vision du vrai et la «perception» par rapport au sens des (ou du) principe(s) de

[317] Nous rappelons que des exemplaires d'écrits d'élèves sont à disposition du lecteur en Annexe 9.

[318] Textes tous deux composés des extraits de l'ouvrage de N. Chouchan auxquels nous avons déjà fait référence, joints en Annexes 8.

rationalité que les élèves mobilisent .

- mise en évidence et analyse des idées fortes repérées pour esquisser leur paysage de l'idée du vrai.

Ces unités d'analyse correspondant à des sélections d'extraits de productions d'élèves repérés par écho analogique (en regard de notre modèle a priori).

- Pour la deuxième phase : texte « mathématiques et vérité » (Mai 2000).

Nous nous inspirons de la méthode de l'exploitation globale d'un matériel selon Van Der Maren dont le but, nous le rappelons est *« d'élaborer un modèle du sens ou de la signification du texte à analyser afin, le plus souvent, d'en montrer la valeur ou les défauts »* [319] .

Elle se décline selon la stratégie suivante :

Nous exposerons le modèle du sens attendu du texte en faisant apparaître les idées fortes qu'il devrait contenir (en tenant compte du niveau des élèves : 3ième de collège).

Nous vérifierons alors, pour chaque production d'élève par une référence aux extraits d'écrits des élèves la présence ou l'absence des éléments du modèle.

Nous émettrons alors des interprétations en regard du sens que cela apporte en regard de l'émergence des représentations de l'idée du vrai chez les élèves.

- Pour la troisième phase : Q sort (Juin 2000).

Nous avons eu recours à l'utilisation d'un traitement informatique pour analyser, examiner et traiter nos données.

3. Emergence des représentations de l'idée du vrai chez les élèves de fin de troisième.

a) Première phase : à propos du texte « hypothèses et vérité » (Mars 2000).

Première étape : analyse des données.

La présence ou non de l'évocation des prémisses dans leur vision de l'idée du vrai ; manière dont ils conçoivent le rôle de ces prémisses.

Cette question de la reconnaissance de la dépendance du vrai vis à vis des prémisses au départ est très apparente et se manifeste par les apports suivants :

1.

[...] « les mathématiques s'appuient sur des hypothèses qui sont soit démontrées, soit non démontrées » (E 0002) ou bien « [...] on peut dire que si on

[319] VAN DER MAREN opus cit. p. 404.

est arrivé au monde actuel alors il y a forcément de la vérité à la base » (E0001)

2. **Il peut y avoir des hypothèses qui ne sont jamais prouvées :**

« quand on a une <u>hypothèse</u>, ce n'est <u>jamais prouvé</u> et quand on l'a <u>prouvé</u> ce n'est <u>pas totalement vérifié</u> car il y a <u>toujours un quelque chose d'abstrait</u> que l'on ne peut prouver et qu'on <u>admet</u> »[320] (E0003)

3. **La prémisse au départ est un jalon indispensable dans l'accès au vrai mais fragile :**

« quand on veut démontrer un outil mathématique, on s'appuie sur des <u>hypothèses que l'on considère comme vraies</u> mais que l'on n'a <u>pas prouvé</u> préalablement, qui ont donc un <u>fondement fragile</u> et qu'il suffirait d'un <u>contre exemple</u> pour que toute la démonstration s'écroule puisque ses <u>bases sont incertaines</u> ». (E004)

4. **La création d'hypothèses est humaine :**

« ...je pense que si l'Homme n'avait pas commencé à faire des suppositions et des hypothèses alors il n'aurait rein eu à prouver et les math. n'auraient peut-être pas existé ». (E0002)

5. **La notion d'hypothèse (même validée) n'induit pas l'existence du vrai en mathématiques car sa création est humaine** :

« l'idée du vrai en mathématiques n'existe pas car la vérité est basée sur des hypothèses. Même si ces hypothèses ont été développées, reprises, elles ne sont pas pour autant véritables car c'est l'homme ou du moins « l'intelligence de l'homme » qui les a crées [...] et l'idée de vrai a des limites car on ne peut pas tout prouver par la science mathématique ». (E 0009).

Leur capacité à mobiliser la référence aux principes de rationalité dans leur vision du vrai. et leur « perception » par rapport au sens des (ou du) principe(s) de rationalité que les élèves mobilisent.

C'est le contre exemple qui fait l'objet d'une mobilisation « naturelle » ; associé à la considération suivante :

Puissance du contre - exemple à prouver le faux :

« D'après ce que j'ai compris, la vérité a des limites et peut être à tout moment remise en question [...]En fait, il suffit de trouver un contre exemple pour tout démonter ». (E 0006)

Parallèlement se greffent d'autres arguments qui sortent des critères posés à priori et qu'il est important de souligner :

L'idée de réfutation .

« Je pense que si les hypothèses sont mal ciblées, elles peuvent être fausses. Cela peut être recherché (prouver que l'hypothèse est fausse) ou bien pas fait exprès. A ce moment, ce qu'on a prouvé ne tient pas la route et peut être réfuté à

[320] Toutes les lignes en italique correspondent à des propos écrits d'élèves identifiés par le codage qui suit la citation ; c'est nous qui avons souligné certains termes (ou groupes de termes).

tout moment ». (E0001)

L'idée de soumettre la recherche du vrai à la notion de faille .

« A chaque fois que l'on prouve quelque il faut toujours essayer de trouver une faille ». (E0003)

3. **L'introduction de la préoccupation du totalement vrai et de la présomption de faille des prémisses de départ.**

« L'idée de vérité en mathématiques est, par exemple, une démonstration que l'on prouve, que l'on ne peut pas réfuter. Pour cela, on s'appuie sur des hypothèses vérifiées. Mais qui nous dit que ces hypothèses sont totalement vraies ? Il existe peut-être une faille à travers ces hypothèses que personne n'aurait réussi à trouver : comme le théorème de Pythagore qui tient depuis des dizaines de siècles ... » (E 0007)

4. **Le vrai dépend du contexte .**

« Et pourtant, la vérité est irréfutable, mais pas l'hypothèse. Et si Gauss a essayé d'ajouter quelque chose aux mathématiques du temps d'Euclide, c'est qu'ils ne sont pas partis des mêmes hypothèses.[...] Et même avec plus de deux millénaires d'écart, ils ont tous deux raison ». (E0001) « Certaines règles en math. peuvent être « vraies » dans un certain contexte et s'avérer fausses dans un autre ». (E0002)

La mise en évidence des idées fortes repérées pour esquisser leur paysage de l'idée du vrai.

« Le vrai en math est une chose de vérité et une chose de doute ». (E0008)

La recherche de la « ***vérité vraie*** **» comme une quête**

« pour répondre à toutes les questions que l'on se pose ; c'est ce qui rapproche les mathématiques de la vie de tous les jours ». (E000 6)

Méfiance par rapport au vrai décrété à partir d'un argument d'autorité :

« avant, Platon qui était un grand savant pour l'époque a démontré certaines choses mais comme il avait démontré pas mal de choses avant, les gens ont cru alors tout ce qu'il disait et qui n'était pas toujours fondé ». (E0003) « Il existe aussi un phénomène de désinformation. C'est-à-dire que si on dit à quelqu'un une affirmation, il n'essayera pas forcément de vérifier cette affirmation et sa démonstration qu'il aura faite avec ne sera pas forcément juste ». (E 0005) Les évidences ne sont pas forcément des vérités. (E 0005)

L'idée du vrai à des limites car on ne peut pas tout prouver par les mathématiques (E0009)

L'idée de vérité est associée à la démonstration qui elle-même dépend de la fragilité des hypothèses non vérifiées et admises. (E 0005)

Le vrai tient jusqu'à ce qu'il y ait un contre exemple pour mettre en doute ce qui est avancé. (E0008)

« Ce n'est pas avec de la logique qu'on ajoute du vrai » (E0001)

Construction des mathématiques repose sur de la fragilité à cause des hypothèses admises. (E0007)

La vérité est difficile à admettre dans la mesure où c'est l'homme qui fixe les règles au départ et qu'il utilise des outils pour prouver, qu'il a fabriqués au préalable. (E0009)

Balayage des idées avancées par les élèves de 3 ième E en Mars 2000.

- La présence ou non de l'évocation des prémisses dans leur vision de l'idée du vrai - manière dont ils conçoivent le rôle de ces prémisses.

1. les mathématiques s'appuient sur des hypothèses qui sont soit démontrées, soit non démontrées (E 0002) ou bien on peut dire que si on est arrivé au monde actuel alors il y a forcément de la vérité à la base (E0001)
2. Il peut y avoir des hypothèses qui ne sont jamais prouvées
3. La prémisse au départ est un jalon indispensable dans l'accès au vrai mais fragile :
4. La création d'hypothèses est humaine
5. La notion d'hypothèse (même validée) n'induit pas l'existence du vrai en mathématiques car sa création est humaine

- Leur capacité à mobiliser la référence aux principes de rationalité dans leur vision du vrai. et leur « perception » par rapport au sens des (ou du) principe(s) de rationalité que les élèves mobilisent.

C'est le contre exemple qui fait l'objet d'une mobilisation « naturelle »

Puissance du contre - exemple à prouver le faux

- Parallèlement se greffent d'autres arguments qui sortent des critères posés à priori et qu'il est important de souligner :

1. L'idée de réfutation
2. L'idée de soumettre la recherche du vrai à la notion de faille
3. L'introduction de la préoccupation du totalement vrai et de la présomption de faille des prémisses de départ
4. Le vrai dépend du contexte

- La mise en évidence des idées fortes repérées pour esquisser leur paysage de l'idée du vrai.

1. La recherche de la « vérité vraie » comme une quête
2. Méfiance par rapport au vrai décrété à partir d'un argument d'autorité
3. L'idée du vrai à des limites
4. La vérité est difficile à admettre dans la mesure où c'est l'homme qui fixe les règles au départ

L'idée de vérité est associée à la démonstration qui elle-même dépend de la fragilité des hypothèses non vérifiées et admises (E 0005) 5.

Le vrai tient jusqu'à ce qu'il y ait un contre exemple pour mettre en doute (E0008) 6.

Ce n'est pas avec de la logique qu'on ajoute du vrai (E0001) 7.

Construction des mathématiques repose sur de la fragilité à cause des hypothèses admises (E0007) 8.

Deuxième étape : examen des données.

Tous les élèves ont émis un point de vue et chacun a essayé de le construire à partir d'une réflexion approfondie.

Les textes produits sont d'une réelle consistance. Les élèves ont développé un certain nombre d'arguments et leur rédaction dépasse la forme hypothético-déductive mathématique tout en mettant en réseau un certain nombre de points qui s'articulent selon un schéma soit argumentaire, soit démonstratif. Ils étayent leur pensée en faisant référence à des extraits de textes mais cherchent à les dépasser en émettant leur propre pensée.

Troisième étape : production de résultats.

La présence ou non de l'évocation des prémisses dans leur vision de l'idée du vrai ; manière dont les élèves conçoivent le rôle de ces prémisses.

D'une part, les élèves mettent systématiquement en avant la notion de prémisses assumées quand ils évoquent l'idée du vrai.

D'autre part, ils font ressortir l'existence des deux types de prémisses : celles qui sont assumées au départ et celles que l'on va chercher à valider pour que l'on puisse les assumer au départ (d'une preuve).

En outre, la question de l'existence des prémisses assumées au départ, c'est-à-dire admises sans ayant subi de preuve qui la valide, (notamment dans la construction de l'édifice mathématique), peut avoir un retentissement fort sur leur vision du vrai puisque qu'elles fragilisent la notion de vrai. L'accès au vrai est alors mis en doute ou bien la prise de conscience du vrai à condition que les prémisses sur lesquelles elles reposent soient validées apparaît.

Enfin, la question des hypothèses, qu'elles soient prouvées ou assumées peut poser question pour les élèves en regard de leur essence humaine. Cela peut même porter le discrédit sur l'idée même de vrai.

Leur capacité à mobiliser la référence aux principes de rationalité dans leur vision du vrai et la « perception » par rapport au sens des (ou du) principe(s) de rationalité que les élèves mobilisent .

Le principe de non-contradiction (on n'a pas le droit d'affirmer une chose et son contraire [dans un contexte donné]) est relié spontanément à l'idée du vrai par l'intermédiaire du pouvoir du contre exemple qui sert à poser des limites au vrai.

Parallèlement se greffent d'autres arguments qui sortent des critères posés à priori et qu'il est important de souligner :

On remarque également la prégnance de l'idée que l'accès au vrai n'est pas si sûr : cette remise en cause de l'accessibilité au vrai peut être conçue à propos d'une faille qui porterait sur les hypothèses au départ. Ce qui pointerait que la notion de contexte émerge pour assurer l'idée de vrai. Autrement dit, c'est le sens du si...alors qui prend de la consistance puisque relié à la notion d'hypothèses nécessaires : si les conditions d'application ne sont pas vérifiées la conclusion ne peut être atteinte, on est donc privé du vrai.

Mais, la contestation de l'accessibilité au vrai peut aller plus loin, c'est-à-dire que les élèves se heurtent au problème de la régression à l'infini (*« qui nous dit que ces hypothèses sont totalement vraies?)* qui implique qu'il faille admettre au départ, que des prémisses soient admises en tant que telles .

Cette difficulté à admettre l'admission ne serait-elle pas en lien avec « le ce sur quoi porte le vrai » ? Le vrai porte sur l'enchaînement de propositions mais pas sur le sens de la proposition elle-même . Prenons l'exemple du célèbre théorème de Pythagore (souvent évoqué). Si un triangle est rectangle alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés . Ce qui est vrai c'est l'articulation entre le si et le alors, autrement dit, entre la mise en relation de la condition d'application admise au départ (triangle rectangle) avec la conclusion (carré de la longueur de l'hypoténuse égale somme des carrés des longueurs des deux autres côtés) vérifiée à l'arrivée. Questionner le vrai du triangle rectangle, c'est repérer s'il possède un angle droit. Questionner l'angle droit c'est dire qu'il mesure 90 degrés mais le vrai des 90 degrés n'a plus de sens puisqu'il s'agit d'une définition posée a priori, d'un parti pris conceptuel mathématique. D'une hypothèse qui trouve son sens de part son adhésion conceptuelle qui permet de ne plus tourner en rond.

La mise en évidence des idées fortes repérées pour esquisser leur paysage de l'idée du vrai.

Quand des élèves pensent l'idée du vrai leur réflexion peut prendre plusieurs orientations.

L'idée du vrai est pensée dans le cadre des mathématiques et apparaissent les arguments :

- le vrai repose sur des fondements fragiles (allusion aux hypothèses assumées ou vérifiées).
- le vrai réclame un traitement scientifique : il doit être fondé.
- le vrai a des limites.
- le vrai est une affaire humaine donc est douteux (allusion au fait que l'homme

construit les hypothèses et les outils qui permettent d'accéder au vrai).

- le vrai repose sur des preuves qui elles-mêmes reposent sur des hypothèses .
- le vrai peut avoir une durée de vie limitée car menacé par le contre exemple.
- la logique n'affirme pas de puissance dans la quête du vrai.
- le vrai peut être questionné en mathématiques (découverte pour l'élève).

L'idée du vrai est pensée en référence au statut des mathématiques à travers l'expression des réflexions :

- les mathématiques n'ont pas un pouvoir illimité.
- les mathématiques sont un édifice construit par l'homme.
- les mathématiques reposent sur un ensemble d'hypothèses qui rend l'édifice fragile.

L'idée du vrai est pensée en regard de l'humain et se traduisent par les propos suivants :

- la recherche du vrai permet de répondre à questions autres que des questions mathématiques.
- la pensée personnelle doit être sollicitée pour penser le vrai à cause du pouvoir limité des mathématiques.
- le vrai doit informer dans la mesure où des précautions déontologiques ont été prises : être sûr des hypothèses de départ sinon le risque de la désinformation existe sous couvert du vrai.
- les évidences ne sont pas forcément des vérités.
- le vrai en mathématiques est en lien avec la réalité du monde.

Quatrième étape : conclusions relatives aux productions des élèves en Mars 2000.

La question des prémisses, tant du point de vue de leur rôle, de leur statut et de leur incidence joue un rôle central dans la vision de l'idée du vrai chez les élèves.

Néanmoins, l'admission comme principe que des prémisses puissent être assumées sans subir de validation peut poser encore question chez l'élève et inférer de la suspicion envers l'idée du vrai.

L'idée du vrai que développent les élèves s'oriente vers vrai en fonction de... prenant en compte la notion de contexte .

Enfin, nous soulignons l'incidence de la question du vrai sur la naissance de la vision des élèves axées dans le champ épistémologique, sur le statut des mathématiques et de sa résonance sur des questions ontologiques et sociales.

b) Deuxième phase : à propos du texte « mathématiques et vérité » (Mai 2000).

Première étape : analyse des données.

Construction du modèle (a priori) du sens attendu du texte.

L'architecture globale de ce modèle prend appui sur les grandes idées fortes que développe ce texte. Puis il comprendra des pistes d'idées qui peuvent en découler. Il est conçu en prenant en compte le niveau de la classe à laquelle ce texte s'adresse et de la « culture mathématique » du groupe au moment où il est donné (Mai 2000). D'où l'absence volontaire de ne pas mentionner certaines idées fortes transparaissant à travers le texte car découlant d'un paysage théorique que les élèves ne possèdent pas encore.

Modèle du sens attendu chez l'élève posé a priori:

LES IDÉES FORTES (NOTÉES IN) :

- **I1** :Il existerait des contenus scientifiques (en particulier en mathématiques) qui ne seraient pas remis en question pendant longtemps (exemple de la géométrie euclidienne) ; les mathématiques sont fondées sur des hypothèses .
- **I2** : Ces contenus incontestables servent de points d'appuis pour les autres sciences.
- **I3** : L'évolution des mathématiques ne ressemble pas à celle des autres sciences (notamment à celle de la physique) : il n'y a pas de ruptures .
- **I4** : L'attachement à un ensemble d'idées tenaces (qui empêchent de voir autrement, exemple du texte à propos d'Aristote) a bloqué pendant longtemps l'évolution des mathématiques (précisions du texte en regard des mathématiques grecques et des bouleversements du XIXième siècle).
- **I5** : Les mathématiques n'évoluent pas de manière linéaire : les conflits théoriques existent.
- **I6** :Il n'y a pas de principes absolus en mathématiques ; les mathématiques se construisent autour d'un ensemble d'hypothèses par rapport auxquelles il y a un consensus.

LES IDÉES QUI EN DÉCOULENT (IDN) :

- **ID1** : En mathématiques l'idée du vrai peut durer longtemps.
- **ID2** : Le vrai en mathématiques sert pour les autres sciences.
- **ID3** : Il s'agit plus de remanier que d'invalider en mathématiques ; une hypothèse peut être fausse si elle ne résiste pas à un contre exemple.
- **ID4** : Nécessité d'envisager différents points de vue pour dire le vrai

- **ID5** : Le débat en mathématiques tient une place importante.
- **ID6** : Le vrai est fonction des bases que l'on prend pour vraies au départ et ID4 inclus dans ID6.

La référence à ce modèle de sens attendu du texte, nous servira pour appréhender les représentations des élèves sur l'idée du vrai en regard de notre modèle de repérage a priori de l'évolution de l'idée du vrai, au travers de la présence des idées fortes (et celles qui en découlent) convoquées.

- Présence de **I1** ou **I6** ou **ID4** ou **ID6** ou **ID1** comme indicateur de :

la référence à la présence ou non de l'évocation des prémisses dans leur vision de l'idée du vrai et de la manière dont ils conçoivent le rôle de ces prémisses.

Seront également pris en compte les rang et numéro d'ordre d'apparition qui caractérisent l'avancée des idées fortes.

- Présence de **I4** ou **ID3** comme indicateur de :

leur capacité à mobiliser la référence aux principes de rationalité dans leur vision du vrai et leur « perception » par rapport au sens des (ou du) principe(s) de rationalité que les élèves mobilisent .

Seront également pris en compte les rang et numéro d'ordre d'apparition qui caractérisent l'avancée des idées fortes.

- Présence de **I3** ou **I5** ou **ID2** ou **ID5** comme indicateur des :

idées fortes repérées pour esquisser leur paysage de l'idée du vrai en mettant en parallèle les idées fortes avancées par les élèves et celles qui seront extérieures au modèle posées a priori.

Nous attirons aussi l'attention sur le sens du « ou » employé. Il est étant entendu selon l'exemple : présence de I1 ou I2 signifiant soit la présence de I1 soit la présence de I2 soit la présence de I1 et I2 .

Présentation de l'architecture de chaque texte des élèves en référence au modèle a priori et selon leur appartenance aux tiers de la classe.

Chaque texte est lu avec repérage des idées fortes que l'élève avance. Elles seront alors mentionnées à l'aide des codes présentées précédemment (In et IDn n variant de 1 à 6).

Quand d'autres idées fortes ou idées qui découlent du texte sont présentées par l'élève comme n'appartenant pas à notre modèle a priori elles seront notées IDEnp (n désignant le codage inchangé de l'élève et p la numérotation des idées). Elles sont explicitées selon la version intégrale de l'élève repérée par l'écriture en italique (après correction orthographique si besoin est). Le petit caractère employé n'est là que pour respecter une contrainte du point de vue de la forme (limitation de l'espace d'écriture de la thèse).

Le repérage tient compte du respect de l'ordre dans lequel sont apparues ces hypothèses.

PREMIER TIERS DE LA CLASSE.

Texte de l'élève E1 :

I6 ; I1 ;

ID3 ; ID4 ; ID6.

IDE11 : *remise en question de l'idée du vrai en mathématique : pourquoi plusieurs géométries seraient-elles vraies et pourquoi une seule arithmétique le serait ?*

IDE12 : *le vrai en mathématiques, c'est comme le vrai dans la vie quotidienne : chaque personne a son idée de la vérité et elle vit de et avec cette vérité. Si on ne croit plus en cette vérité, on est dérouté, déséquilibré et on perd espoir. En mathématiques, en particulier en géométrie, chaque mathématicien qui a inventé une nouvelle géométrie détient la clé de SA « vraie » géométrie. Chaque géométrie « vit » de cette vérité. Le jour où cette vérité est reniée, réfutée, la géométrie qui détenait cette vérité « meurt ».*

Le texte de l'élève E2 (l'élève souligne qu'une partie du texte a été dure pour lui):

I5 ; I3 ;

ID4 et ID6 ;

IDE21 : *A mon avis ce sont ces divergences qui permettent l'évolution*

IDE22 : *Je trouve qu'il est important d'avoir du recul par rapport à ce que l'on entend et ce que l'on voit chaque jour car la société d'aujourd'hui est saturée d'informations qu'elle ne sait pas toujours analyser comme il le faudrait. Enfin je pense qu'il est nécessaire et même indispensable de faire en sorte de plus en plus que les élèves dès la sixième soient sensibilisés par rapport au « vrai » (dans tous les domaines et pas seulement en math.) de n'importe quelle façon que ce soit. Je pense que ce travail* [sur le vrai] *m'a aidée à développer un esprit « critique » (ce que les profs nous apprennent dès la 6ième mais qui devrait être encore plus travaillé à mon avis) et à ne pas tout croire.*

Texte de l'élève E3 :

I1 ; I2 ; I6.

Texte de l'élève E4 :

I3 ; I5 ; I6 ;

ID6 ; ID1

IDE41 : *les mathématiciens prouvent toujours que ce qui est admis n'est pas forcément la vérité. Le « vrai » mathématique n'est pas atteint et je ne pense pas que l'homme pourra l'atteindre un jour ; trop de limites subsistent dans le « savoir » humain pour que le « vrai » soit découvert. On fait des progrès même dans la façon de penser les mathématiques mais il reste beaucoup de choses à découvrir (à mon avis).*

Texte de l'élève E5 :

I1 ; I6

ID6

IDE51 : *comme les math. ne sont fondées que sur des hypothèses, la vérité ne peut pas exister.*

<u>Texte de l'élève E6 (l'élève a des difficultés pour accéder au texte car « *trop d'idées qui partent dans tous les sens* ») :</u>

ID1 ; ID3 ;

<u>Texte de l'élève E7</u> :

I2 ; I1 ; I3 ; I5 ;

ID4 ; ID6 ;

IDE71 : *Toutefois, il existe une infime chance pour que ces hypothèses soit disant irréfutables puissent être balayées par un contre exemple*

IDE72 : *...j'ai découvert que tous les théorèmes qu'on apprend tout au long de notre scolarité ne sont pas forcément vrais (allusion au fameux postulat d'Euclide)* ou encore *cependant avant le XIXième siècle les mathématiciens avaient une autre définition du nombre donc on peut penser que les théorèmes soit disant corrects aujourd'hui seront dans quelques siècles totalement faux.*

<u>Texte de l'élève E8 (peu de lignes l'élève souligne la dureté du texte pour lui):</u>

IDE81 : *le vrai est toujours démontré ; tout ce qui est vrai est tout ce qui n'est pas démontré de faux ou tout ce qui est démontré de vrai sans contre exemple.*

<u>Texte de l'élève E9 :</u>

I3 ; I1 ; I6 ;

ID3

IDE91 : *il n'y a pas vraiment de vrai en mathématiques car ce ne sont que des hypothèses;* [...] *tous les gens [...] doivent se servir des hypothèses des mathématiciens sans rien dire car elles ont été prouvées donc c'est vrai.*

IDE92 : *les mathématiques sont inépuisables puisque c'est l'invention de l'homme. Et qui dit invention dit imagination dit infini.*

DEUXIEME TIERS DE LA CLASSE À PARTIR DE 5 ÉLÈVES.

<u>Texte de l'élève E 11 :</u>

I3 ; I1 ; I6 ;

IDE111 : *Au XIXième siècle, on a pensé assister à une révolution en découvrant une géométrie non euclidienne. Il ne s'agissait pas de remettre en question celle-ci mais de partir sur de nouveaux axiomes.*

IDE112 : *En regard de l'idée de vérité en math. j'en déduis qu'il n'existe pas de vérité absolue en math. En math. on construit un raisonnement précis à partir d'axiomes ou d'hypothèses. En math. il y a plusieurs vérités en fonction du point de départ.*

Texte de l'élève E12 :

I1 ; I2 ; I3 ;

IDE121 : *On s'aperçoit qu'en mathématiques, on aurait affaire à de « simples hypothèses » et non pas à « des principes absolus ». Cela rejoint parfaitement ce que je pense des mathématiques c'est-à-dire que l'on peut à n'importe quel moment prouver le contraire de ce qu'on appelle un théorème « valide ».*

Texte de l'élève E16 :

I2 ; I1

ID1

Texte de l'élève E17 :

I3

ID3

IDE17 : *je me dis également que ce n'est que l'avis de l'auteur de ce texte, ce sont ses arguments...*

Texte de l'élève E18 :

I1 ; I6

TROISIEME TIERS DE LA CLASSE À PARTIR DE 4 ÉLÈVES .

<u>Texte de l'élève E 24</u> :

I1

IDE241 : *les hommes ont influencé les mathématiques*

<u>Texte de l'élève E27 :</u>

I1 ; I6

IDE271 :*j'en déduis donc que les mathématiques sont une matière toujours en mouvement et qu'elles reposent sur des hypothèses et pas des vérités.*

<u>Texte de l'élève E28 :</u>

I3 ; I1 ;

IDE281 : *il n'y a pas de vrai en mathématiques ; il faut toujours prouver par des hypothèses qui sont elles - mêmes prouver par des hypothèses.*

<u>Texte de l'élève E29 :</u>

I2 ; I1 ;

IDE291 : *les mathématiques sont en quelque sorte un immense univers que l'on prend et rassemble morceau par morceau . Si aujourd'hui nous en sommes arrivés jusque là c'est grâce à nos anciens. Sans eux le mot mathématiques n'aurait aucun sens.*

c) Récapitulation des données sous la forme de tableaux pour faciliter leur examen et leur traitement.

Tableau récapitulant les idées fortes du texte et celles qui en découlent : 1ier tiers de la classe de 3ième E. Soit T1.

Elèves Idées	E1	E2 □	E3	E4	E5	E6 □	E7	E8 □	E9
In n : 1 à 6	I6 ; I1	I5 ; I3	I1 ; I2I6	I3 ; I5 I6	I1I6		I2 ; I1I3 ; I5		I3 ; I1I6
IDn n : 1 à 6	ID3 ID4 ; ID6	ID4ID6		ID1ID6	ID6	ID1ID3	ID4ID6		ID3
IDEp où p nb d'idées	IDE1 IDE2	IDE1IDE2		IDE1	IDE1		IDE1IDE2	IDE1	IDE1IDE2

Les élèves par rapport auxquels figurent □ rappellent que ces derniers ont eu des difficultés pour aborder le texte.

Tableau récapitulant les idées fortes du texte et celles qui en découlent : 2ième tiers et 3ième tiers de la classe de 3ième E . Soit T2.

Elèves Idées	E11□	E12	E16	E17	E18□	E24	E27	E28	E29
In n : 1 à 6	I3 ; I1 I6	I1 ; I2I3	I2 ; I1	I3	I1 ; I6	I1	I1 ; I6	I3 ; I1	I2 ; I1
IDn n : 1 à 6				ID3					
IDEp où p nb d'idées	IDE1 IDE2	IDE1	IDE1	IDE1		IDE1	IDE1	IDE1	IDE1

Les élèves par rapport auxquels figurent □ rappellent que ces derniers ont eu des difficultés pour aborder le texte.

L'élève par rapport auquel figure le signe □rappelle la pertinence de ses propos.

Dans l'optique du traitement, pour avoir une meilleure vision de la place qu'occupent les idées fortes soit directement énoncées comme telles soit par l'intermédiaire des idées qui en découlent nous proposons le tableau ci-après.

Tableau montrant les idées fortes privilégiées repérées selon les occurrences des idées fortes ou des idées qui en découlent : (exemple I1 ou ID1). Relativement aux trois tiers. Soit T3.

	I1 ou ID1	I2 ou ID2	I3 ou ID3	I4 ou ID4	I5 ou ID5	I6 ou ID6
1ier tiers	7	2	7	3	2	10
2ième tiers	4	2	4	0	0	2
3ième tiers	4	1	1	0	0	1

Tableau montrant les idées fortes privilégiées (sans les idées qui en découlent) repérées selon leur ordre d'apparition et la fréquence d'apparition à cette place pour l'ensemble des trois tiers. Soit T4.

Référence aux idées Numéro d'ordre	I1	I2	I3	I4	I5	I6
1	6	3	5	0	1	1
2	7	2	1	0	1	3
3	0	0	2	0	0	4
4	0	0	0	0	1	0

Deuxième étape : examen des données selon le tiers d'appartenance.

PREMIER TIERS DE LA CLASSE.

Nous notons l'absence de la référence (par les élèves) d'une idée qui appartient au modèle du sens attendu posé a priori, celle codée par I4 (l'attachement à un ensemble d'idées tenaces a bloqué pendant longtemps l'évolution des mathématiques).

Les idées avancées extérieures au modèle représentent un apport non négligeable. Les élèves ont laissé libre cours à leur pensée lorsqu'ils ont eu à fournir des idées qui découlaient du texte et ont parfois fait preuve d'une perspicacité qui se doit d'être soulignée (eu égard à leur appartenance à la classe de 3^{ième}).

On observe également l'existence d'élèves pour qui le texte a présenté une difficulté en remarquant, soit le défaut à exhiber les idées fortes soit à extraire les idées qui découlaient du texte. En revanche, cela n'a pas empêché un élève qui déclarait avoir eu du mal par rapport à une partie du texte d'être très productif (E2).

DEUXIEME TIERS ET TROISIEME TIERS DE LA CLASSE.

L'examen des données est sensiblement le même dans les deuxième et troisième tiers.

On relève l'absence des idées fortes I4 et I5 qui appartiennent au modèle sous quelque forme que cela soit .

Nous notons également l'inexistence de la production d'idées fortes extérieures au modèle (sauf pour un cas d'élève appartenant au troisième tiers).

De plus, on remarque que la production des idées qui découlent du texte et qui appartiennent au modèle ne sont pas nombreuses. En revanche, les idées qui découlent du texte et sont extérieures au modèle sont régulièrement avancées.

Troisième étape : production des résultats et conclusions.

Nous traitons d'abord les données en référence au premier tiers puis nous ferons intervenir les deux autres tiers pour juger de l'incidence de la variable niveau dans les observations obtenues.

Pour que les propos suivants prennent du sens, nous rappellerons tout d'abord ce qui se cache derrière les idées codées :

- I1 : Il existerait des contenus scientifiques (en particulier en mathématiques) qui ne seraient pas remis en question pendant longtemps (exemple de la géométrie euclidienne) ; les mathématiques sont fondées sur des hypothèses .

- I2 : Ces contenus incontestables servent de points d'appuis pour les autres sciences.
- I6 : Il n'y a pas de principes absolus en mathématiques ; les mathématiques se construisent autour d'un ensemble d'hypothèses par rapport auxquelles il y a un consensus.
- ID1 : En mathématiques l'idée du vrai peut durer longtemps.
- ID4 : Nécessité d'envisager différents points de vue pour dire le vrai
- ID6 : Le vrai est fonction des bases que l'on prend pour vraies au départ (ID4 inclus dans ID6).

Nous avons prédéfini les idées ou les associations d'idées (présence conjointe ou non) qui incitaient à penser leur lien avec les critères que nous avons également posés a priori de manière à faire émerger les représentations de l'idée du vrai qui jalonnaient la pensée de l'élève en cette fin d'année scolaire (Mai).

A propos de la présence de I1 ou I6 ou ID4 ou ID6 ou de leur association comme indicateur de :

la référence à la présence ou non de l'évocation des prémisses dans la vision de l'idée du vrai chez les élèves et de la manière dont ils conçoivent le rôle de ces prémisses (la nécessité d'être assumée au départ soit par admission soit par validation via une preuve).

Les tableaux T1 et T3 renseignent sur la présence effective des associations I1, I6 et ID6. Ils pointent en outre, la ténacité de la représentation qui y correspond chez les élèves concernés si l'on en juge en plus, par leur nombre d'occurrences obtenues par chaque idée, (I1 et I6 avec ID6 font partie des idées fortes les plus citées quand on regarde le tableau T4) et l'ordre d'avancée de I1 par les élèves (le premier).

Si l'on considère le tableau T2, nous constatons toujours la prégnance de l'idée forte I1 et si l'association entre I1 et I6 se rencontre aussi ; ce qui émerge dans ce groupe, c'est la présence de types d'associations qui n'apparaissaient pas dans le premier tiers. En effet, il existe des associations entre I1 et I2 ainsi que celle entre I1 et I3 .

A partir de ce constat une interprétation.

Cela tendrait à montrer que pour certains élèves, si des contenus incontestables en mathématiques servent d'appui pour d'autres sciences et si l'évolution des mathématiques ne ressemble pas à celle des autres sciences (I3) [tout en admettant que les mathématiques sont construites sur des hypothèses (présence de I1)], alors persiste tout de même la difficulté à envisager la question du vrai en lien directe avec la question des hypothèses de départ. Ils auraient davantage une vision parcellaire : il y aurait les mathématiques (un bloc de vrai) et puis la question du vrai, sans interférence dirions-nous entre les deux. Nous verrions la disparition de ID4 et ID6 comme un renforcement de nos propos.

Mais nous serons très prudente quant à cette phase interprétative qui emploie précisément un raisonnement hypothético-déductif tout en n'étant pas certaine de nos prémisses de départ. Il ne s'agit que d'écrits dont la charge de sens peut nous échapper étant donné leur nature même et nos propres projections. L'entretien aurait été ici une façon de mieux éclairer ce que nous observons.

Première conclusion

Lors, nous en resterons au constat : les élèves qui appartiendraient aux deuxième et troisième tiers auraient davantage de mal (que le premier tiers) à articuler conjointement que les mathématiques se construisent sur des hypothèses certes, mais que ces dernières doivent être admises et que par là-même le vrai est fonction des bases que l'on prend pour vraies.

A travers les écrits des élèves observés nous pouvons en déduire qu'ils pensent d'une part, que les mathématiques sont fondées sur des hypothèses qui peuvent être tenues pour vraies au départ (I1) et que le vrai est fonction des bases que l'on prend pour vraies a priori (ID6).

En somme, ils évoquent la présence des prémisses dans leur vision de l'idée du vrai et la manière dont ils conçoivent le rôle de ces prémisses : c'est une caractéristique des élèves du premier tiers de la classe.

A propos de la présence de I4 ou ID3 ou de leur association comme indicateur de :

la capacité des élèves à mobiliser la référence aux principes de rationalité dans leur vision du vrai et leur « perception » par rapport au sens des (ou du) principe(s) de rationalité qu'ils mobilisent .

Sens de ces idées codées :

- I4 : L'attachement à un ensemble d'idées tenaces (qui empêchent de voir autrement, exemple du texte à propos d'Aristote) a bloqué pendant longtemps l'évolution des mathématiques (précisions du texte en regard des mathématiques grecques et des bouleversements du XIXième siècle).
- ID3: Il s'agit plus de remanier que d'invalider en mathématiques ;une hypothèse peut être fausse si elle ne résiste pas à un contre exemple.
- I3 : L'évolution des mathématiques ne ressemble pas à celle des autres sciences (notamment à celle de la physique) : il n'y a pas de ruptures .
- I5 : Les mathématiques n'évoluent pas de manière linéaire : les conflits théoriques existent.

Le tableau T1 le met clairement en évidence, ces idées fortes mentionnées ou les associations entre elles n'existent quasiment pas. Cette constatation est renforcée par la place qu'occupe l'association I4 ID4 (la dernière) et l'ordre que détient I4 (0 dans le tableau T4) ce qui traduit précisément que les élèves ne la citent même pas.

Il en va de même pour le tableau T2.

Cependant si l'on observe quand même la place qu'occupent les idées fortes I3 et I5 on remarquera que les élèves avancent pourtant que l'évolution des mathématiques n'est pas comme celle des autres sciences. Ils reconnaissent que les mathématiques n'évoluent pas non plus linéairement à cause des conflits théoriques (surtout au niveau du premier tiers).

Ces deux points de vue semblent contradictoires à première vue.

A première vue seulement, car nous pouvons très bien concevoir que le paysage théorique et culturel des élèves de 3ième joue le rôle d'obstacle dans cette vision. Ils ne peuvent pas encore prendre conscience de la manière dont les bouleversements du XIXième siècle (dont il est fait allusion dans le texte) ont retenti sur les mathématiques. Ils n'ont pas le recul suffisant pour appréhender l'édifice mathématique dans sa globalité. Ils ne perçoivent pas encore l'impact des règles et principes et ne saisissent pas le statut des théorèmes comme autant d'éléments fondateurs de la pensée mathématique .

Deuxième conclusion temporaire

A travers les écrits des élèves observés nous pouvons en déduire qu'ils ne perçoivent pas que :

l'attachement à un ensemble d'idées tenaces (qui empêchent de voir autrement) a bloqué pendant longtemps l'évolution des mathématiques. Ils sont peu réceptifs au fait qu'en mathématiques il s'agit moins d'invalider que de remanier.

Les élèves ne font pas intervenir la référence aux principes de rationalité dans leur vision du vrai .

A propos de la présence de I3 ou I5 ou ID2 ou ID5 ou de leur association comme indicateur des :

idées fortes qui esquissent le paysage de l'idée du vrai des élèves en sachant que derrière ces codes correspond la terminologie rappelée :

- ID2 : Le vrai en mathématiques sert pour les autres sciences.
- ID5 : Le débat en mathématiques tient une place importante.

Nous ne repérerons pas ce paysage qu'à partir des associations pré- déterminées mais nous mettrons aussi en parallèle leurs idées extérieures au modèle pour brosser un paysage plus nuancé et personnalisé de leur pensée sur l'idée du vrai.

Une première série renforce ce que nous avions souligné dans notre deuxième conclusion au sujet des points de vue paradoxaux illustrés par l'opposition des propos entre les élèves E1, E7 et E12 avec ceux des élèves E7, E8 et E11 et accentué par l'appartenance d'un élève « aux deux camps » (E7). Pour preuve nous citons les extraits auxquels il est fait allusion.

IDE13 : [...] En mathématiques, en particulier en géométrie, chaque mathématicien qui a inventé une nouvelle géométrie détient la clé de SA « vraie » géométrie. Chaque géométrie « vit » de cette vérité. Le jour où cette vérité est reniée, réfutée, la géométrie qui détenait cette vérité « meurt ». IDE121 : On

s'aperçoit qu'en mathématiques, on aurait affaire à de « simples hypothèses » et non pas à « des principes absolus ». Cela rejoint parfaitement ce que je pense des mathématiques c'est - à - dire que l'on peut à n'importe quel moment prouver le contraire de ce qu'on appelle un théorème « valide ». IDE72 : ...j'ai découvert que tous les théorèmes qu'on apprend tout au long de notre scolarité ne sont pas forcément vrais ou encore cependant avant le XIXième siècle les mathématiciens avaient une autre définition du nombre donc on peut penser que les théorèmes soit disant corrects aujourd'hui seront dans quelques siècles totalement faux. IDE71 : Toutefois, il existe une infime chance pour que ces hypothèses soit disant irréfutables puissent être balayées par un contre exemple. IE81 : le vrai est toujours démontré ; tout ce qui est vrai est tout ce qui n'est pas démontré de faux ou tout ce qui est démontré de vrai sans contre exemple. IDE111 : Au XIXième siècle, on a pensé assister à une révolution en découvrant une géométrie non euclidienne ; il ne s'agissait pas de remettre en question l'autre mais de partir sur de nouveaux axiomes.

Il ressort en effet, que d'un côté il y a des élèves qui conçoivent mal qu'en mathématiques, on ne réfute moins que l'on remanie pour justifier du vrai tandis que d'autres, conjointement, avancent des propos qui se réfèrent aux principes de rationalité (le contre-exemple) en montrant qu'ils les mobilisent de façon pertinente.

D'un côté des élèves parlent de « mort d'une géométrie », « d'invalidation de théorème » ou de « théorèmes faux » alors que conjointement, d'autres précisent que c'est « une hypothèse qui être balayée par un contre-exemple », que le vrai résiste au contre-exemple, et qu'il ne s'agit pas d'invalider ce qui peut exister mais de concevoir autre chose sur « de nouveaux axiomes ».

En conséquence, il s'agit de nuancer notre deuxième conclusion.

Deuxième conclusion nuancée

En Mai 2000 les productions des élèves de 3$^{\text{ième}}$ E, indépendamment du tiers considéré révèlent que :

- les élèves font intervenir la référence aux principes de rationalité dans leur vision du vrai de manière contrastée :
- des élèves conçoivent mal qu'en mathématiques, on ne réfute moins que l'on remanie pour justifier du vrai
- d'autres avancent pour justifier du vrai qu'il ne s'agit pas d'invalider ce qui peut exister mais de concevoir autre chose sur « de nouveaux axiomes ».

<u>Une deuxième série</u> tend à faire ressortir davantage que les conflits d'idées peuvent être source d'évolution (des mathématiques) et que l'idée du vrai peut être interpellée à tous moments d'autant plus comme le constate l'élève (E24) en écrivant que « *les hommes ont influencé les mathématiques ».* Mais l'élève (E21) considère « *à mon avis ce sont ces divergences qui permettent l'évolution » car « les mathématiciens prouvent toujours que ce qui est admis n'est pas forcément la vérité »*. Et finalement « *j'en déduis donc que les mathématiques sont une matière toujours en mouvement et qu'elles reposent sur des hypothèses et pas des vérités »* finit par conclure(E27).

Propos qui font écho à ceux de l'élève (E1) qui remet en question l'idée du vrai: *pourquoi plusieurs géométries seraient-elles vraies et pourquoi une seule arithmétique le serait ?*

La troisième série d'arguments montre toujours que les élèves s'emparent de la question du vrai pour la faire retentir relativement à des questions d'ordre ontologique et pour la faire rebondir sur des questions sociales à résonance émancipatoire pour l'homme. Les propos qui suivent sont assez significatifs de ce point de vue.

IDE12 : Le vrai en mathématiques, c'est comme le vrai dans la vie quotidienne : chaque personne a son idée de la vérité et elle vit de et avec cette vérité. Si on ne croit plus en cette vérité, on est dérouté, déséquilibré et on perd espoir. IDE21 : Je trouve qu'il est important d'avoir du recul par rapport à ce que l'on entend et ce que l'on voit chaque jour car la société d'aujourd'hui est saturée d'informations qu'elle ne sait pas toujours analyser comme il le faudrait . Enfin je pense qu'il est nécessaire et même indispensable de faire en sorte de plus en plus que les élèves dès la sixième soient sensibilisés par rapport au « vrai » (dans tous les domaines et pas seulement en math.) de n'importe quelle façon que ce soit. Je pense que ce travail [sur le vrai] m'a aidée à développer un esprit « critique » (ce que les profs nous apprennent dès la 6ième mais qui devrait être encore plus travaillé à mon avis) et à ne pas tout croire.

Un élève qui semble mettre à profit l'étude de la question du vrai pour émettre cette réponse : l'idée sous-jacente serait qu'avant de trancher sur l'admission des propos lus il faut être attentif aux fondements (même en dehors des mathématiques).

IDE17 : je me dis également que ce n'est que l'avis de l'auteur de ce texte, ce sont ses arguments...

La quatrième série, met à jour que la question du vrai induit une réflexion de type métaphysique dirions-nous dans la mesure où elle prend pour objet l'existence du vrai .

Nous distinguons la résonance platonicienne :

E4 : Le « vrai » mathématique n'est pas atteint et je ne pense pas que l'homme pourra l'atteindre un jour ; trop de limites subsistent dans le « savoir » humain pour que le « vrai » soit découvert. On fait des progrès même dans la façon de penser les mathématiques mais il reste beaucoup de choses à découvrir (à mon avis).

Puis il y aurait la tendance sceptique :

E5 : comme les math. ne sont fondés que sur des hypothèses, la vérité ne peut pas exister

et son pendant sceptico-soumis :

E7 : Toutefois, il existe une infime chance pour que ces hypothèses soit disant irréfutables puissent être balayées par un contre exemple

On soupçonnerait le versant relativiste intégrant le principe de régression à l'infini :

E28 : il n'y a pas de vrai en mathématiques ; il faut toujours prouver par des hypothèses qui sont elles-mêmes prouvées par des hypothèses.

Et l'on constate l'émergence d'une pensée constructiviste au travers de ces deux propos d'élèves :

E11 : En regard de l'idée de vérité en math. j'en déduis qu'il n'existe pas de vérité absolue en math. En math. on construit un raisonnement précis à partir d'axiomes ou d'hypothèses. En math. il y a plusieurs vérités en fonction du point de départ. E28 : Les mathématiques sont en quelque sorte un immense univers que l'on prend et rassemble morceau par morceau . Si aujourd'hui nous en sommes arrivés jusque là c'est grâce à nos anciens. Sans eux le mot mathématiques n'aurait aucun sens.

Troisième conclusion

En Mai 2000, les productions des élèves de 3^{ième} E, les trois tiers confondus révèlent que :

- L'idée du vrai perd son caractère éternel (E24 ; E21 ; E27 ; E1)
- Le vrai a une résonance ontologique (E12 ; E21)
- La question du vrai devient une aide pour construire sa personnalité (E21)
- La question du vrai induit une réflexion de type philosophique (E4)

Exemple du Q sort

1) Ce qui est déclaré comme étant vrai à une époque donnée l'est éternellement .	**11)** Le raisonnement, la logique, et la rigueur ne suffisent pas pour garantir l'idée de vérité.
2) Il suffit qu'une preuve soit validée pour aboutir à une conclusion vraie.	**12)** En mathématiques on ne peut pas toujours trancher si une affirmation est vraie ou fausse.
3) Le vrai et le faux ne peuvent exister en même temps en mathématiques.	**13)** Travailler sur l'idée de vérité et pas seulement sur l'entraînement à prouver donne des moyens de penser à l'élève.
4) Ce qui est vrai en mathématiques est la relation entre les propositions mais pas les propositions elles - mêmes.	**14)** A partir d'hypothèses fixées au départ ce qui est prouvé est considéré comme une vérité.
5) L'idée de vérité repose sur des hypothèses que l'on pose au départ en mathématiques.	**15)** En l'an 2000il existe des hypothèses qui ne sont toujours pas prouvées et sur lesquelles l'édifice mathématique repose.
6) Les mathématiques sont un corps de vérités inébranlables.	**16)** L'idée de vérité n'existe pas en soi mais est toujours fonction de...
7) L'idée de vérité n'est pas une idée typiquement mathématique.	**17)** Les mathématiques sont une science exacte : le qualificatif précédent convient parfaitement.
8) Par rapport à des hypothèses fixées au départ, le vrai et le faux ne peuvent exister en même temps en mathématiques.	**18)** Toutes les hypothèses sont prouvées en mathématiques.
9) Tant qu'une hypothèse n'est pas réfutée elle est vraie.	**19)** On peut toujours atteindre l'idée de vérité en mathématiques.
10) Travailler sur l'idée de vérité en mathématiques permet de porter un regard critique sur la matière.	**20)** Une preuve validée peut aboutir à une conclusion fausse.

d) Troisième phase : le Q sort (Juin 2000).

Nous avons tout d'abord veillé à ce que toutes les questions se rapportent au thème du vrai en mathématiques.

Ensuite nous nous sommes attachée à ce que toutes les questions concernent le maximum d'aspects de ce thème.

Enfin, nous avons exercé notre vigilance quant au fait que ces questions soient assez neutres pour qu'elles ne soient pas placées automatiquement à une extrémité ou l'autre de l'échelle.

Nous avons volontairement évacué l'idée du vrai en regard de la notion de théorème étant donné que cet objet d'enseignement n'avait pas été développé puisque cette représentation obstacle n'a pu être mise à jour qu'a postériori étant donné que le corpus des données n'avait pas encore été traité au moment de la passation du Qsort.

Première étape : analyse des données.

1) L'état des représentations suivant les classes entières.

Nous communiquons les résultats de ce Qsort en fonction des classes entières dans lesquelles nous l'avons proposé trois classes de $3^{ième}$: les $3^{ième}$ E (classe expérimentée) ; les $3^{ième}$ A (classe soumise aux principes didactico-pédagogiques en 4ième et classe témoin en $3^{ième}$) ; les $3^{ième}$ B (classe témoin en $4^{ième}$ et en $3^{ième}$).

Les 20 propositions sont classées suivant leur rang.

Les propositions écrites en italique gras correspondent à celles pour qui le groupe classe est plutôt pas d'accord voire pas d'accord du tout (celles relatives aux rangs 19 et 20). Elles sont qualifiées globalement de « rejetées ».

Celles occupant les rangs 1 et 2 traduisent une adhésion forte.

Celles écrites en caractère normal soulignent une adhésion qui décroît avec l'augmentation du rang.

Tableau 1

Classes Rangs	**$3^{ième}$ E Classe entière**	***$3^{ième}$ E Echantillon expérimentation***	$3^{ième}$ A Classe entière	*$3^{ième}$ A Echantillon résolution de tâches 4ième*	$3^{ième}$ B Classe entière	*$3^{ième}$ B Echantillon résolution de tâches 4ième*
1	5	15	15	14	5	5
2	15	5	7	5 - 7	14	14
3	13	10	5		7	18
4	9 - 10	13	13	3	18	7
5		9	10	10	3	8
6	7 - 16	16	3 - 14	13	16	3 - 15
7		12		14	8	
8	11	11 - 14 - 20	4	16	15	17
9	8 - 14		***12***	8 - 4	9	16
10			***8 - 11***		17	***13 - 9***
11	20	7		***19***	***6***	
12	12	3 - 8	***20***	***20 - 12***	***13 - 2 - 4***	***1 - 6***
13	4		***19***			
14	***3***	***4***	***2***	***18***		***20 - 2***
15	***2***	***19***	***16***	***11***	***19 - 10***	
16	***19***	***2***	***17 - 6 - 9***	***9***		***11***
17	***17***	***1 - 18***		***2***	***12 - 20***	***4 - 10***
18	***18***			***17***		
19	***6***	***17***	***1***	***6***	***11***	***19***
20	***1***	***6***	***18***	***1***	***1***	*12*

2) L'état des représentations entre les classes.

· Propositions qui ont fait l'objet d'une acceptation commune par les classes de :

Tableau 2

$3^{ième}$ E et $3^{ième}$ A	4 - 5 - 7 - 10 - 13 - 15
$3^{ième}$ E et $3^{ième}$ B	5 - 7 - 8 - 9 - 14 - 15 - 16
$3^{ième}$ A et $3^{ième}$ B	3 - 5 - 7 - 14 - 15

· Propositions qui ont fait l'objet d'un rejet commun par les classes de :

Tableau 3

$3^{ième}$ E et $3^{ième}$ A	1 - 2 - 6 -17 - 18 - 19
$3^{ième}$ E et $3^{ième}$ B	1 - 2 - 6 - 19
$3^{ième}$ A et $3^{ième}$ B	1 - 2 - 6 -11 -12 - 19 -20

· Propositions qui ont fait l'objet :

– d’une acceptation par les 3ième E et un rejet par les 3ième A :

8 - 9 -11 - 12 - 16 - 20

· d’une acceptation par les 3ième E et un rejet par les 3ième B :

4 - 10 - 11 - 12 - 13 - 20

· d’un rejet par les 3ième E et d’une acceptation par les 3ième A :

3

· d’un rejet par les 3ième E et d’une acceptation par les 3ième B :

3 - 17 - 18

· d’un rejet par les 3ième A et d’une acceptation par les 3ième B :

8 - 9 - 16 - 17 - 18

· d’une acceptation par les 3ième A et d’un rejet par les 3ième B : 4

3) Comparaison des rangs que détiennent certaines propositions .

Les propositions en gras témoignent de la présence d’un écart de rang important entre les propositions de la classe de 3ième E (et 3ième A) avec celles du groupe de 3ième B.

Propositions	$3^{ième}$ E	$3^{ième}$ A	$3^{ième}$ B
1	20	19	20
2	15	14	12
3	14	16	5
4	13	8	12
5	1	3	1
6	19	16	11
7	6	2	3
8	9	10	7
9	4	16	9
10	4	5	15
11	8	10	19
12	12	9	17
13	3	4	12
14	9	6	2
15	2	1	8
16	6	15	6
17	17	16	10
18	18	20	4
19	16	13	15
20	11	12	17

Deuxième étape : examen des données.

Descriptif du contenu.

Les représentations de l'échantillon et de la classe ne font pas apparaître de différences sensibles au niveau de l'émergence des acceptations et rejets des propositions surtout dans les classes de $3^{ième}$ E et $3^{ième}$ A. Les différences s'expliquent plutôt par les variations (modestes) des rangs qu'occupent ces acceptations ou ces rejets de propositions.

En effet, l'homogénéité entre le groupe classe et l'échantillon est la plus frappante dans la classe de $3^{ième}$ E. Suivent après les $3^{ième}$ A. En revanche, en $3^{ième}$ B, sur les quatre propositions les plus rejetées il n'y en a qu'une de commune entre le groupe classe et l'échantillon.

Si l'on considère les trois premières propositions les mieux acceptées, on note l'unanimité des trois classes par rapport à la proposition 5 tandis que si l'on se penche sur les deux propositions les plus rejetées le consensus se fait autour de la proposition 1.

Le nombre de propositions communes acceptées entre les $3^{ième}$ E et les $3^{ième}$ A est le même que celui qui existe entre les $3^{ième}$ E et les $3^{ième}$B. Toutes les propositions qui sont rejetées en $3^{ième}$ E le sont en $3^{ième}$ A (à l'exception de la proposition 3) mais cette remarque ne s'applique pas ni entre les $3^{ième}$ E et les $3^{ième}$ B ni entre les $3^{ième}$ A et les $3^{ième}$B.

On remarque également que les 3ième E rejettent moins de propositions que les deux autres classes.

Il semblerait d'une part, qu'il y ait des similitudes et des oppositions à la fois entre les classes de 3ième E et 3ième A et que d'autre part, la classe de 3ième B se démarque des deux autres sur le plan des associations entre les acceptations et les rejets des propositions ainsi qu'au niveau des rangs que certaines propositions détiennent.

Troisième étape : productions des résultats et conclusions.

Modèle d'analyse a priori.

Pour traiter les données nous définissons les grandes rubriques qui sont des indicateurs de l'état des représentations des élèves sur l'idée du vrai qui transparaît au travers de ce Qsort.

Ces rubriques sont construites en fonction du cadre conceptuel du vrai et de la mise en relation entre les acceptations et les rejets des propositions par les élèves car la simple acceptation des propositions 5 et 15 ou 5 et 14 ou 5 et 16 est considérée comme un indicateur de surface insuffisant pour trancher si le déplacement est réel, ou pour apprécier la « qualité » de ce déplacement.

La même remarque s'applique au niveau du rejet des propositions 1 et 6 ou 1 et 11 ou 8 et 9.

INDICATEURS D'UN DÉPLACEMENT DE L'IDÉE DU VRAI PAR DÉTERMINATION DES RUBRIQUES.

- Rubrique 1 (RP1) : rejet de la proposition 3 et acceptation des propositions 8 et 5.

l'idée du vrai est étroitement liée à l'idée de prémisses assumées au départ et vision des principes de rationalité (principe de non contradiction ou du tiers exclu) dépendante de la notion de contexte.

- Rubrique 2 (RP2) : rejet de la proposition 2 et acceptation des propositions 11 et 14 et 20.

l'idée du vrai découlant de la preuve en mathématiques est admise mais nuancée par la vision que la preuve est elle-même soumise à la notion de prémisses assumées au départ.

- Rubrique 3 (RP 3) : acceptation de la proposition 12 et rejet de la proposition 19

vers l'idée d'indécidabilité.

- Rubrique 4 : (RP 4) : rejet des propositions 17 et / ou 6

vers une autre vision des mathématiques.

· Rubrique 5 : (RP 5) : rejet de la propositions 18 et acceptation de la proposition 15

prise de conscience de la présence de notion de prémisse assumée au départ en mathématiques (au sens de admise sans preuve).

· Rubrique 6 : (RP 6) : rejet de la proposition 1 et acceptation de la proposition 16

reconnaissance de l'importance du rôle des hypothèses dans l'idée du vrai sur l'évolution du vrai.

· Rubrique 7 : (RP 7) : acceptation des propositions 4 , 9, 11, 12, 14, 15, 16

avancée de la « pensée épistémologique » de l'élève (selon le nombre d'acceptations : s'il est inférieur à 4 il sera jugé faible).

· Rubrique 8 : (RP 8) : acceptation des propositions 4 et 8 et 9 ou rejet de 4 et acceptation de 8 et 9

maîtrise théorique des principes de rationalité (au sens de être capable de le dire).

INDICATEURS D'UNE VISION DE L'IDÉE DU VRAI D'OÙ ÉMERGENT DES OBSTACLES RENCONTRÉS LORS DE LA PREMIÈRE ÉTUDE DES PRODUCTIONS DE FIN DE 4$^{\text{IÈME}}$.

· Rubrique 1 : (RN) : acceptation des propositions 3 et 8 et 5

acceptation de 3 et de 5 et rejet de 8

l'idée du vrai est liée à l'idée de prémisses assumées au départ sans reconnaissance de leur rôle et vision des principes de rationalité (principe de non contradiction ou du tiers exclu) indépendante de la notion de contexte [vision similaire lors des études de cas de fin de 4$^{\text{ième}}$].

· Rubrique 1' : (RN 1') : rejet des propositions 3 et 8 et 5.

l'idée du vrai non liée à l'idée de prémisses assumées au départ et vision des principes de rationalité (principe de non contradiction ou du tiers exclu) indépendante de la notion de contexte .

· Rubrique 2 : (RN 2) : rejet de la proposition 13 et / ou 10 sans autre acceptation des propositions 11 ou 14 ou 20.

vision technisciste des mathématiques qui ne souffrent d'aucun regard critique et /ou la preuve est investie d'un pouvoir incontestable sans prise de conscience de ce sur quoi elle repose.

· Rubrique 3 : (RN 3) : rejet de 2 sans acceptation de 11 et 14 et 20.

méconnaissance du rôle des hypothèses dans l'élaboration d'une preuve et idée du vrai directement en lien avec la notion de preuve sans prise de conscience de ce sur quoi la preuve repose.

- Rubrique 4 : (RN 4) : rejet de la proposition 9.

mauvaise maîtrise du contre exemple (principe de rationalité).

- Rubrique 5 : (RN 5) : rejet des propositions 4 ou 9 ou 11 ou 12 ou 14 ou 15 ou 16 **et** acceptation de la proposition 18.

développement réduit de la pensée épistémologique de l'élève.

- Rubrique 6 (RN 6) : rejet des propositions 1 et 16

méconnaissance du rôle des hypothèses en mathématiques

- Rubrique 7 : (RN 7) : acceptation de la proposition 18 .

méconnaissance de la présence de prémisses assumées au départ (au sens de méconnaissance de l'idée : tout ne peut être prouvé en mathématiques donc le vrai peut reposer sur de l'admit a priori).

- Rubrique 8 : (RN8) : rejet de 4 **et** rejet de 8 ou 9

méconnaissance des principes de rationalité (sur le plan de leur sens).

Pour faciliter la production de résultats nous transformons le tableau 1 en nous servant du codage annoncé dans la phase précédente pour mieux rendre compte du déplacement éventuel de l'idée du vrai et de la manière dont il s'effectuerait pour chacune des classes concernées globalement.

Tableau 1'

$3^{ième}$ E	$3^{ième}$ A	$3^{ième}$ B
RP1	RP4	RP6
RP2	RP5 (avec et)	RP8
RP3	RP7 (faible)	RN1
RP4 (avec et)	RN1	RN2
RP5 (avec et)	RN4	RN3
RP6	RN6	RN5
RP7 (au complet)	RN8	RN7
RP8		

La première interprétation met en avant que la photographie des représentations (à travers l'acceptation ou le rejet de propositions) dans les trois classes n'est pas la même. La première conclusion qui en découle relate que le groupe des $3^{ième}$ E se distingue nettement des deux autres classes. Le déplacement de l'idée du vrai transparaît à la lecture du tableau. Cependant, le fait de ne pas rencontrer des indicateurs qui pointent encore la présence d'obstacles qui touchent l'idée du vrai en regard du statut du théorème n'est pas anormale puisque le Qsort n'y faisait aucune allusion. Nous ne pouvons donc rien affirmer à ce sujet .

En revanche, en 3 ième E nous constatons l'absence des autres obstacles révélés lors des études de cas de 4 ième (concernant l'idée du vrai et le rôle des <u>prémisses assumées</u> au départ ; vision des principes de rationalité)

<u>La deuxième interprétation</u> consiste à repérer, en revanche, la présence plus ou moins marquée des indicateurs d'une vision du vrai d'où émergent des obstacles rencontrés lors de la première étude (en classe de 4ième) respectivement en 3ième A (classe témoin depuis la 3ième avec le paradigme socio-constructiviste de l'apprentissage en 4ième et 3ième sans mise en œuvre des principes d'action en 3ième), et en 3ième B (classe témoin depuis la 4ième avec le paradigme comportementaliste en matière d'apprentissage en 4ième et en 3ième sans mise en œuvre des principes d'action ni en 4ième ni en 3ième). **Cependant, le fait que les écarts relativement à des propositions données soient surtout perceptibles entre les 3 ième E et 3 ième A avec les 3 ième B confirment qu'il y a plus de proximité du point de vue des représentations entre les 3 ième E et les 3 ième A qu'entre les 3 ième E et les 3 ième B.**

<u>La troisième interprétation</u> met en évidence qu'au sein des classes de 3ième A et 3ième B si deux indicateurs (ceux qui font émerger la persistance de la présence d'obstacles rencontrés lors de la première étude de cas en 4ième, présence de RN1 et RN3) sont communs, les autres ne sont pas tous identiques entre ces deux groupes. **Il ressort qu'en terme d'obstacle commun entre les 3 ième A et les 3 ième B l'on puisse toujours lister celui qui traduit que le rôle des hypothèses assumées au départ n'est pas en lien avec la notion de contexte et des principes de rationalité.**

Les obstacles des 3ième A interpellent la notion de principes de rationalité (contre exemple et principe du tiers exclu du point de vue de leur sens : présence de RN4). Alors que ceux des 3ième B sont plus en relation avec le rôle des prémisses assumées, associé à l'idée de la prégnance du pouvoir de la preuve sans prise de conscience de ce sur quoi elle repose (présence des indicateurs RN1 et RN3 et RN7 soit 3 sur 4).

En effet, l'acceptation conjointement des propositions 3 et 8 (par les 3ième B) ou bien l'acceptation de la proposition 3 associée au rejet de la 8 (RN1 par les 3ième A) révèlent que les élèves prennent bien en considération l'importance des prémisses assumées au départ (ce qui est renforcé par la non présence de RN'1) mais marquent leur méconnaissance vis à vis du rôle qu'elles jouent comme déterminant un contexte (par rapport auquel les principes de rationalité prendront sens).

Notons également le rejet simultané des propositions 13 et 10 (RN2 en 3 ième B) qui met en évidence la persistance d'une croyance en une pensée « magique » qui envelopperait les mathématiques, vécue comme une science positive, qui ne souffrirait d'aucune remise en question. C'est comme si c'était la version utilitariste qui primait dans l'esprit de l'élève. Les mathématiques comme outil de résolution non comme tremplin pour outiller la pensée humaine. Rejeter en outre les propositions 11 et 20 accentue l'association entre **mathématiques comme moyen infaillible d'accéder au vrai en occultant la réflexion au sujet du ce sur quoi repose ce vrai.**

De même que rejeter la proposition 2 sans accepter conjointement les propositions 11 ou 14 ou 20 (RN3) pointe **la persistance de l'attachement par les élèves à la notion**

de preuve et leur absence de considération pour le rôle des prémisses assumées au départ (vis à vis de cette notion de preuve).

Enfin, les 3 ième A ont manifesté davantage une pensée épistémologique que les 3 ième B ce qui implique un retentissement différent quant à l'interprétation des obstacles que ces deux classes manifestent encore.

La quatrième interprétation vise à souligner la différence de proportion entre les indicateurs de type RP et RN dans les classes de 3ième A et 3ième E. L'équilibre est davantage sensible en 3ièmeA qu'en 3ième B.

Conclusions

En Juin 2000 les productions des élèves des trois classes de 3ième révèlent que :

Ce n'est parce qu'il y a consensus sur la plus acceptée et sur la plus rejetée des propositions que pour autant les représentations de l'idée du vrai sont similaires dans toutes les classes : des différences significatives existent entre les 3ième E, 3ième A, et 3ièmeB.

Malgré cela, on rencontre plus de proximité dans la vision du vrai entre les 3ième A et 3ième E qu'il n'en existe entre les 3ième B et 3ième E.

En 3ièmeB où le modèle d'apprentissage repose sur le modèle comportementaliste sans prise en compte des principes d'action (au moins depuis la 4ième), l'idée du vrai évolue peu et renvoie à la méconnaissance du rôle des prémisses assumées. La prégnance de l'association vrai preuve est aussi mise en évidence. En outre l'image des mathématiques véhiculée favorise l'association entre mathématiques et accès au vrai infaillible.

En 3ième A quand la question du vrai n'est pas problèmatisée depuis la quatrième, les limites d'une perspective d'apprentissage socio-constructiviste sont pointées en regard des effets qu'elle produit sur le déplacement de l'idée du vrai, dès lors qu'elle n'intègre pas, en 3ième, les principes d'action élaborés.

En 3ième E en revanche, l'observation des représentations des élèves indiquent que des effets se sont produits même s'ils ne sont pas forcément tous positifs.

Chapitre 3. De la validation de l'hypothèse de recherche et des apports de la recherche.

L'analyse des représentations à laquelle nous nous sommes livrée montre notre souci d'éprouver ce que nous énonçons à partir de faits construits en regard des modèles théoriques auxquels nous nous référons. Comme le souligne M. Develay, réduire une recherche en éducation à la démarche de preuve se heurte à l'action, car les savoirs produits nourrissent des pratiques ce qui renvoie à l'utilité sociale de ces savoirs. Mais il fait remarquer que si ces savoirs produits sont à interroger du point de vue de la démarche de preuve qui a permis de les produire, il faut aussi interroger les pratiques par l'efficacité qu'elles sont censées permettre. C'est donc dans cette esprit là que nous abordons la question de la validation de nos travaux.

1. La thèse et ses prémisses assumées au départ.

Etablir en somme un parallélisme entre la thèse que nous défendons dans le champ de l 'enseignement (développer une pensée sur l'idée du vrai en mathématiques), avec la mise à jour des fondements de la recherche et de la façon dont elle s'élabore (en écho à enseigner ce sur quoi se fonde une pensée sur l'idée du vrai et comment se construit le vrai en mathématiques).

Dans cette perspective, nous insistons sur l'existence de quatre éléments essentiels qui servent de base à cette recherche : la problématique, la clarification de l'idée du vrai ; le cadre théorique et conceptuel ; la méthodologie.

Ces éléments essentiels correspondent aux hypothèses assumées au départ, il nous faut revenir sur leur validation initiale au point où nous en sommes.

Nous ne nous étendrons pas outre mesure sur le choix de la problématique tant il relève de motivations personnelles en lien avec des questions d'éthique professionnel, de plaisir intellectuel et de volonté politique. Elle tire sa légitimité du fait même de son existence. Du point de vue de sa pertinence, elle s'inscrit dans les travaux nombreux sur la preuve même si elle n'a pas la même résonance et qu'elle viserait à élargir le débat sur l 'enseignement de la preuve. La problématique pose la question de l'amont du travail classique sur la preuve. Elle interpelle la question du vrai sous l'angle épistémologique.

En cela, une clarification de l'idée du vrai devenait une exigence. Elle s'est construite autour de deux points fondamentaux : montrer d'une part, l'existence d'une rupture épistémologique dans la manière de considérer le vrai par le biais de son historicité et d'autre part, faire comprendre le poids de l'héritage grec dans l'évolution même de l'idée du vrai. Nous nous sommes donc attachée à dresser successivement les caractéristiques, les visées, et l'essence du vrai ainsi qu'à laisser entrevoir ce sur quoi repose le vrai, les objets sur lesquels cette idée s'applique et les modes d'accès au vrai en mathématiques. C'est autour de ce paysage qu'a pu prendre corps l'enseignement de l'idée du vrai que nous défendons.

Au sujet du choix du cadre théorique et conceptuel il se justifie de part notre posture et le type de recherche que nous voulions mener ainsi que de ses enjeux. L'enseignement des mathématiques a du mal à se concevoir sans le double regard de la didactique et de la pédagogie. La pensée sur cet enseignement ne peut échapper non plus à une vision épistémologique à cause de la nature de notre objet d'étude (la question du vrai). Dans une moindre mesure, si cette pensée a parfois débordé sur le champ philosophique (au sens plus général) c'est qu'il s'agissait pour nous de penser cet enseignement en dépassant les visées pragmatiques intra-mathématiques pour soulever la question éthique.

En ce qui concerne les partis pris méthodologiques ils trouvent leur validation de par le registre qualitatif dans lequel nous entendions nous inscrire : ce qui nous importe n'est pas de vérifier statistiquement si l'on peut parler d'évolution des représentations de l'idée du vrai chez les élèves mis en rapport avec un certain type d'enseignement. Notre souci se situe davantage vers les préoccupations qui s'orientent du côté du repérage des conditions qui permettraient un déplacement de l'idée du vrai. Pour observer comment ce dernier se traduirait en retour, en comprendre les incidences didactico-pédagogiques rendant attentif à cet enseignement d'une pensée sur l'idée du vrai. En ce sens notre visée fut herméneutique, même si elle ne s'y réduit pas totalement.

La densité des discours nous poussa à faire des choix. Nous avons donc renoncé au confort d'une méthodologie rationnelle fondée sur des chiffres. Et c'est justement la rigueur scientifique qui nous a obligée au deuil d'une méthodologie confortable.

Les trois modèles d'analyse que nous avons sélectionnés se justifient par la différenciation quant au format, à la nature et la forme des données : les données étaient soit de type provoqué soit de type invoqué. Elles résultaient soit de la résolution de tâches soit de réponses à des questions ouvertes soit de réponses à des questions fermées.

C'est pourquoi nous avons retenu l'analyse de tâche selon Vergnaud, le découpage en unités d'analyse avec constitution de rubriques par écho analogique selon Van Der Maren et l'exploitation globale avec un modèle a priori et des rubriques par écho analogique selon Van Der Maren .

Nous avons rappelé les présupposés sur lesquels repose la recherche et nous nous sommes efforcée de décrire, à grands traits, comment nous avons validé ces soubassements théoriques sans lesquels nous n'aurions pu appuyer notre thèse.

En fonction d'eux, il nous faut montrer ce qu'ils nous ont permis de produire.

2. Conclusions et apports de la recherche.

De la réalité du déplacement de l'idée du vrai chez les élèves.

Pour émettre nos conclusions au sujet de la réalité du déplacement de l'idée du vrai chez les élèves de la classe de 3^{ième} E nous reprenons les critères que nous avions posés a priori pour l'évaluer .

A propos de la présence ou non de l'évocation des prémisses dans leur vision de l'idée du vrai et de la manière dont ils conçoivent le rôle de ces prémisses en 3^{ième} E.

Nous pouvons conclure à la réalité effective du déplacement de l'idée du vrai sous cet angle.

Les élèves sont passés de l'occultation de cette notion d'hypothèse vers la reconnaissance de la présence indispensable de cette notion de prémisse dans l'idée du vrai.

Conjointement, le statut de l'hypothèse qui concerne le fait qu'elle ne doit pas seulement exister mais être vérifiée ou assumée est admis. Mais chez certains élèves le fait qu'il existe des hypothèses assumées constituent un argument pour réfuter l'idée du vrai en mathématiques et avancer qu'elle ne peut tenir à cause de l'incertitude qui règne précisément sur la validation préalable de ladite hypothèse.

Quant au rôle que l'hypothèse détient en tant que socle sur lequel l'idée du vrai repose, s'il a eu du mal à s'imposer, il est devenu tout au long des quatre périodes un passage obligé qui a exercé une répercussion sur la notion de preuve. La sacralisation de la preuve (via les idées de logique et de rigueur) fut en effet régulée par le statut et le rôle de l'hypothèse.

En ce qui concerne leur capacité à mobiliser la référence aux principes de rationalité dans leur vision du vrai et leur « perception » par rapport au sens des (ou du) principe(s) de rationalité que les élèves mobilisent ($3^{ième}$ E).

Certes, la mobilisation du contre exemple fut relativement spontanée mais sa contribution dans l'accès au vrai a été parfois mal cernée du point de vue de la relation avec la notion de prémisse assumée : c'est ce que mettait en évidence, les premières représentations.

Du fait de la reconnaissance progressive du statut et du rôle de l'hypothèse, la maîtrise du contre exemple semble avoir été améliorée puisque les élèves conçoivent mieux la notion de contexte par rapport auquel peut s'exercer le contre exemple en tant que principe de rationalité.

La répercussion sur l'idée du vrai est visible quand les élèves acceptent que le vrai est temporaire et soumis à l'épreuve du contre-exemple ou encore que le vrai se rapporte aux liens entre les propositions et ne portent pas sur les propositions elles-mêmes. De sorte que l'on peut supposer les conditions réunies permettant ultérieurement de favoriser une meilleure adhésion au schéma : « si le vrai (d'une conclusion) est établi à partir de prémisses assumées au départ, il ne peut être contesté et que seul un changement au niveau des prémisses pourra aboutir à du faux ou à une autre conclusion ».

Encore que sur ce point, il faille faire intervenir un autre élément, celui du statut du théorème. En effet, des élèves peuvent avancer qu'un théorème puisse être faux sous le prétexte de la temporalité de la validité de l'hypothèse. Il nous apparaît alors, que ni la distinction (préliminaire) entre hypothèse (au sens de conjecture) et théorème, ni la possibilité de la transformation de l'hypothèse en théorème ne soit appréhendée, ni la différenciation entre théorème et postulat (et pour cause !). Ce qui, somme toute, rappellerait la difficulté que les élèves ont manifestée à concevoir hypothèse vérifiée et hypothèse assumée.

Il est bien entendu qu'il ne s'agit pas d'introduire de manière formelle toutes ces distinctions mais de prendre conscience que l'enseignement de l'idée du vrai ne va pas de soi et de mettre à jour toute la dose d'implicite et de sous entendus qui sont autant d'obstacles que les élèves doivent surmonter pour percevoir l'idée du vrai.

Nous ne pouvons pas en tout état de cause, apprécier la portée du travail entrepris avec les élèves sur leur évolution quant à leur compréhension du tiers exclu puisque nous n'avons pas eu le temps matériel de prévoir des observations particulières à ce sujet (critère de faisabilité). C'est le contre-exemple qui est apparu comme acteur principal.

En cela la recherche action comprend au moins une carence.

Concernant la mise en évidence des idées fortes repérées pour esquisser leur paysage de l'idée du vrai.

La première conclusion traduit la persistance de représentations conjointement conformes et non conformes au champ mathématique jusqu'en début de 3$^{\text{ième}}$ et confirme que cette question du vrai est loin d'aller de soi chez les élèves.

Nous pouvons constater que c'est seulement au niveau du mois de Mars 2000 que s'amorce un déplacement qui traduit de la distance vis à vis des obstacles qui avaient émergé dès juin 1999 concernant l'idée du vrai.

La deuxième conclusion consiste à remarquer qu'il y a un effet que nous n'avions pas prévu.

Celui qui révèle qu'en fin d'année certains élèves ont marqué un franc scepticisme à cautionner l'idée du vrai dans le champ des mathématique. Voire même, à la rejeter, en avançant des arguments qui se réfèrent soit au statut des prémisses assumées, soit à la méfiance vis à vis du genre humain à pouvoir accéder au vrai (à cause des limites de son intelligibilité), soit encore en invoquant le risque potentiel du contre-exemple qui peut tout invalider. Autrement dit, ils se sont emparés de l'idée du vrai en mathématiques pour penser l'existence du vrai et prolonger la réflexion sur l'idée de l'idée du vrai en elle-même et poser la question : l'idée de l'idée du vrai est-elle tenable ? (ce qui va au-delà du champ mathématique).

La troisième conclusion établit aussi le fait que lorsque les élèves s'emparent de la question du vrai, ils le font pour appréhender des questions à résonance sociale et sont capables d'interpeller à nouveau le champ philosophique (à leur manière). Leur insistance à défendre un travail sur l'idée du vrai comme permettant de porter un regard critique sur le domaine des mathématiques. Ou encore, leur adhésion quant à une réflexion au-delà de la preuve comme support au développement de leur pensée, sont des indices qui manifestent leur intérêt pour cet enseignement de l'idée du vrai. Ils ont perçu l'enjeu qui ne réside effectivement pas seulement à accroître leur performance en matière de résolution de preuve (même si vraisemblablement elle devrait y contribuer), mais à nourrir leur pensée de personne apprenante.

La question du déplacement de la vision de l'idée du vrai en regard de la variable « niveau des élèves » en 3$^{\text{ième}}$ E.

Lors de l'analyse de l'échantillon en classe de troisième nous avons pu noter qu'il n'y avait pas de différence sensible par rapport à ce que nous observions respectivement parmi les trois différents tiers de la classe (hormis une exception).

La variation se situe simplement par rapport à l'intensité du déplacement. La vision des élèves appartenant au premier tiers de la classe a semblé se déplacer davantage que celle des élèves appartenant aux deux autres tiers (au sujet la présence des prémisses dans la vision de l'idée du vrai chez lesélèves et la manière dont ils conçoivent le rôle de ces prémisses).

Pour le reste, qu'il s'agisse de mobiliser des principes de rationalité (de manière plus ou moins pertinente) ou d'afficher un questionnement de type, épistémologique ou ontologique ou métaphysique il semble que la variable niveau n'intervienne pas.

La question du déplacement de la vision de l'idée du vrai en regard de la variable « dispositif didactico-pédagogique » en 3ième E, 3ième A, 3ième B.

La variable dispositif didactico-pédagogique (prise en compte des principes d'action dans la pratique) étant l'union de deux variables didactiques au moins : le statut du vrai dans l'enseignement (passer du savoir outil au savoir objet) et la question du travail en amont sur rôle et statut des prémisses ; notion de contexte.

L'évolution des représentations en classe de 3ième E ne ressemble pas à celle des deux autres classes : la vision du rôle et du statut des prémisses ainsi que la question des principes de rationalité mettent en évidence qu'un certain nombre d'obstacles ont été surmontés en 3ièmeE tandis que l'état des représentations des 3ième A et 3ième B marque toujours la prégnance de certains obstacles déjà signalés lors des études de cas de 4ième.

De plus, nous remarquons qu'il y a une proximité entre le déplacement de la vision du vrai chez les élèves de 3ième A et de 3ième E alors que nous n'observons pas ce phénomène chez les élèves de 3ième B et 3ième E.

Contrairement à la variable « niveau » la variable « dispositif didactico-pédagogique » a davantage d'incidence sur la réalité du déplacement de la vision du vrai des élèves [321] .

La question de la scientificité des résultats en sciences de l'éducation.

Notre ambition est de montrer que notre hypothèse de recherche (assertion à éprouver) résiste à la confrontation au réel. Mais notre résultat n'est vrai qu'à titre précaire. L'épistémologie poppérienne nous a appris qu'être scientifique pour un résultat tient moins de sa capacité à être vérifié qu'à celle de s'exposer au risque de se voir réfuter. De sorte, qu'en toute rigueur, la vérification de ce que nous avançons est impossible. Nous n'avons pu constater que l'hypothèse que nous avançons n'est pas actuellement démentie par les faits (globalement). Autrement dit, et étant donné le type d'interrogation qui est la nôtre dans le champ didactico-pédagogique, pas plus la recherche action qu'une autre expérimentation ne peut apporter des réponses scientifiquement prouvées au sens de la logique formelle tant personne ne peut prétendre pouvoir prouver la pertinence d'une pratique et tant il s'agit de « *relativiser la valeur universelle de la scientificité* » [322] .

Comme nous y invite M Develay [323] , dans les sciences herméneutiques, il faut accepter que la recherche ne soit pas synonyme de démarche de preuve au sens des

[321] Nous renvoyons le lecteur au tableau récapitulatif p.318.

[322] MORIN E. - *Science avec conscience* - Edition Points - 1982 .p. 154.

[323] Nous faisons référence aux propos tenus au sujet de « *N'y a t-il pas mieux à faire que de vouloir prouver* in Vers une nouvelle alliance opus cit.

sciences formelles car on doit interroger des pratiques par l'efficacité qu'elles permettent. Si nous avons opté pour une recherche en Sciences de l'éducation, c'est aussi pour revendiquer que ce qui fonde la scientificité d'une recherche, ce n'est pas uniquement sa validité tant elle peut être discutée en regard des modèles théoriques qu'elle sous entend, mais aussi, comme le propose Habermas à savoir, que la scientificité d'une recherche repose sur sa « valeur informative pour le contrôle et l'élargissement de l'action efficace ». Perspective qui fait que la validité d'une recherche en éducation ne relève pas de la force de sa démonstration mais dans la conviction de son intérêt pour une action efficace.

Pour autant, nous ne soutenons pas une posture de recherche dont la perspective serait humaniste seulement car celle-là fait du chercheur que un homme de parti pris. Notre posture a consisté à nous rendre attentive à la recherche de la vérité en adoptant le point de vue de Popper quand il affirme que la base empirique de la science ne comporte rien d'absolu.

Elle a consisté à nous rendre vigilante par rapport à l'efficacité de l'action que notre recherche peut permettre en nous centrant aussi sur des valeurs d'émancipation. Etre attentif à l'utilité émancipatrice, c'est questionner l'adéquation entre les dispositifs installés (générateurs de processus) en rapport de l'apport de lucidité vers lequel la recherche peut tendre.

En résumé nous adoptons le point de vue de M. Develay quand il rappelle que :

- de nombreux épistémologues ont dit l'impossibilité de statuer sur le scientifique et le non scientifique à travers la démarche de preuve
- le refus de considérer la démarche de preuve comme l'unique critère des recherches en éducation
- l'introduction de la question de l'intérêt social de la recherche comme critère de validité d'une recherche.

Dans ces conditions, nous pensons que notre hypothèse de recherche est validée.

Du point de vue didactique.

Sur l'enseignement de l'idée du vrai : retour à la problématique.

Nous avons montré que l'enseignement de la preuve tel qu'il est conçu dans les programmes officiels n'était pas suffisant pour favoriser une représentation de l'idée du vrai chez les élèves, davantage pertinente vis à vis de sa représentation dans le savoir savant et de son historicité (cas des 3ième A et 3ième B).

L'apport majeur consiste à mettre en avant que le déplacement de l'idée du vrai s'articule autour de deux variables didactiques au moins : le statut du vrai dans l'enseignement (passer du savoir outil au savoir objet) et la question du travail en amont sur le rôle et statut des prémisses et de la notion de contexte.

Tout en posant un présupposé quant au choix de la théorie d'apprentissage socio-constructiviste de référence qui pointe le recours aux situations fondamentales, la prise en compte de la notion d'obstacle (à travers l'étude des représentations) et la nécessité de veiller à la dévolution du vrai aux élèves.

La recherche met en avant que le déplacement de l'idée du vrai a découlé d'une action didactique fondée sur le développement des axes suivants :

- discuter et interpeller le mode d'accès au vrai : sur quoi repose tout raisonnement ? (rôle des prémisses assumées et notion de contexte).
- élaborer les caractéristiques de l'idée du vrai (prise en compte de l'historicité à propos de l'idée du vrai).
- penser le rôle de l'homme par rapport à l'idée du vrai (mise en évidence de la notion de consensus social).
- réfléchir sur les intérêts liés à l'idée du vrai (question du rapport aux mathématiques et question d'éthique).

A propos de l'incidence sur les performances en matière de preuve.

Les résultats expérimentaux montrent qu'il y a eu un effet rétro actif sur la manière de concevoir une preuve à partir du moment où l'on projette de travailler l'idée du vrai en tenant compte des deux variables précédentes.

On peut en déduire raisonnablement que l'éclaircissement de la notion de contexte en regard du rôle et du statut des prémisses (qui tient une place forte dans l'enseignement de l'idée du vrai tel que la thèse le conçoit) jouera un rôle déterminant dans l'accès à ces performances, bien que rien ne soit effectivement éprouvé à ce sujet.

De même que nous pensons avoir contribué à éclairer, indirectement, la question du « si...alors » en regard de la confusion classique « hypothèse et conclusion » que déplorent les enseignants (par le biais du travail sur les prémisses assumées ou vérifiées).

Sur le rapport aux mathématiques.

La question du vrai paraît une entrée pertinente pour désacraliser le pouvoir des mathématiques et positionner une réflexion épistémologique qui tend à humaniser davantage la matière. Les réflexions des élèves, à partir de la question des prémisses assumées, mettent en avant que leur vision des mathématiques s'oriente plus du côté d'une science en évolution par rapport à laquelle la notion de doute s'inscrit davantage, ou sinon, devient au moins envisageable.

Du point de vue pédagogique.

Dans le registre des attitudes et postures, les écrits des élèves montrent que ces derniers n'ont pas été rebutés par le type de travail qui leur a été réclamé puisqu'ils s'y sont régulièrement prêtés et de manière durable bien que les travaux aient été à caractère facultatif.

La qualité des réflexions, toujours analysée dans le cadre de leurs écrits, prouve également l'intérêt qu'ils ont manifesté à l'égard de questions qui ont été jugées parfois bien abstraites par leurs enseignants de français par exemple.

Le fait que les élèves aient toujours respecté les échéances temporelles qui leur étaient imposées marquent leur investissement par rapport à des questions qui ne leur rapportaient cependant pas directement de profit du point de vue « points à gagner » dans les moyennes. Cela prouve (si besoin était) que des élèves de 4ième et de 3ième sont capables de s'engager de manière « gratuite » et sont capables de se détacher de la logique du faire sous condition d'obtention de points.

Sous cette hypothèse d'adhésion globale (vérifiée par les phases écrites) il est intéressant de noter que le déplacement de l'idée du vrai ne semble pas être influencée de manière significative par la variable niveau et que l'enseignement de l'idée du vrai n'est pas réservé à une élite.

Du point de vue éthique.

L'enseignement du vrai selon la thèse invite l'élève à percevoir des enjeux, qui, dans l'enceinte scolaire de l'enseignement traditionnel des mathématiques ne font pas partie du paysage coutumier.

En effet, les élèves ont marqué leur adhésion par rapport à la possibilité de porter un regard critique sur les mathématiques à travers l'enseignement de l'idée du vrai et ont souligné leur intérêt quant aux moyens qu'un tel enseignement peut leur procurer sur le plan personnel de leur accès à penser. Autrement dit, lien entre deux enjeux : épistémologique et humain.

Les écrits des élèves ont également mis en évidence qu'ils étaient capables de s'emparer de la question du vrai pour formuler des réflexions de type ontologique voire même métaphysique qui, par là-même, tendaient à bousculer l'image des mathématiques.

Nous pensons qu'il s'agit là d'une avancée du point de vue du rôle émancipateur de l'élève. Non plus sous couvert d'une image dogmatique des mathématiques, mais bien en véhiculant une image congruente avec celle de la science, c'est-à-dire en restituant la place des doutes et des certitudes. En somme, l'enjeu culturel fut interpellé.

Les productions des élèves montrent aussi que les mathématiques (par l'intermédiaire de l'enseignement de l'idée du vrai) deviennent un outil pour « penser sur » et non plus pour « agir dans ». C'est ainsi que nous verrions pointer un enjeu de type sociétal.

3. Les limites de la recherche.

La question des biais.

Du point de vue de la validité des résultats.

Les méthodologies des sciences dures tentent d'éliminer le plus possible la subjectivité du chercheur, y compris dans ses influences les plus discrètes, comme si cela garantissait l'explication du phénomène. Nous nous sommes positionnée d'emblée dans une démarche recherchant du sens. Tournant résolument le dos à la chasse aux occurrences, aux calculs de fréquences ou autre recours aux batteries de tests dont nous n'ignorons ni l'existence, ni la pertinence, ni la manière dont ils s'emploient, nous avons affiché le parti pris pourtant de les ignorer. Pour autant, alertée sur le danger d'une interprétation hâtive des faits, nous avons pris une distance raisonnée avec l'interprétation immédiate en convoquant des modèles d'analyse de contenus qui assurent la scientificité de la démarche.

En ce qui concerne la validité des résultats obtenus, ils découlent eux-mêmes des hypothèses méthodologiques dont nous nous réclamons. En sachant que toute la démonstration tient dans le repérage ou à l'absence de critères pré définis à l'observation fondateurs de la vision du déplacement de l'idée du vrai.

Quant à la posture de l'enseignant chercheur, les élèves n'ayant rien d'autre à gagner que le plaisir intellectuel, fort ingrat à leur âge, il est fort douteux qu'ils aient accompli cet effort dans le seul but de contenter leur enseignant.

La définition de l'objet d'étude.

En premier lieu, il est bon de rappeler que le dispositif est valable et fonctionne sur un savoir dont nous avons construit une représentation et que nous avons nommé l'idée du vrai.

Nous avons donc opéré une « chosification » du vrai en prenant délibérément le parti de l'inscrire dans le domaine des mathématiques et en l'associant étroitement à la preuve, pour rappeler la « doxa scolaire ».L'influence de notre propre rapport au savoir (sous l'angle du rapport aux mathématiques et du rapport à l'idée du vrai) et de notre vision du réel construit apparaissent donc en tant que limites au sens de paramètres dont il faut tenir compte dans ce que nous avançons du point de vue des modèles théoriques convoqués.

En deuxième lieu, cette recherche donne seulement à voir l'incidence de principes d'action que nous avons élaborés et dont nous avons voulu tester la pertinence a postériori, en regard de leur effet sur le déplacement de l'idée du vrai.

Pour cette raison, la modélisation que nous avons envisagée ne constitue pas un modèle d'action mais une perspective d'action par rapport à laquelle l'enseignant peut accorder quelque crédit quant à la question du déplacement de l'idée du vrai dans l'enseignement. En sachant qu'elle est aussi fortement contextualisée par le modèle théorique de l'apprentissage dont elle se réclame. Il s'agit donc d'une modélisation heuristique.

En troisième lieu, et par delà, cette approche questionne le bien fondé d'une pragmatique de l'apprentissage redevable à une épistémologie constructiviste. La situation problème, remarquable pour favoriser l'accès au sens n'en reste pas moins limitée quand il s'agit de penser la question du vrai, tant les élèves sont encore engagés dans une réflexion sans avoir été invités à construire réellement la problématisation de cette question. Et comme le souligne justement M Fabre, « *ainsi émerge l'hypothèse que, dans une perspective constructiviste de l'apprentissage les processus de problématisation qui corroborent le statut de la question et qui se trouvent en amont de la situation problème (virtuelle à ce moment là) importent autant si ce n'est plus que les stratégies de résolution qui visent à travailler la recherche de solution. A l'instar de Bachelard faire preuve d'esprit scientifique c'est la capacité à se poser des problèmes qu'il importe de développer. Sans problème, pas de question donc pas de connaissances scientifique* » [324] . La dévolution du problème (la question du vrai) a été faite sans que la phase de problématisation ait été suffisamment engagée par les élèves : aussi cette recherche reste t-elle encore timide dans son dépassement de la pédagogie de résolution de problème (au bénéfice de la pédagogie de la problématisation).

Sur le même registre, certains types d'activités proposées aux élèves peuvent être interrogées en regard de la problématique des situations fondamentales. Interrogation qui découle de la nature même de l'objet de savoir construit, l'idée du vrai, qui ne relève pas du concept et qui engendre quelques ambiguïtés dans la détermination d'obstacles face auxquels l'élève peut être placé pour dépasser ses représentations de l'idée du vrai.

En quatrième lieu, cet enseignement de l'idée du vrai n'est envisagé qu'à partir des classes de quatrième et de troisième et faute d'avoir analysé la question pour les classes de niveau antérieur nous ignorons tout des modalités de mise en œuvre d'un dispositif conçu antérieurement et de son éventuelle faisabilité (voire efficacité). Doute qui subsiste d'autant plus si l'on considère que la question du vrai est en rapport directe avec la pensée formelle « *qui suppose deux facteurs, l'un social (la possibilité de se placer à tous les points de vue et de sortir du point de vue propre ou immédiat) , l'autre ressortissant de la psychologie de la croyance (la possibilité de sous entendre sous la réalité empirique un monde purement possible où s'installera la déduction logique)* » [325] .

Enfin, les propositions didactico-pédagogiques contenues dans cette recherche ne sont pas révolutionnaires, certes. L'innovation n'est pas à considérer du point de vue d'optiques théoriques innovantes, mais bien dans l'essai de penser une praxis articulée à ces positions théoriques, au sujet d'un savoir objet peu abordé en tant que tel ordinairement car considéré comme scientifiquement non pertinent « *pour la raison qu'il apparaît culturellement étranger aux objets tenus pour emblématiques des questions de didactique des mathématiques* ». [326]

[324] FABRE M. opus cit. p. 209.

[325] PIAGET J. - *Le raisonnement et le jugement chez l'enfant* - Edition Delachaux et Niestlé . 1978. p. 63.

[326] CHEVALLARD Y. - *Recherches en didactique des mathématiques* - Pratiques enseignantes en théorie anthropologique - Volume 19/2 . 1999. p.223.

conclusion

Jamais il n'y eut une telle possibilité de connaissance et une telle probabilité d'obscurantisme Boris Ryback

Il faut aller du côté (...) où la raison aime être en danger Gaston Bachelard in E. Morin - La méthode 3 La Connaissance de la Connaissance - Edition du Seuil - 1986 - p.7

Au moment même où nous abordons la partie conclusive, autant avouer notre incertitude quant à la réelle portée des points que nous pensons avoir établis, tant les pratiques nous paraissent encore si marquées par la rigidité institutionnelle et ancrées dans des paradigmes non questionnés qui donne lieu parfois encore souvent à « *une litanie d'une liturgie trop connue* » [327] .

Et pourtant, cette conclusion sera orchestrée en trois mouvements : elle s'appliquera à décrire les idées fortes qui traversent en permanence la recherche ; elle s'emploiera à exprimer ce que nous pensons devoir être au cœur de l'exigence de l'action didactico-pédagogique (dans le cas de l'enseignement des mathématiques tel que nous le concevons) ; elle s'achèvera par l'ouverture des perspectives que peut ouvrir notre travail.

[327] DELANOE N. - *La faute à Voltaire* - Edition du Seuil - 1972. p.36.

1. Les idées fortes.

Comme « *il n'est pas nécessaire de se poser des questions sur les causes tant que l'on n'a pas d'abord prouvé l'existence de l'effet* » [328] , nous avons débuté notre recherche en recensant des observations mettant ainsi en exergue des représentations du vrai, des enseignants et des élèves afin de poser le problème des conditions de l'enseignement de l'idée du vrai. Nous usons du terme de condition (et pas de cause) dans son acception kantienne. La condition comme possibilité (au sens d'une condition a priori) mais teintée d'une dimension hégélienne qui introduit le lien entre condition et effectivité d'un phénomène.

Donc, se tourner vers les conditions de l'apprendre (versus kantien) réclame que soit dépassée l'illusion de la transmission du (des) savoir(s) par laquelle « *les apprenants restent les destinataires d'un produit fini qu'ils n'ont pas contribué à construire et avec lequel ils ne sont donc pas entrés en relation* » [329] .

Parti pris théorique qui insiste sur la démarche de construction du savoir en posant « *qu'apprendre est donc un processus de construction autonome où chercher constitue une condition essentielle à l'élaboration cognitive : dépasser les conceptions antérieures, découvrir la réalité de l'objet, développer des activités mentales adéquates, établir une discontinuité entre la connaissance commune et la connaissance scientifique pour construire de nouveaux concepts* » [330] . Et nous nous somme déjà exprimée à propos de cette condition a priori : si elle était nécessaire elle ne saurait être suffisante.

Une autre condition doit donc se juxtaposer à la précédente : dans l'enseignement, ne pas transiger sur ce qu'est la science (en particulier, les sciences mathématiques). Renoncer au mode de connaissance du sens commun. J.P. Astolfi traduit bien ce point de vue que nous défendons également, lorsqu'il montre que si nous préférons souvent la logique naturelle à la logique formelle, le problème n'est pas « *qu'il faille remplacer l'une par l'autre, comme si la seconde était hiérarchiquement supérieure à la première. Il faut plutôt élargir l'éventail et donner à chacun l'expérience des changements de regards* » [331] . Se saisir de la question du vrai pour susciter chez l'élève une « conversion » [332] où l'acte du désapprendre traduirait précisément l'acte d'apprendre [333] d'autant plus que « *croire*

[328] LATOUR B. - *La science en action* - Edition Gallimard. 1989 . p. 445.

[329] AUMONT B. et MESNIER P. M - *L'acte d'apprendre* - Edition PUF . 1992 . p.27.

[330] Ibidem p. 182.

[331] Dans la préface de « *La violence de l'enseignement des mathématiques* » opus cit. p.11

[332] BACHELARD G. - *Philosophie du non* - Edition PUF. 4ième édition. 1994. p. 8.

[333] REBOUL O. - *Qu'est-ce-qu'apprendre ?* - Edition PUF. 7ième édition. 1997. p.198.

que l'habileté [à résoudre] *se développe spontanément en faisant résoudre des problèmes machinalement tient de la pensée magique. Les difficultés rencontrés chez les élèves qui ont pourtant été soumis à plusieurs problèmes durant leur formation est éloquente à cet égard* » [334] .

S'impose alors, que l'on questionne obligatoirement l'image des mathématiques véhiculées par l'enseignement traditionnel (qui a du mal à réfracter que la personne construit d'autant mieux ses savoirs que son sens est interpellé) et que l'on s'attarde sur le rapport au savoir que cela implique chez l'élève (et chez l'enseignant).

En effet, nous déplorons que le traitement du vrai, sous la férule du professeur de mathématiques, ait tendance à rappeler la position minoritaire qu'occupent les constructivistes puisqu'ils « *appartiennent à une race peu répandue, dont le statut dans le monde mathématique semble celui d'hérétiques tolérés entourés de membres orthodoxes d'une église établie* » [335] . Et pourtant, P. Trabal montre bien combien le cours de mathématiques est un champ de bataille dans lequel la science est en jeu où « l'arme décisive » n'est autre que l'enseignant lui-même. De sa position, de sa conviction à la tenir, de ses pratiques ajoute t-il dépend le sort de l'enseignement scientifique.

Ainsi soutenons-nous une position qui donne à voir aux élèves un enseignant qui ne se pense pas comme le gardien du temple d'un univers uniquement accessible aux esprits éclairés, éloigné des hommes dont il veut se marginaliser. Position qui ne méconnait pas que «*d'instrument de connaissance qu'elle était d'abord essentiellement, la science est donc devenue aussi instrument de force* » [336] mais qui, au contraire, s'empare de cette réalité pour méditer la nature de la force qu'un enseignement peut potentiellement engendrer.

Position qui laisse de côté l'enseignant versus diffuseur de connaissances qui traduirait un renoncement à enseigner la science, en privilégiant le comment faire, au détriment d'une réflexion sur les limites du sens commun. Et c'est adossée à cette perspective, que nous pensons avoir montré les effets que pouvaient induire la nécessité de travailler l'idée du vrai autrement que par l'entraînement systématique à prouver.

Maintenir les exigences d'un enseignement dont la finalité n'est pas seulement de faire ingurgiter à l'élève des connaissances utiles simplement pour accéder à la classe supérieure. Ne pas transiger sur ce qu'est la science, en contribuant à faire admettre la nécessité de la preuve sous couvert de l'étude des limites que cet outil détient en lui-même pour que « *les élèves fassent en classe autre chose que leur « métier », en essayant de s'en tirer a minima* » [337] . Pour que les cours de mathématiques, ne se satisfassent plus de la « monstration » qui génèrent des propos d'élèves (contenus dans la thèse de J. Pereira [338]) tels que : « on apprend et on fait le test, nous allons à l'école

[334] POIRIER - PROULX opus cit. p.78.

[335] TRABAL P. opus cit. p.50.

[336] LEIF J. - *Philosophie de l'éducation - Inspirations et tendances nouvelles* - Edition Delagrave . 1967 . p. 98.

[337] ASTOLFI J.P. Dans la préface de « *La violence de l'enseignement des mathématiques* » opus cit. p.11

pour faire le test » ou encore « quand on nous donne la formule on nous vole tout ».

De fait, « *à quoi voulez-vous qu'il pense quand vous pensez à tout pour lui* ? » [339] . Et des voix plus contemporaines de s'élever aussi contre le modèle dominant d 'enseignement des mathématiques, que nous pourrions reprendre à notre compte même dans l'enceinte de l'enseignement en collège, en martelant « *jusqu'à quand les pauvres jeunes gens seront-ils obligés d'écouter ou de répéter toute la journée ? Quand leur laissera-t-on du temps pour méditer sur ces amas de connaissances, pour coordonner cette foule de propositions sans suite, de calculs sans liaisons...On enseigne minutieusement des théories tronquées et chargées de réflexions inutiles... Aussi qu'arrive t - il ? L'élève est moins occupé de s'instruire que de passer son examen* » [340] . Et pourtant, savoir c'est être et non avoir. Savoir c'est agir et ne pas modéliser même si agir implique de le faire.

Dès lors, nous faisons nôtre le point de vue qui considère que « *pour que je connaisse un objet, il faut que je connaisse non pas nécessairement ses propriétés externes mais toutes ses propriétés internes* » [341] . D'où notre insistance à défendre un travail qui pose comme objet le « ce sur quoi repose l'idée du vrai » en mathématiques, pour introduire une rupture à cet enseignement où « *il s'agit de prouver, de démontrer et [où] l'art du doute n'y est pas très développé* » [342] . Et si nous accordons tant d'importance au travail sur la nature des fondements de l'idée du vrai c'est que comme l'écrit B. Latour, « *le savoir rationnel porte sur l'essence des phénomènes* » [343] tout en gardant à l'esprit que « *la vérité, avant de caractériser un énoncé ou un jugement consiste en l'exhibition de l'être* » [344] .

Alors, dans la question du vrai en mathématiques qui joue un rôle fondamental ? Tirer l'enseignement des mathématiques du côté « *du fait que les propositions des mathématiques puissent être prouvées, ne signifie rien d'autre si ce n'est que leur justesse est reconnaissable sans que ce qu'elles expriment ait besoin d'être comparé soi-même aux faits quant à sa justesse* » [345] . Avec l'optique que « *les sciences sont*

[338] PEREIRA J. - *Des critiques des élèves sur les savoirs scolaires à une réflexion pédagogique interdisciplinaire* - Thèse N. R. Nantes 1997.

[339] ROUSSEAU J. J. - Emile p. 119 - cité par LEIF J. in *Philosophie de l'éducation - Pédagogie générale* - Edition Delagrave. 1970 . p. 290.

[340] MELA J. F. - *Objectifs de la formation scientifique* - Actes du colloque de l'Ecole Polytechnique. 1991. p. 98.

[341] WITTGENSTEIN L. - *Tractatus logico-philosophicus* - Edition Gallimard . 1961. p. 31.

[342] MELA J. F. opus cit p.103.

[343] LATOUR B. opus cit. p.442.

[344] LEVINAS E. - *Autrement qu'être ou au-delà de l'essence* - Edition Martinus Nijhoff. 1978. p.43

[345] WITTGENSTEIN L. opus cit. p.97.

relativistes de part en part. Apprendre à établir des relations, à construire des équivalences, à passer par transformations d'un point de vue à un autre, voilà en quoi consiste depuis toujours le relativisme qui ne saurait se réduire au ridicule adage « tous les points de vue se valent » »[346] .

2. Au cœur de l'exigence de l'action didactico-pédagogique.

Déjà dans les décennies quatre-vingts pouvait-on lire « *c'est donc, comme nous l'avons indiqué, contre les excès d'un recours exclusif à l'intelligence verbo-conceptuelle, à la logique formelle, à un rationalisme métaphysique, dogmatique, desséchant, que réagissent l'éducation et la pédagogie rénovées, parce qu'elles estiment, à juste titre, que c'est l'être total qui doit se trouver concerné par leurs projets et leurs entreprises, et qu'une formation purement intellectuelle est une formation incomplète* »[347] . Rappel à l'ordre de la finalité de l'acte d'enseignement qui se doit de naviguer entre les pôles intellectuel et humain. Et c'est bien de cela dont il faut discuter.

Quel impératif catégorique, au sens kantien serait au cœur de l'exigence du dépassement de l'action didactico-pédagogique à proprement parler, qui concilierait l'approche « *du mathématicien* [qui] *s'intéresse à la trajectoire d'un projectile à travers l'équation qu'il trouve pour la définir* [avec celle de l'homme pour qui l'intérêt et la valeur de la trajectoire résident] *dans l'inquiétude du danger, ou la mort qu'elle peut causer ?*[348] .

A quelle fin le travail sur la question du vrai en mathématiques doit-il se soumettre ? Quel intérêt pour l'élève de comprendre le rôle et le statut d'une hypothèse ? Tout ce questionnement est abordé dans la dimension du singulier comme pour mieux accentuer sa résonance idéale afin que la réflexion spéculative puisse se mettre en route. Car un tournant est négocié, celui de penser la finalité de l'action didactico-pédagogique sur le petit d'homme, citoyen scolaire mais non moins social tant « *il est impossible de penser la pensée dans une perspective égologique, et finalement donc, de penser l'être en ignorant le social* »[349] .

Il ne faut pas voir, bien entendu, dans cette volonté de travailler la question du vrai en collège une panacée, un remède à tous les maux mais simplement une orientation pour que les cours de mathématiques parviennent à « *instaurer un autre rapport entre le discours de l'Autre et le discours du sujet* »[350] . Donc, que l'enseignement des mathématiques (à travers la question du vrai) contribue à la domination du conscient sur

[346] LATOUR B. opus cit. p.15 et 16.

[347] LEIF J. - *Qu'est-ce-que la rénovation pédagogique ?* - Edition Nathan. 1978 . p.173.

[348] ALBERONI F. - *La morale* - Edition Plon (française) - 1996. p. 58.

[349] CASTORIADIS C. - *L'institution imaginaire de la société* - Edition du Seuil . 1975 . p.490.

l'inconscient. Autant dire qu'il participe au développement de la pensée autonome « *si le problème de l'autonomie est que le sujet rencontre en lui-même un sens qui n'est pas sien et qu'il a à le transformer en l'utilisant ; si l'autonomie est ce rapport dans lequel les autres sont toujours présents comme altérité et comme ipséité du sujet - alors l'autonomie n'est concevable, déjà philosophiquement, que comme un problème et un rapport social* » [351] . Entretenir une corrélation entre la nécessité de réfléchir au traitement du vrai en collège et le concept d'autonomie c'est alors postuler que d'une part, l'idée du vrai ne peut se construire à l'insu de l'implicite et que d'autre part, la pensée autonome ne se développe pas en dehors de toute contrainte didactique.

A l'inverse de la pensée dogmatique la pensée autonome se construit face à « *une confrontation féconde à une difficulté imposant une remise en cause des acquis antérieurs* [non renoncement à l'utilisation] *de l'effet dynamisant du contact avec la difficulté qui est souvent à l'origine d'une restructuration par l'élève de son propre savoir* » [352] .

Mais, au concept d'autonomie suivant Castoriadis, tout teinté d'une nuance psychanalytique, nous juxtaposons l'idée d'émancipation démocratique qui tout en prolongeant la dimension sociale introduit une dimension plus politique. A l'instar de Rosa Luxembourg qui déclara que « *si toute la population savait, le régime capitaliste ne tiendrait pas 24 heures* » [353] , nous prétendons que le savoir a une portée qui le dépasse.

Travailler la question du vrai avec les élèves conduit sans doute à améliorer des compétences dans le champ scolaire mais ouvre d'autres horizons que cette simple vocation à respecter un contrat didactique tant « *le savoir et le vouloir ne sont pas pure affaire de savoir et de vouloir* [car] *on n'a pas affaire à des sujets qui ne seraient que volonté pure d'autonomie et responsabilité de part et d'autre [...]. Ce n'est pas seulement que la structure sociale est « étudiée pour » instiller dès avant la naissance passivité, respect de l'autorité, etc. C'est que les institutions sont là, dans la longue lutte que représente chaque vie, pour mettre à tout moment des butées et des obstacles, pousser les eaux dans une direction, finalement sévir contre ce qui pourrait se manifester comme autonomie* » [354] .

Le travail de réflexion sur l'idée du vrai en mathématiques se conçoit dans l'optique d'apporter aux élèves des instruments intellectuels pour qu'ils puissent faire face à des questions (hors champ mathématique) qui ne manqueront pas de leur être posées.

Non pas pour raviver le projet d'une conception purement scientifique du monde, non pas pour entretenir l'illusion que les mathématiques permettent d'accéder à une maîtrise

[350] CASTORIADIS C. opus cit. p. 155.

[351] CASTORIADIS C. opus cit. p.159.

[352] PERROT G. et RAGOT A. - *En mathématiques peut mieux faire* - Recherches / Pratiques . INRP . 1986. p.58.

[353] Citation de Castoriadis in opus cit. p. 162 note 41.

[354] CASTORIADIS C. opus cit. p. 163.

rationnelle des relations humaines, mais pour « pousser les eaux » du côté d'une image des mathématiques qui ne serait plus « *un instrument de puissance et une réserve de certitudes,* [et où] *son enseignement* [ne viserait plus] *essentiellement à la maîtrise technique qui récompense souvent non les esprits les plus inventifs mais les plus dociles »* [355] *.*

Ainsi donc les cours de mathématiques doivent-ils se méfier de la dérive instrumentale qui ne doterait l'élève que de procédures, parades infaillibles à tout questionnement sur l'idée du vrai. Un enseignement des mathématiques attentif à la question du vrai, résolument soucieux d'outiller conceptuellement l'esprit, et enveloppé de sa parure scientifique, sert aussi (et avant tout) à questionner la chose, le monde, la pensée. Car « *enseigner les sciences, cela se résume-t-il à transmettre la plus grande quantité de connaissances établies, au risque de figer théories et concepts ? N'est-ce pas plutôt à l'esprit de la recherche qu'il convient de faire accéder le plus grand nombre d'élèves ? Et l'essentiel n'est - il pas de faire saisir aux étudiants ce que sont les démarches intellectuelles qui permettent d'acquérir toujours de nouvelles connaissances ? Ne doit-on pas, au premier chef, initier les jeunes esprits à une certaine manière de s'y prendre avec l'inconnu, de s'ouvrir à l'imprévu, laquelle distingue la pensée scientifique des autres formes de pensée ?* » [356] . En somme, questionner le sens du vrai en mathématiques pour former aussi bien des « agitateurs d'idées que des travailleurs de la preuve », selon la référence bachelardienne.

Lors, il ne s'agit plus d'endoctriner ou de favoriser cette prosternation devant la déesse « vérité mathématique », mais bien de susciter l'interrogation, le doute pour éclairer en retour, par d'autres regards, la pensée de l'homme tout à la fois « *sentimental, actif et intelligent* » [357] afin qu'au moment venu, l'esprit se déleste de la charge de certains raisonnements périmés. Afin que le savoir et le savoir faire se situent dans le champ des pratiques sociales. Afin que la pensée se délie de l'adhésion aux vérités qui tendent à se transformer en dogme. Et si « *il est cependant vrai que les mathématiques sont inséparables de certaines exigences, elles requièrent que les hommes se traitent comme égaux entre eux. Elles exigent qu'ils cherchent à tomber d'accord en suivant leurs règles. Mais elles exigent aussi que ces règles soient librement comprises et que chacun puisse les expliquer librement à ses semblables. Elles reconnaissent que les hommes ont le droit à l'erreur, le droit de changer d'avis et d'abandonner leurs anciennes idées. Telles sont les règles de la démocratie* » [358] .

Alliance donc entre enseignement des mathématiques et démocratie qui rappelle le

[355] LECOURT D. in Rapport « *L'enseignement de la philosophie des sciences* » - Ministère de l'éducation nationale et de la recherche et de la technologie - janvier 2000. p.13.

[356] LECOURT D. in opus cit. p.23.

[357] ARON R. - *Les étapes de la pensée sociologique - Nature humaine et ordre social chez Auguste Comte* - Edition Gallimard . 1967. p. 107.

[358] HANNAFORD C. opus cit. p.490.

combat des républicains dont l'idéologie était bien émancipatrice comme le fait remarquer A. Prost quand il livre, « *elle [l'école], instaure une nouvelle humanité. Sa mission est de former des individus capables de penser par eux-mêmes et de se déterminer de façon autonome, pour fonder une société « moderne », affranchie de l'ignorance et des liens serviles de dépendance, c'est-à-dire une société de citoyens égaux en droits et en dignité, bref une République. Aussi est-il nécessaire que tous les enfants soient correctement instruits : avec la gratuité, l'obligation scolaire et la laïcité, les républicains poursuivent ce que l'on pourrait appeler, mais qu'ils n'appellent pas, une démocratisation civique de la fréquentation scolaire* » [359] . Voilà bien ce qui est au cœur de l'action didactico-pédagogique : l'idéal d'émancipation démocratique des élèves à travers une réflexion sur l'idée du vrai en mathématiques comme transcendance de l'acte d'enseigner.

A travers la didactique et la pédagogie il convient d'attribuer à l'école une mission de socialisation par les savoirs. L'instruction au service de l'éducation promeut un modèle de l'humain au cœur même de l'institution scolaire. En cela, l'enseignement des mathématiques apporte sa contribution. Mais derrière ce souci de socialisation se dissimule encore trop cet effet de mise en conformité des élèves au dogme de la déférence. Quand l'enseignement des mathématiques entretient le mythe de la vérité, il se méprend sur l'ambition qu'il se doit d'afficher. De notre point de vue, se polariser sur la dimension socialisante des savoirs mathématiques ne préside pas forcément à l'inauguration d'une considération encore par trop oubliée : l'ambition démocratique dans sa dimension émancipatoire.

D'aucuns argueront peut être que nous nous autorisons une envolée emphatique vers des horizons auxquels notre travail ne peut prétendre et nous en assumons le risque.

La démarche spéculative que nous adoptons prendra une distance raisonnée avec les interprétations que nous avons régulièrement formulées pour penser ce que nous nommons des registres d'émancipation à travers le traitement de la question du vrai dans l'enseignement.

Le registre d'absence d'émancipation.

Il correspond à un enseignement des mathématiques uniquement soucieux d'instrumentaliser le vrai à travers la résolution de problème.

Tout comme G. Arsac déplore que « *le risque est grand de se précipiter sur ces problèmes d'enseignement [de la démonstration] en prenant pour argent comptant le statut de la démonstration dans l'enseignement c'est-à-dire le résultat de la transposition didactique, sans s'interroger sur son origine* » [360] nous dénonçons l'amalgame vrai / preuve risqué, résultat de la transposition didactique du vrai sans autre considération, d'ordre épistémologique par exemple.

[359] PROST A. *Education, société et politiques. Une histoire de l'enseignement de 1945 à nos jours*. Edition du Seuil. 1997. p. 48.

[360] ARSAC G. - *Recherches en didactique des mathématiques* - Volume 9/3. 1990. p.249

Tout comme le suggère Arsac, les démonstrations qui expliquent (et qui ne prouvent pas seulement) doivent prendre le pas dans l'apprentissage, l'urgence de présenter dans l'enseignement un éclairage sur l'idée du vrai se fait tout aussi pressante.

L'idée du vrai ne peut être pleinement ce qu'elle est qu'à la condition d'être bornée et de trouver dans ses limites son accomplissement. La portée humaine et sociale des mathématiques et de leur enseignement s'éprouve d'abord au cœur de l'appropriation des savoirs et de la question du vrai en l'occurrence.

L'incapacité d'un enseignement figé sur l'instrumentation du vrai devient symptôme des errements didactico-pédagogiques en posant à tort l'existence d'une norme arbitraire qui brouillent les repères. Il n'y a pas lieu de se soumettre à cette métamorphose de l'idée du vrai qui risque d'infléchir l'enseignement des mathématiques du côté d'une science sans âme ni sens.

L'humanisme qui inspire la didactique à son origine ne peut être balayé par des dérives qu'elle engendre du fait même de ses principes, tant qu'elle songe à gommer la dimension de la personne. En cela, la manière de présenter l'idée du vrai ne doit pas être

coupée de l'effort qui lui a donné naissance.

Chaussant les vieilles lunettes de l'obscurantisme, l'instrumentalisation de l'idée du vrai trahit la myopie de tous ceux qui espèrent dans le recours au dogmatisme, en broyant toute idée d'émancipation, car comme le déclare Kerlan « *quel pédagogue s'inquiète aujourd'hui ouvertement de la dimension morale ou éthique des apprentissages en sciences ? Mais cette indifférence avoue une incapacité. Un enseignement des sciences sourd à sa dimension morale quand la société tout entière s'inquiète des conséquences éthiques du développement des sciences n'est pas loin d'avoir renoncé à sa vocation proprement éducative* » [361] .

Le registre de l'émergence d'émancipation.

Renversement de la logique de résolution par la prise en compte de la problématisation de l'idée du vrai.

Nous le répétons, dans un contexte social qui fait de la parole l'instrument et le fondement du pouvoir, où le discours éprouve sa puissance de conviction dans l'usage de ses règles , l'idée du vrai tient en otage aussi bien la rationalité que la démocratie. La rationalité d'abord, puisque l'idée du vrai s'inscrit au sein des mathématiques, science démonstrative par excellence. Et la démocratie aussi, puisque l'idée du vrai vise l'idéal d'élever chacun au-dessus de lui-même pour participer à l'émergence de son émancipation.

Mesuré à l'aune de la notion d'émancipation, la prise en compte de l'idée du vrai sous l'angle de la problématisation dessine une autre gradation dans l'intérêt que l'on veut retirer de son traitement. La préoccupation de la figure utilitaire de cette problématisation traduit la volonté d'effectuer une reprise éducative (dimension intellectuelle) et fondatrice

[361] KERLAN A. - in opus cit. p. 141.

de la personne (dimension humaine).

De même que le raisonnement scientifique en général forge des procédures intellectuelles, l'enseignement de l'idée du vrai en mathématique renoue avec cette ambition certes, et remplit l'office de donner de l'élan à l'esprit pour de nouvelles conquêtes. L'idée du vrai, parce qu'elle est œuvre humaine inculque que quels que soient les principes logiques dont se dote une science, cette dernière n'épuise pas la réalité.

Il ne s'agit pas de défendre une conception érudite de l'idée du vrai qui se détournerait de l'aspect utilitaire pour ne satisfaire que des fins spéculatives. La problématisation du vrai n'aboutit pas à délimiter des savoirs qui n'auraient d'autre fin qu'eux-mêmes. L'enseignement qui prend en charge cette question là n'ignore pas le champ de référence dans lequel il s'inscrit, mais se détourne de l'obligation de présenter des « vérités » ex cathedra découlant de l'imposition à l'entraînement intensif à la résolution de problème, sous l'angle de l'exclusive.

L'entrée de la problématisation du vrai entretient quelque proximité avec un précepte cher à Durkheim, érigeant un lien entre la pensée et l'agir. En cela la problématisation de l'idée du vrai fait œuvre d'émergence d'émancipation intellectuelle en élargissant l'ambition rationaliste.

Dans un autre ordre, la portée émancipatrice de la problématisation de la question du vrai s'éprouve au cœur de son enseignement et de l'appropriation des savoirs qu'elle entend dispenser pour servir une pensée contre soi, voire contre l'obscurantisme en soi. La question du vrai dans sa problématisation donne la mesure des torsions qu'elle imprime à la logique de la résolution systématique, symptôme manifeste des errements didactico-pédagogique contemporains. L'idée du vrai se conquiert et se construit. En cela, l'enseignement de l'idée du vrai fait œuvre d'émergence d'émancipation humaine car « *l'accès à la pensée rationnelle est en lui-même une socialisation complète et par là une libération* [...] *il convient de le répéter : c'est dans la méthode d'élaboration du savoir que réside la socialisation éventuelle et non dans la possession d'un savoir scientifique présenté tout élaboré*». [362]

Si l'on peut convenir de la pertinence de l'adage « c'est en forgeant que l'on devient forgeron » encore faut-il admettre qu'un bon forgeron ne se reconnaît pas à la dextérité

qu'il a d'appliquer des chaînes de procédures chronologiques.

Un bon forgeron manifeste son art dans la manière de se poser les bonnes questions afin d'y apporter les bonnes réponses. En réalité, comme le soutient Durkheim, si « *l'esprit prend la forme des choses qu'il pense, pour qu'il s'élargisse, il faut qu'il soit en face d'une ample et riche matière et qu'il sente le besoin de s'en saisir* ». [363] L'entraînement à la rédaction de la preuve n'est qu'un vêtement extérieur étriqué qui habille un enseignement indifférent à la dimension de l'idée du vrai qu'il véhicule. La preuve est à l'idée du vrai ce

[362] LEGRAND L. DEVELAY M. KERLAN A. FAVEY E. - *Quelle école voulons - nous ? - Dialogue avec la Ligue de l'enseignement*. Edition ESF. 2001 p.14.

[363] DURKHEIM - *L'évolution pédagogique en France* - 2ième Edition. Edition PUF. 1969 p.315 cité par Kerlan in - La science n'éduquera pas opus cit p.153.

que la grammaire est à la langue. Quand on réduit l'esprit à ne penser la preuve que dans son achèvement, on ne lui permet pas de se confronter à cette riche matière, on ne lui permet pas de penser les choses auxquelles on le forme.

Pire, l'on peut se demander à quel point cette manière de concevoir l'idée du vrai n'alimente pas « *les résistances de l'enfant à cet enseignement* [qui] *viennent de l'incompréhension du modèle technique que nous voulons lui imposer, il résiste à la norme de fabrication dont nous voulons l'estampiller* ». [364] Même si le champ d'application des propos de l'auteur n'est pas le même que le nôtre la prépondérance de telles attitudes dans le champ des mathématiques conduit à reconnaître le vice fondamental d'une pensée dogmatique en regard de l'idée du vrai. En cela la problématisation de la question du vrai révise les jugements en matière d'éducation à la pensée scientifique en ouvrant sur la tentative de ne pas entériner l'idée du vrai en soi. En débarrassant de sa gangue le noyau riche de la question du vrai, la problématisation restitue à l'élève les moyens d'exercer sa pensée critique menacé par des schémas archaïques fondé sur la logique et la rigueur.

Mais si la problématisation du vrai relève le défi de marquer une rupture face au curriculum prescrit par l'institution, elle n'en est pas moins atrophiée dans ses ambitions. Associée qu'elle est à un morcellement de savoirs parcellaires et parfois disjoints au sein même de l'enseignement des mathématiques. Et le nouveau défi est de « *penser l'enseignement d'une part à partir de la considération des effets de plus en plus graves de la compartimentation des savoirs et de l'incapacité de les articuler les uns aux autres, d'autre part à partir de la considération que l'aptitude à contextualiser et à intégrer est une qualité fondamentale de l'esprit humain qu'il s'agit de développer [...].* [365]

Vers le registre d'émancipation.

Par delà la problématisation, la dimension culturelle de la question du vrai dans un enseignement des mathématiques.

La notion de connaissance pertinente relative à l'idée du vrai procéderait de son degré d'organisation, de sa mise en relation avec la preuve, et de sa capacité informative au sein des mathématiques. La pertinence devient le meilleur auxiliaire de la raison pour assurer la plénitude au mouvement de la connaissance. De connaissance figée et ligotée, l'idée du vrai éveillerait à d'autres horizons qui ne seraient plus gouvernés par le caractère sacré que développe un enseignement des mathématiques rivé sur le rituel de la preuve. Ainsi la connaissance pertinente désentrave t-elle la pensée pour libérer l'homme.

Mais décréter que les savoirs sont formateurs fait valoir d'emblée que l'on assimile instruction scientifique et culture scientifique dans ses deux dimensions anthropologique et patrimoniale. [366] Il convient alors d'exclure la réduction de l'idée du vrai à sa visée

[364] CAUMEIL J.C. - *Contribution à une épistémologie de l'éducation physique et sportive - Du savoir de l'activité motrice aux éléments d'une pédagogie du sens* - Thèse de doctorat en Sciences de l'éducation. Université Lyon II. 2000. p .66.

[365] MORIN E. *La tête bien faite - Repenser la réforme réformer la pensée* - Edition du Seuil. 1999. p.16.

utilitariste. Il convient aussi de comprendre le retentissement de l'idée du vrai sous l'angle du sens que cela déclenche en chacun pour impulser un mouvement vers la logique des savoirs car il est grand temps comme le clame Kerlan de s'efforcer « *de combler le décalage entre la réalité vivante et prosaïque des sciences et leur image publique ; en restituant à la pensée scientifique sa vraie dimension d'aventure, de spéculation, de tâtonnement, de risque intellectuel ; en favorisant la réappropriation critique de la rationalité scientifique* » [367] .

Donc, glissement de savoirs parcellaires vers la dimension culturelle du savoir car ce qui touche au cognitif empiète sur notre for intérieur en sorte que le devoir de celui qui enseigne ne se referme pas sur des injonctions programmatiques sclérosantes. Il est hors de doute que la question du vrai trouve là en partie l'origine de sa dénaturation. L'essor culturel qui doit accompagner l'enseignement des mathématiques en particulier interdit que l'on accepte l'arbitraire des programmes sans en envisager les nécessaires déconstructions.

Plus, il inflige à la pensée de ne pas ignorer les aspirations que font naître par exemple, « les sept savoirs nécessaires à l'éducation du futur » [368] définis par Morin. Le dessein de sortir d'une centration forte sur les contenus coutumiers, pour échapper aux normes et aux rituels du fonctionnement disciplinaire porte l'exigence d'inscrire du sens, au sein même de l'enseignement des mathématiques (sans omettre une visée interdisciplinaire) selon les deux dimensions anthropologique et patrimoniale en ré interrogeant la conception actuelle des programmes de collège. [369]

Il faut envisager un enseignement qui refuse de véhiculer des dogmes au moment même où l'inconnaissable et l'indécidable sont au cœur de la pensée scientifique. Si l'idée du vrai s'identifie en premier lieu dans cette fonction de déterminer des normes, de fixer, de régulariser des conduites alors on comprend mieux le goût amer qu'elle peut susciter. La place stratégique que peut occuper l'enseignement de l'idée du vrai dans un dispositif de formation avertit qu'au lieu de refermer la question du vrai sur un durcissement de la pensée à trancher il faut lui adjoindre la formation à une « logique de l'étrange ». [370] Etrangeté logique qui s'enracine jusque dans l'existence d'un ordre au sein du chaos poussant l'exigence rationnelle dans ses derniers retranchements.

Le paradoxe de l'enseignement de l'idée du vrai n'est-il pas de s'interdire d'emblée cette perspective de l'indécidable ? Et pourtant si la logique [371] ne confère pas son existence à l'idée du vrai elle prescrit de se soucier des conditions du vrai. On perçoit bien

[366] DEVELAY M. KERLAN A. LEGRAND L.FAVEY E. opus cit. p.100

[367] KERLAN A. Ibidem p. 44.

[368] Nous les rappelons : les cécités de la connaissance ; les principes d'une connaissance pertinente ; la condition humaine ; l'identité terrienne ; affronter les incertitudes ; la compréhension ; l'éthique du genre humain.

[369] Projet de recherche dans lequel le groupe mathématique du CEPEC s'est engagé pour les quatre ans à venir.

[370] GUITON J. BOGDANOV I. BODNANOV G. - *Dieu et la science* - Edition Grasset - 1991.

que le projet d'user de la question du vrai pour la conforter dans son association étroite avec la preuve conduit à l'hypostase de la pensée et perd de son pouvoir d'émancipation car il faut le redire à la suite de M. Develay, « *l'émancipation par le savoir ne peut advenir de sa simple exposition mais exige la construction d'une relation dynamique, critique, significative, personnelle entre l'élève et sa singularité, et le savoir et son universalité* ». [372]

L'idée du vrai en mathématiques au service d'une culture scientifique scolaire émancipatrice.

Les jalons théoriques fondateurs : au travers de citations.

« C'est Condorcet (1790-1792) qui a effectivement signifié avec le plus d'éclat cette primauté de l'instruction seule médiation possible à ses yeux de l'égalité réelle entre les humains et de leur émancipation. Faire le vrai et être libre sont une seule et même réalité humaine. Mais le vrai est à faire par les humains. Il n'est pas détenu par une minorité d'êtres divins. Il n'est pas reçu d'En haut. L'instruction « c'est apprendre à » et « apprendre de » dans leur mouvement conjoint qui met des humains les uns en face des autres dans l'activité dialogique où s'exerce le discernement et donc où s'éprouvent l'égalité et la liberté ». [373] « Lakatos a montré à partir de l'histoire du théorème d'Euler sur les polyèdres que les mathématiciens procèdent, eux aussi, par dialogue : théorème, démonstration, réfutation, en particulier sous forme de contre-exemple, reformulation du théorème ou de la démonstration, nouveau contre-exemple, etc. On trouve des discussions en mathématiques comme dans les sciences expérimentales : Newton et Leibnitz furent l'objet de vives critiques à la suite de leur découverte du calcul infinitésimal. De nombreuses objections aux nombres négatifs se firent entendre tout au long du 18ième siècle. Les controverses du 18ième siècle sur les logarithmes des nombres négatifs et complexes avaient tant dérouté les mathématiciens que, même au 19ième siècle ils furent conduits à mettre en question à la fois les nombres complexes et les négatifs. [...]. Au 19ième siècle, la théorie de Cantor des ensembles infinis provoque une levée de boucliers ; les controverses qui débutent dans les années 1870 culminent au début des années 1900. C'est donc à tort que l'on a dit que « dans les mathématiques il n'y avait pas de controverse » ; que d'une manière générale on a opposé « le dialogue de la dispute et le monologue de la science » et que l'on a affirmé que « c'est [...] l'abandon du discours critique qui marque le passage à la science » [374] . Le dialogue est le fondement de la science ». [375] « Tout le monde peut admettre que l'école est un lieu pour apprendre, reste que l'institution

371 Pris dans le sens de « l'étude des conditions de la vérité » selon CUVILLIER A. - *Manuel de philosophie - Logique* - Morale - Tome II. Edition A. Colin. 1937. p.6.

372 DEVELAY M. KERLAN A. LEGRAND L.FAVEY E. in opus cit p.108.

373 HAMELINE D. - Courants et contre courants dans la pédagogie contemporaine - Edition ESF. 2000. p.109.

enseignante a procédé à tout un montage hiérarchique de règles et de programmes, elle a défini des normes, accumulé les cloisonnements, en sorte que s'est opéré un véritable « retournement » de l'objet pour lequel est faite et qui n'est plus reconnaissable. On ne voit plus l'apprenant, on passe à côté sans le remarquer ». [376] ***« Un savoir n'a de sens et de valeur qu'en référence aux rapports qu'il suppose et qu'il produit avec le monde, avec soi-même, avec les autres ».*** [377] ***« Pour nous, les Mathématiques ne sont pas un catalogue de recettes plus ou moins utiles à ingérer. Elles sont vivantes ; l'enseignement devrait donner le goût et les moyens d'en faire ».*** [378] ***« L'univers n'est connu de l'homme qu'au travers de la logique et des mathématiques, produits de son esprit, mais il ne peut comprendre comment il a construit les mathématiques et la logique qu'en s'étudiant lui-même psychologiquement et biologiquement, c'est-à-dire en fonction de l'univers entier (Piaget) ».*** [379] ***« Il faut aller du côté [...] où la raison aime être en danger (Bachelard) ».*** [380] ***« Il ne s'agit pas de donner au lecteur [au collégien : c'est nous qui substituons] une teinture de ce qui est enseigné de façon plus approfondie à l'Université, mais d'effectuer des analyses qui n'y sont pas normalement faites (D'Espagnat) ».*** [381]

Essai de caractérisation des signification et but d'une culture mathématique émancipatrice (au travers de l'idée du vrai).

La voie culturelle exerce son effet de formation intellectuelle et humaine, en cela qu'elle dépasse le principe d'assimilation pour introduire celui d'enrichissement qui tourne l'esprit par delà l'immédiateté des effets (à court terme) des savoirs. Prise de position éthique.

Elle engage l'enseignement des mathématiques à accomplir le saut vers des contrées énigmatiques où les évidences sont à reconsidérer, où la rationalisation est à interroger. C'est parce que la notion de Connaissance porte en elle les germes du multidimensionnel que le doute devient un véritable moteur pour impulser du vivant au royaume des vérités enseignées. Doute comme constitutif de controverses qui confrontent l'esprit jusqu'aux frontières de l'inconnaissable. C'est défendre l'entrée de la dimension

[374] THUROT C. - Etudes sur Aristote - 1860 p.152. cité par KAPLAN in opus cit. p.154.

[375] KAPLAN F. - La vérité - Le dogmatisme et le scepticisme - Edition A. Colin . 1998. p.154.

[376] IMBERT F. opus cit. p. 19

[377] CHARLOT B. - Du rapport au savoir - Eléments pour une théorie - Edition Economica. 1997. p.74.

[378] AUDIN P. - Objectifs de la formation scientifique - Où l'objet de l'échec et de la honte devient un objet du désir - Actes du colloque de Palaiseau . Ecole polytechnique.1991. p.111.

[379] MORIN E. La méthode 3. La Connaissance de la Connaissance. Edition du Seuil. p.8

[380] MORIN E. ibidem p. 8

[381] MORIN E. ibidem p. 8

épistémologique dans l'enseignement.

Une valeur doit être résolument maintenue au centre de toute visée culturelle : l'altérité. A la priorité de l'enseignement du formalisme scientifique doit s'ajouter une nouvelle figure, celle de l'émancipation de l'homme, par delà la socialisation. Défendre une culture scientifique c'est tenter (au travers de l'enseignement de l'idée du vrai) de situer le combat au noeud stratégique des mathématiques et de l'humain. C'est intégrer la dimension anthropologique du savoir dans la didactique des mathématiques.

L'idée du vrai ne détourne pas l'esprit de la visée mathématique que doit conférer son enseignement. C'est en puisant aux sources de son existence, et en étudiant les particularités de son origine que l'idée du vrai enracine des principes mathématiques dans leur épaisseur. En cela, nous pensons que tend à s'opérer la réconciliation entre culture scientifique et enseignement des mathématiques.

Contribution de l'enseignement de l'idée du vrai aux fondements d'une culture mathématique.

Si comme l'avance Durkheim, « *il n'y a que deux catégories d'objets auxquels il est possible d'attacher la pensée. C'est l'homme, d'une part, la nature, de l'autre ; le monde de la conscience et le monde physique* » [382] nous avançons que l'idée du vrai en mathématiques ne cesse d'approfondir et de développer de l'humanité sous les conditions que l'enseignement fournisse la clé qui ouvre les portes d'une culture mathématique. Tant que l'enseignement des mathématiques imposera des dogmes, le modèle éducatif promu interdira la juxtaposition entre enseignement et émancipation. L'œuvre de réconciliation pourrait alors advenir du « magister constructeur des situations » [383] en quête de porter l'être à un degré toujours plus élevé d'accomplissement. C'est alors qu'il soumettrait son enseignement de l'idée du vrai en particulier, au respect des cinq considérations que nous définissons tant la « *science naît dans les problèmes et finit dans les problèmes*» [384]

Dimension mathématique.

- hypothèse : sens, rôle et statut
- un référent : les principes de rationalité
- un contexte : ensemble d'hypothèses assumées
- argumenter, expliquer, prouver, démontrer

Dimension didactique

[382] DURKHEIM E - *L'évolution pédagogique en France* - Edition PUF (2ième) . 1969. p.366 cité par KERLAN A. - *La science n'éduquera pas . Comte, Durkheim, le modèle introuvable* - Edition Peter Lang. 1998. p.82

[383] Michel Develay désigne ainsi l'enseignant dans quelle école voulons-nous ? opus cit.p.108.

[384] POPPER K. - *La quête inachevée* - Edition Calmann Lévy - 1986. p.185.

- prise en compte des représentations
- réalité des obstacles : épistémologique, à la rationalité et didactique
- la nécessaire dévolution de l'idée du vrai aux élèves
- dépassement de l'aspect méthodologique de l'administration de la preuve
- dissociation entre démarche de recherche - démarche de résolution

Dimension épistémologique

- la preuve et l'idée du vrai
- le rôle du contre exemple dans la recherche du vrai
- le problème de l'immunisation contre la réfutation (adjonction d'hypothèses auxiliaires)
- le principe de l'induction en regard du rôle du contre exemple
- rapport entre le vrai et les propositions
- le rôle de l'erreur dans la recherche du vrai

Dimension anthropologique

- la modélisation : la disjonction entre le vrai mathématique et la réalité comme lieu de perturbations
- l'idée du vrai et son existence en mathématiques: objet de contemplation ou construction ?
- la violence de la rationalité mathématique : place de la norme
- les mathématiques : dogme ou science ?

Dimension éthique

- conditions d'une connaissance libératrice
- les mathématiques et l'idéal humain
- les mathématiques et l'idéal de la démocratisation

3. Les perspectives de la recherche.

« Nous traînons avec nous des habitudes de pensée et des goûts qui ont été forgés dans une classe aujourd'hui presque oubliée, par un enseignant dont on ne se souvient à peine. Je me souviens de l'un de ces professeurs qui a donné à toute la classe le goût pour les interprétations les moins évidentes des

événements historiques. Nous avons fini par oublier notre gêne et nous avons proposé toutes nos idées les plus folles. Une telle classe nous a aidé à inventer une tradition » [385] **.**

Tout reste donc à faire : inventer une tradition.

Il nous semble que nous avons ouvert quelques pistes concernant le traitement de la question du vrai en mathématiques au collège, mais beaucoup de travail reste à faire dans la mesure où l'on adhère à une conception de l'enseignement des mathématiques soucieuse de ne pas faire l'impasse sur des questions cruciales. Tant les conceptions de la science des adolescents ne sont pas étrangères aux représentations qu'ils entretiennent à l'égard de leur propre activité scolaire comme le souligne fortement Desautels [386] .

En ce qui concerne la question du vrai, il reste entre autres à approcher davantage la dimension de la problématisation, en cherchant à cerner les fonctions didactiques associées pour concevoir des scénarios réalistes qui s'y articuleraient.

Il s'agirait également de concevoir un espace de perturbations (endogènes et exogènes) qui permettraient de favoriser cette phase de problématisation pour susciter un « dérangement épistémologique » et exercer « une démocratie épistémologique » chers à Desautels qui interpelleraient les élèves sur *« le résultat de Gödel* [qui] *ne précise pas quel est le nombre exact de vérités indémontrables qui pourraient exister en mathématiques, pas plus qu'il n'explicite la nature de la faculté « extralogique » qui donnerait au mathématicien le pouvoir de reconnaître une vérité arithmétique que la logique ne peut prouver. Les mathématiciens se retrouvent ainsi à l'oeuvre dans un monde où, en principe, toute hypothèse est potentiellement une vérité indémontrable et où la lumière reste à faire sur le type de principe extralogique dont l'apport permettrait d'évaluer la vérité d'une hypothèse soupçonnée d'être une vérité indémontrable* » [387] .

Reste donc à penser comment un enseignement des mathématiques poussé jusqu'à l'exigence d'une culture scientifique, peut s'emparer de la béance irréfermable logée au cœur même de la connaissance mathématique. Puisque ni la vérification empirique, ni la vérification logique [388] ne savent établir un fondement certain à la connaissance mathématique comment traiter la question de « *l'Incertain fondamental tapi derrière toutes les certitudes locales* » [389] ?

385 BRUNER J. opus cit. p. 41.

386 Point de vue qu'il développe dans son ouvrage : *Autour de l'idée de sciences* - Edition De Boeck Université . 1992

387 GUILLEN M. in opus cit. p.136.

388 Logique définie selon Cuvillier comme *« l'étude des conditions de la vérité » - Manuel de philosophie - Logique - Morale* - Tome II . Edition A. Colin . 1937. p. 6

389 MORIN E. *La méthode 3 - La Connaissance de la Connaissance* - Edition du Seuil 1986. p.15

bibliographie

OUVRAGES

En mathématiques.

APERY R. et DIEUDONNE J. et LOI M. et THOM R. - *Penser les mathématiques* **-** *Séminaire de philosophie et de mathématiques de ENS* - Edition Seuil - 1982.

AUDIN P. et MELA J.F. - *Objectifs de la formation scientifique* - Actes du colloque de l'Ecole Polytechnique - 1991.

AUDIRAC J.L. - *Vie et œuvre des grands mathématiciens* - Edition Magnard - 1990.

AUTHIER M. - *Archimède : le canon du savant* - in Eléments d'histoire des sciences dirigé par M. Serres - Edition Bordas - 1989.

BENOIT P. - *L'intermédiaire arabe ?* - in Eléments d'histoire des sciences dirigé par M. Serres - Edition Bordas - 1989.

BOUVIER A. - *La mystification mathématique* - Edition Hermann - 1981.

CHOUCHAN N. - *Les mathématiques* - Edition Flammarion Corpus - 1999.

DAHAN - DALMEDICO A. et PEIFFER J. - *Une histoire des mathématiques . Routes et dédales* - Edition Seuil - 1986.

DESCARTES R. - *Le discours de la méthode* **-** Edition Livre de poche. 5ième édition. 1996.

GEGIELSKI P. - *Un fondement des mathématiques* - in *La recherche de la vérité* IREM de l'Université de Paris VII - Edition du Kangourou - 1999.

GOLDSTEIN C. - *L'un est l'autre : pour une histoire du cercle* - in Eléments d'histoire des sciences - Edition Bordas - 1989.

GOLDSTEIN C. - *Le métier des nombres au 17 ième et 19 ième siècle* - in Eléments d'histoire des sciences - Edition Bordas - 1989.

GUEDJ D. - *Le théorème du Perroquet* - Edition Seuil - 1998.

GUILLEN M. - *Invitation aux mathématiques - Des ponts vers l'infini* - Edition Albin Michel - 1992.

KLINE M. - *Mathématiques : la fin de la certitude* - Edition C. Bourgeois - 1989.

POINCARE H. - *La science et l'hypothèse* - Edition Champs Flammarion - 1968.

POINCARE H. - *La valeur de la science* **-** Edition Flammarion - 1970.

REVUZ A. - *Est-il impossible d'enseigner les mathématiques ?* - Edition PUF. 1980.

RITTER J.- *Chacun sa vérité* in Eléments d'histoire des sciences dirigé par M. Serres - Edition Bordas - 1989.

L'épistémologie

BACHELARD G. - *La philosophie du non* - Edition PUF (4ième) - Collection Quadrige -1994.

BACHELARD G - *La formation de l'esprit scientifique* - Edition Vrin - 1938 .

CAUMEIL J.G. *Contribution à une épistémologie de l'éducat*ion *physique scolaire - Du savoir de l'activité motrice aux éléments d'une pédagogie du sens.* Thèse de doctorat en Sciences de l'Education. Lyon II. 2000

CLERO J. P. - *Epistémologie des mathématiques* - Edition Nathan - 1990.

DESAUTELS J. et LAROCHELLE M. - *Autour de l'idée de science* - Edition De Boeck Université. 1992.

DESCARTES R. - *Règles pour la direction de l'esprit IV* - La Pléiade - in épistémologie des mathématiques de J. P. Cléro. 1990.

DEVELAY M. - *Propos sur les sciences de l'éducation - Réflexions épistémologiques* - Edition ESF - 2001.

DEVELAY M. - *N'y a - t- il pas mieux à faire que de vouloir prouver* ? in La Recherche en Education. Vers une nouvelle alliance. La démarche de preuve en dix questions - Edition ESF- 1998.

FOUREZ G. - *La construction des sciences* - Edition De Boeck Université - 1988.

JOSHUA S. - *L'année de la recherche en sciences de l'éducation* - Edition PUF. 1998.

GUICHARD J. et BARBIN E. - *La démonstration mathématiques dans l'histoire* - Actes du 7ième colloque inter IREM - Epistémologie et histoire des mathématiques - 1989.

JACOB P. - (sous la direction de) - *L'âge de la science - Lectures philosophiques - Epistémologie* - Edition Odile Jacob - 1989.

KHUN T. - *La structure des révolutions scientifiques* - Edition Flammarion - 1970 - (nouvelle édition augmentée et revue par l'auteur).

LATOUR B. - *La science en action* - Edition Gallimard - 1989.

MORIN E. - *Science avec conscience* - Edition Points - 1982.

POPPER K. - *Conjectures et réfutations : la croissance du savoir scientifique* - Edition Payot - 1985.

POPPER K. - *La quête inachevée* - Edition Calmann Lévy - 1986.

PRIGOGINE I. - *La fin de la certitude* - Edition Odile Jacob - 1996.

ROUCHE N. - *Amener à l'évidence ou contrôler des implications ?* - in *La démonstration mathématique dans l'histoire* - Actes du 7ième colloque inter IREM - Epistémologie et histoire des mathématiques - Edition IREM de Besançon et IREM de Lyon - Besançon 12 et 13 mai 1989.

En didactique des mathématiques (et des sciences empirico formelles)

ARSAC G. - *Recherches en didactique des mathématiques* - Volume 9/3. Edition La pensée sauvage . 1990.

BAILLEUL M. - *Recherche en didactique des mathématiques* - Volume 15/2. Edition La pensée sauvage .1995.

BALACHEFF N. - *Initiation au raisonnement déductif* - Edition PUF - 1992.

BROUSSEAU G. - *Glossaire de didactique* - Inédit transmis à la 6ième école d'été de didactique des mathématiques.

BROUSSEAU G. - *Recherches en didactique des mathématiques*. Volume 7/2. Edition La pensée sauvage. 1986

BROUSSEAU G. et ANTIBI A. - *Recherches en didactique des mathématiques*. Volume 20/1. La pensée sauvage. 2000.

CHARLOT B . - *Du rapport au savoir - Eléments pour une théorie* - Edition Economica - 1997.

CHARLOT B . - *Les Jeunes et le Savoir* - Perspectives internationales **-** Edition Economica. Collection Anthropos. 2001.

CHARNAY R. - *Mathématiques et mathématiques scolaires* - in - Savoirs scolaires et didactiques des disciplines - Edition ESF - 1995.

CHEVALLARD Y. - *La transposition didactique* - *Du savoir savant au savoir enseigné* - Edition la Pensée sauvage - 1991.

CHEVALLARD Y. - *Recherches en didactique des mathématiques* **-** Volume 19/2.

Edition La pensée sauvage .1999.

DEVELAY M. - *De l'apprentissage à l'enseignement* - Edition ESF (3ième) - 1993.

DEVELAY M. - *Savoirs scolaires et didactiques des disciplines* - Edition ESF - 1995.

DEVELAY M. - *Apprentissage et socialisation ; le rôle de la didactique* - in Vers une socialisation démocratique - Cerfee n° 15 .Université Paul Valéry. Montpellier III. 1998.

DOUADY R. *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques, une réalisation de tout le cursus primaire*. Thèse de doctorat d'Etat. Université Paris VII. 1984

GERARD C. - *Au bonheur des maths - De la résolution à la construction de problème* - Edition L'Harmattan - 1999.

JOANNERT - VAN DER BORGHT C.- *Créer des conditions d'apprentissage - Un cadre de référence socio - constructiviste pour une formation didactique des enseignants* - Edition de Boeck Université - 1999.

JOSHUA S. et DUPIN J.J. - *Introduction à la didactique des mathématiques et des sciences* - Edition PUF - 1993.

LEGRAND M. - *Recherche en didactique des mathématiques* - Volume 16/2 - Edition La pensée Sauvage - 1996.

MARGOLINAS C. - *Le point de vue de la validation : essai de synthèse et d'analyse en didactique des mathématiques* **-**Thèse de doctorat. Université J. Fourier. Grenoble 1.1989.

MARGOLINAS C. - *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*Edition. La Pensée sauvage - 1993.

POIRIER - PROULX L. - *La résolution de problème en enseignement . Cadre référentiel et outils de formation* - Edition De Boeck Université - 1999.

PORTUGAIS J. *Didactique des mathématiques et formation des enseignants* - Edition Peter Lang - 1995.

RAISKY C. et CAILLOT M. - *Au delà des didactiques le didactique . Débats autour des concepts fédérateurs* - Edition De Boeck Université - 1996.

ROUCHIER A. - *Recherches en didactique des mathématiques* - Edition La pensée sauvage . Volume 16/2. 1996.

VERGNAUD G. - *Recherches en didactique des mathématiques* - Volume 4/1. 1983. Edition La pensée sauvage.

En pédagogie.

AUMONT B. et MESNIER P. M. - *L'acte d'apprendre* - Thèse de doctorat .Paris V 1991 Edition PUF - 1992.

BAUTIER E. et ROCHEX J.Y. - *L'expérience scolaire des nouveaux lycéens* - Démocratisation ou massification - Edition Armand Colin - 1998.

BEILLEROT J. - BLANCHARD - LAVILLE C.- MOSCONI N. - *Pour une clinique du* *rapport au savoir* - Edition L'Harmattan - 1996.

DELANOE N. - *La faute à Voltaire* - Edition du Seuil - 1972.

DELORME C. - *De l'animation pédagogique à la recherche - action - Perspectives pour l'innovation scolaire* - Thèse de doctorat - Edition Chronique sociale - 1982.

DEVELAY M. - *Peut - on former les enseignants* ? Edition ESF (2ième tirage) - 1994.

GILLET P. - *Pour une pédagogique ou l'enseignant praticien* - Edition PUF - 1987.

HAMELINE D. - *Courants et contre - courants de la pédagogie contemporaine* - Edition ESF - 2000.

LEIF J. - *Qu'est-ce-que la rénovation pédagogique* ? Edition Nathan - 1978.

PEREIRA J. - *Des critiques des élèves sur les savoirs scolaires à une réflexion pédagogique interdisciplinaire* - Thèse N. R. - Université de Nantes - 1997.

PERROT G. et RAGOT T. - *En mathématiques peut mieux faire* - INRP. Collection rencontres pédagogiques - recherches / pratiques 1986.

PIAGET J. - *Le structuralisme* **-** Edition PUF . 1968.

PIAGET J. - *Le jugement et le raisonnement chez l'enfant* - Edition Delachaux et Nieslé - 1978.

REBOUL O. - *Qu'est-ce qu'apprendre ?* **-** Edition PUF - 7ième édition - 1997.

SCHNEUWLY B. et BRONCKART J.P. (Sous la direction de) - *Vygotzky aujourd'hui*Textes de base en psychologie - Edition Delachaux et Niestlé - 1985.

TOZZI M. - *Vers une socialisation démocratique* - Cerfee n° 15 .Université Paul Valéry. Montpellier III. 1998.

TRABAL P. - *La violence de l'enseignement des mathématiques* - Edition L'Harmattan - 1997.

ZAKHARTCHOUK J.M. - *Des contenus qui socialisent ?* in Vers une socialisation démocratique - Cerfee n° 15 .Université Paul Valéry. Montpellier III. 1998

En philosophie.

ALBERONI F. - *La morale* - Edition Plon - 1996 (pour la traduction française).

BOUDON R. - *Le sens des valeurs* - Edition PUF - Collection Quadrige - 1999.

BRUNER J. - *L'éducation entrée dans la culture* - Edition Retz - 1996.

CASTORIADIS C. - *L'institution imaginaire de la société* - Edition du Seuil - 1975.

CUVILLIER A. - *Manuel de philosophie - Logique - Morale* - Tome II. Edition A. Colin. 1937.

FABRE M. - *Situations problèmes et savoir scolaire* - Edition PUF - 1999.

GRANIER J. - *Penser la praxis* **-** Edition PUF - 1980.

GRANIER J. - *Le problème de la vérité dans la philosophie de Nietzsche* - Edition Seuil - 1966.

GUITON J - BOGDANOV G. - BOGDANOV I. - *Dieu et la science - Vers le méta* *réalisme.* Edition Grasset. 1991

HUSSERL E. - *Idées directrices pour une phénoménologie* - Edition Gallimard - 1950-1995.

IMBERT F. - *L'impossible métier de pédagogue* - Edition ESF - 2000.

JASPERS K. - *Introduction à la philosophie* - Edition Plon - 1950.

KANT E. - *Critique de la raison pure* - Edition Flammarion - 1987.

KAPLAN F. - *La vérité - Le dogmatisme et le scepticisme* - Edition Armand Colin - 1998.

KERLAN A. - *La science n'éduquera pas - Comte, Durkheim, le modèle introuvable* - Edition Peter Lang - 1998.

LEIF J. - *Philosophie de l'éducation - Inspirations et tendances nouvelles* - Edition Delagrave - 1967 .

LEVINAS E. - *Autrement qu'être ou au-delà de l'essence* - Edition Martinus Nijhoff - 1978.

MORIN E. - *La tête bien faite* - Edition Seuil - 1999.

PASCAL - *Pensées* - Edition du Seuil - 19

REBOUL O. - *Les valeurs de l'éducation* - Edition PUF - 1992.

RUSS J. - *La marche des idées contemporaines* - Edition Armand Colin - 1994.

SERRES M. - *Le Tiers-Instruit* **-** Edition Gallimard. 1991.

SCHLANGER J. - *Une théorie du savoir* - Edition Vrin - 1978.

WITTGENSTEIN L.- *Tractatus logico-philosophicus* suivi de *investigations philosophiques* -Edition Gallimard - 1961.

En méthodologie et en l'histoire de l'enseignement.

ARON R. - *Les étapes de la pensée sociologique* - Edition Gallimard - 1967.

DEVELAY M. KERLAN A. LEGRAND L. FAVEY E. - *Quelle école voulons - nous - Dialogue avec la Ligue de l'enseignement* **.** Edition ESF. 2001

HUBERMAN A. M. et MILES M. B. - *Analyse des données qualitatives - Recueil de nouvelles méthodes* - Edition De Boeck Université . Méthode de la recherche - 1991.

LE MOIGNE J.L. - *La modélisation des systèmes complexes* - Edition Dunod - 1990.

MIALARET G. - *L'année de la recherche en sciences de l'éducation* - Edition PUF. 1998

MORIN E. - *La méthode 3* - Edition Seuil - 1986.

PROST A. - *Education, société et politiques. Une histoire de l'enseignement de 1945 à nos jours* - Edition Seuil - 1997.

SERRES M. - *Eléments d'histoire des sciences* - dirigé par M. Serres - Edition Bordas - 1989.

VAN DER MAREN J.M. - *Méthodes de recherche pour l'éducation* - Edition De Boeck

Université - (2ième) - 1996.

VAN DER MAREN J.M. - *La recherche appliquée en pédagogie. Des modèles pour l'enseignement* - Edition De Boeck Université - 1999.

REVUES - BULLETINS - RAPPORTS.

Bulletins de l'APMEP

n° 397 - 1995 - *Du savoir à l'élève ou de l'élève au savoir - Une question de sens* - N. Rouche.

n° 415 - 1998 - *Point de vue sur l'enseignement des mathématiques* - G. Kuntz.

n° 423 - 1999 - *Les mathématiques ou la démocratie* - C. Hannaford.

Cahiers pédagogiques

n° 299 - 1991

- *Nouveaux postulats pédagogiques Attention dangers !* - R. Barra et E. Brauns

Esprit

n° 71 - 1991 - *Education et société* - H. Atlan

Le Monde diplomatique

Septembre 2000

- *Contre le conformisme* - C. Castoriadis

- *Pour un individu autonome* - C. Castoriadis

Magazine littéraire

n° 239 - 240 - 1997 - *Le temps des ruptures* - G. Balandier -

n° 279 - 1990 - *Eloge de la pensée faible* - G. Vattimo.

Petit X

n° 42 - 1995-1996 - *Les outils sémiotiques du travail mathématique* - Y. Chevallard.

n° 47- 1997-1998 - *Les limites d'un enseignement déductif de la géométrie* - G. Arsac.

Pour la Science

Trimestriel Août - Novembre 2000

- *Les génies de la science - Poincaré philosophe et mathématicien.*

Pratiques Math. CEPEC

n° 30 p.27 à 32 : *Logique assurément, élémentaire pas si sûr*...F. De Verclos- Mars 1999

n° 30 p. 13 à 26 *Musimatique* G. Chollet Mars 1999

n° 31 p.18 à 20 : *La redécouverte de la pyramide de Khéops* Chollet G. Juin 1999.

Numéro spécial : situations problèmes

Projet de recherche INRP 2000 / 2003

projet de recherche n° 2

- Département Didactique des disciplines - *Argumentation et régimes de vérité des savoirs scolaires.*

Publication de l'APMEP

n° 96 - *Fondements de l'évaluation en mathématiques.*

Rapport Lecourt

1999

-Ministère de l'éducation nationale, de la recherche et de la technologie - L'enseignement de la philosophie des sciences .

Rapport pour l'organisation des nations unies pour l'éducation, la science et la culture.

11/09/2000 - *Les sept savoirs nécessaires à l'éducation du futur* - E. Morin

Repère IREM

n° 20 - 1995

-*Mathématiques : mythe ou réalité - Un point de vue sur l'enseignement des mathématiques*. M. Legrand.

Revue de Métaphysique et de morale

1968 - *La crise de l'humanité européenne et la philosophie* E. Husserl

Sciences humaines

Septembre 2000 - Hors série - 1900 - 2000 - *Un siècle de sciences humaines.*

12/2000 01et 02 2001- Hors série réalisé avec le département des sciences de l'homme et de la société du CNRS - *Histoire et philosophie des sciences.*

PROGRAMMES

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE.

Programmes : 6$^{\text{ième}}$; 5$^{\text{ième}}$; 4$^{\text{ième}}$; 3$^{\text{ième}}$.

Vers le nouveau collège - Objectifs généraux de mathématiques - Ministère de l'Education Nationale, de l'enseignement Supérieur et de la Recherche . décembre 1995.

Programmes du cycle central : Livret 1- 1997

Accompagnement des programmes de 3$^{\text{ième}}$: Livret 3 - 1999

index des auteurs.

Annexes

Les annexes n'ont pas été communiquées par l'auteur.