CHAPITRE 10

RESOLUTION DE PROBLEMES

CHAPITRE X : RESOLUTION DE PROBLEMES

I - INTRODUCTION

Nous annoncions, en première approximation, l'hypothèse suivante que nous n'avons pas encore confrontée aux faits dans ce travail :

"Plus un professeur se centre sur ses élèves de manière non-directive et plus ses élèves obtiennent de bons résultats scolaires aux niveaux 4, 5 et 6 de la taxonomie de Bloom"

Des auteurs comme Aspy et Roebuck[1] ou comme Dupont (P.)[2] utilisant des enregistrements au magnétophone des discours maître-élèves ont montré, en analysant ces discours à l'aide de la taxonomie de Bloom que les maîtres suscitaient surtout de la part de leurs élèves des réponses qui pouvaient être répertoriées comme des "rappels de parcelles spécifiques d'informations", et qui se situaient donc au niveau 1 de la taxonomie. Cependant, les maîtres davantage non-directifs suscitaient plus que les autres des interventions d'élèves se situant à des niveaux plus élevés.

---

(1) Cf chapitre IV

(2) DUPONT (P.) : La dynamique de la classe - P.U.F. - 1982 - p. 126-138

Ce résultat expérimental n'est pas surprenant, car rappelons-le être non-directif c'est avoir une confiance fondamentale dans le désir et les capacités d'apprendre des élèves et des étudiants : c'est par là même, faire confiance en leur capacité de "traiter" le réel qui les entoure(1), d'analyser celui-ci, de produire un ordre qui leur est propre, d'évaluer les productions des autres et surtout les leurs. Cette confiance peut se traduire concrètement par le fait que le maître propose à ses élèves des stratégies "ouvertes" où ceux-ci auront une liberté de pensées, d'actions et de productions. A l'opposé le maître directif, qui ne fait pas confiance aux capacités de traitement du réel de ses élèves, va se substituer à ceux-ci pour leur montrer ce qu'il convient de faire, ce qu'il convient de produire, ce qu'il convient de penser.

Analyse, production d'ordre, évaluation sont bien des activités que l'on peut associer aux niveaux 4 (analyse), 5 (synthèse) et 6 (évaluation) de Bloom, une synthèse pouvant être considérée comme la mise en ordre d'un ensemble d'informations.

Pour confronter notre hypothèse de travail à des données issues de notre terrain expérimental, il nous a semblé que le domaine de la "résolution de problèmes" pouvait se prêter à une exploitation intéressante car il peut susciter ou non selon la façon dont il est exploité en classe des activités de la part des apprenants se situant aux niveaux de complexité cognitive qui nous intéresse ici. Par ailleurs une référence aux textes officiels(2) nous apprend que l'entraînement à la résolution de problèmes fait bien partie du rôle de l'enseignant de mathématiques :

"*La pratique fondamentale sur quoi repose pour l'élève l'entraînement au travail personnel, est celle des problèmes : il ne faut pas craindre d'en poser de peu formalisée et d'énoncés concis*".

---

(1) Les ressources diverses fournies par l'enseignant font partie de ce réel

(2) B.O.E.N. n° Spécial 5-3-81 - p. 60

La résolution de problèmes peu formalisés, d'énoncés concis fait partie, et ce explicitement, des objectifs d'apprentissages de la classe de seconde. C'est un objectif de cette nature que nous avons retenu pour construire les épreuves que nous allons présenter ici .

Le champ des travaux, des recherches portant sur la "Résolution de problèmes" est extrêmement vaste et montre l'extrême variété de situations que l'on peut qualifier de problématique : il nous a semblé pertinent d'essayer de situer les problèmes que nous allons utiliser ici dans un champ plus vaste de situations pouvant faire l'objet d'un traitement relevant de la résolution de problèmes.

Par ailleurs, "la résolution de problèmes" est un champ qui est exploré de manière expérimentale par les chercheurs, actuellement surtout à l'aide de méthodes cliniques[1] qui ne pouvaient convenir ici. Aussi avons-nous eu recours à un questionnaire de forme ouverte et nous expliquerons les critères qui nous ont servi à son élaboration : celui-ci nous permet d'obtenir un matériel riche en ce qui concerne la variété des processus de résolution mis en oeuvre par les élèves mais qui se prête plus difficilement à une étude quantitative. C'est cette difficulté qui justifie, dans notre travail, l'utime place que nous réservons à ce domaine important de la résolution de problèmes.

----

(1) Observations directes selon diverses modalités, de personnes, qui résolvent des problèmes.

II - PROBLEMES ET RESOLUTION DE PROBLEMES

A - Généralités

Un survol de la littérature abordant l'analyse des comportements de résolutions de problèmes (Oléron (1963) : Boirel (1966) , Goguelin (1969) ; D'hainault (1982) ; G Karnas (1967) ; Guilford (1967) ; Gagné (1965)) , semble à la fois indiquer une parenté entre les recherches exposées et en même temps une disparité assez grande.

Les exposés(1) faits par différents auteurs à la XXVIIIème rencontre organisées par la commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques montrent également que même dans le champ restreint de l'enseignement des mathématiques, cette notion de problème reste complexe et peut faire l'objet de multiples points de vue et de multiples traitements. C'est ainsi que G. Glæser déclare

"Il règne dans l'immense littérature consacrée à la question une confusion fondamentale. La grande masse des auteurs n'ont pas saisi la distinction entre l'exercice didactique et le problème, ce qui, à mon avis, enlève beaucoup de valeurs à leurs travaux..."

Par contre, il semble que tous les auteurs reconnaissent à la résolution des problèmes une place majeure dans l'enseignement des mathématiques.

----

(1) Comptes rendus de la XXVIIIème rencontre organisée par la CIEMEM - Louvain La Neuve - 1976

(2) opus cité : Heuristique générale - difficulté d'un problème - p. 35

Comme le dit G. Brousseau [1]

"Un élève ne fait pas de mathématiques s'il ne se pose et ne résoud pas de problèmes. Tout le monde est d'accord la dessus. Les difficultés commencent lorsqu'il s'agit de savoir quels problèmes il doit se poser, qui les pose et comment".

Cette même interrogation se retrouve par exemple dans ces propros tenus par A. Z. Krygowska[2]

"Qu'est ce qu'un problème mathématique ? Les définitions données ne sont pas satisfaisantes et en fait la question est mal posée : ce que nous devons discuter c 'est : "Qu'est ce qu'un bon problème mathématique ? Bon, de points de vues différents, selon des critères différents..."

Ces quelques remarques suffisent nous semble-t-il, à suggérer que la notion de problème est importante et complexe. Pour traiter "ce problème des problèmes", il serait peut-être intéressant de disposer de "typologies de problèmes" construites à partir de critères différents et permettant d'opérer des classifications diverses de problèmes. La multiplicité des critères possibles, des regards que l'on peut porter sur la notion de problème nous semble rendre difficile l'émergence d'une typologie unique qui puisse satisfaire tous les utilisateurs, enseignants et chercheurs. L. d'Hainault[3] est à notre connaissance un des rares auteurs ayant tenté ainsi d'élaborer une typologie qui se veut exhaustive. Notre intention dans ce qui suit n'est pas de proposer une typologie des problèmes qui pourrait être opératoire pour des enseignants de mathématiques, mais plutôt quelques reflexions, quelques critères qui pourraient être utiles pour l'élaboration d'une telle typologie.

----

(1) opus cité : Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques - p.101

(2) A.Z. Krygowska : Le problème des problèmes - in Comptes-Rendus de la XXVIIIème rencontre organisée par la CIEAEM - 1976 - Louvain La Neuve - p. 29

3) L. d'Hainault : Des fins aux objectifs de l'éducation - F. Nathan - 1980) p. 283-380

B - <u>Vers une typologie des "problèmes"</u>

a) La typologie de d'Hainault[1] :

Le modèle proposé par L. D'Hainault est complexe et on ne saurait le présenter ici dans sa totalité. Il est cependant intéressant de voir comment celui-ci esquisse en première approximation une typologie des problèmes : Cet auteur suppose le passage d'une situation initiale non satisfaisante, à une situation finale satisfaisante et distingue trois facteurs :

1 - La classe de la situation initiale
2 - Le processus de résolution
3 - La classe de la situation finale

Il y a dit-il, résolution de problème quand au moins un de ces trois facteurs est nouveau pour celui qui résoud le problème. C'est ainsi que le processus de résolution peut être familier (ce peut-être l'application d'une combinaison connue de principes familiers) mais la situation initiale être tout à fait nouvelle : ce qui fera problème pour le sujet, c'est que cette situation nouvelle n'appellera pas d'emblée le processus de résolution.

Il est intéressant de noter que L. d'Hainault ne prête pas un caractère dichotomique à la nouveauté (ou à la familiarité) d'un des trois facteurs. C'est ainsi qu'il écrit :

"*Le critère opérationnel de niveau du problème, la familiarité, n'est pas dichotomique car contrairement à ce qu'on pourrait penser au premier abord, ce n'est pas une question de tout ou rien : entre le processus ou la situation de type bien connu, d'une part, et le processus ou la situation de type entièrement inconnu d'autre part, on peut imaginer différents degrés*

----

(1) L. d'Hainault : <u>De la fin aux objectifs de l'éducation</u> - F. Nathan - 1980

et même un continuum dans le niveau de la familiarité".

Pour des raisons pratiques, cet auteur se contente de distinguer trois niveaux qui sont "le familier, le rencontré, et le nouveau". C'est là une distinction qui peut se faire en situation scolaire en fonction des apprentissages antérieurs de l'élève et le caractère "rencontré" nous semble être une dimension courante.

Le modèle de L. d'Hainault nous semble cependant réducteur en ce sens qu'il peut masquer certaines activités qui relèvent de la résolution de problèmes : c'est ainsi qu'une personne peut trouver qu'une situation est problématique(1) parce qu'elle ressent celle-ci comme insatisfaisante, sans pour autant savoir ce qui pourrait être pour elle une situation satisfaisante : la fixation d'objectifs, de buts, la définition de situations pouvant être considérées comme finales fait alors partie intégrante du processus de résolution du problème. C'est par exemple un point de vue analogue que l'on trouve exprimé par Dewey dès 1910 lorsque celui-ci propose les étapes suivantes pour décrire la résolution d'un problème :

- une difficulté est ressentie
- des solutions possibles sont envisagées
- les conséquences des solutions sont évaluées
- une solution est acceptée

Certains pourraient nous faire remarquer que nous nous éloignons ici de la résolution de problèmes que l'on pourrait rencontrer dans une classe de mathématiques; l'exemple suivant nous prouve le contraire : C'est le cas d'élèves de seconde qui se sont posés en accord avec leurs enseignants de mathématiques, le problème "du travail et des loisirs des

----

(1) On pourrait distinguer situation problématique et problème : la première pourrait se définir comme une situation insatisfaisante, le second comme un couple de situations fermé d'une situation initiale insatisfaisante et d'une situation finale repérée comme satisfaisante.

camarades de leurs lycées"[1]. Poser de telle sorte, le problème implique pour être traité que les élèves se fixent des objectifs : que veulent-ils savoir ? De façon concrète, ce problème a nécessité la construction d'un questionnaire, sa passation et son exploitation. Bien qu'inhabituel ce genre de situations problèmatiques pourraient être davantage développer dans l'enseignement et faire par exemple, l'objet de rapports synthétiques de la part des apprenants.

b) Un critère de classification des problèmes "l'ouverture"

Nous porterons ici essentiellement notre attention sur la situation initiale que nous pouvons définir, pour nous référer à un contexte de situation d'apprentissage, comme celle dans laquelle se trouve placé l'élève et qui est censé[2] déclencher son activité. Nous supposerons bien sûr, comme le fait Oléron[3] que

"le répertoire de réponses immédiatement disponibles chez le sujet ne permet pas à celui-ci de fournir une réponses appropriée à la situation".

Il nous parait intéressant ici de nous demander en quoi nous pourrions qualifier une situation problèmatique de plus ou moins ouverte pour celui qui tend de la résoudre. L'ouverture pourrait être considérer comme un facteur tendant à décrire la liberté de pensées, d'actions et de productions laissée à celui qui résoud le problème. On peut utiliser la

---

(1) Cet exemple est décrit dans "Thèmes en seconde" - collection Inter IREM publié par l'ensemble des IREM - 1981 - p. 194-205
Les crues de la Loire en 1980 dans la région du Puy ont fourni l'occasion d'une situation problèmatique analogue.
(2) Il se peut qu'une situation reste étrangère à l'élève, que celui-ci ne voit pas en quoi elle pourrait constituer un problème pour lui
(3) Oléron : Les activités intellectuelles - in Fraisse et Piaget - Traité de Psychologie expérimentale - Tome VII - P.U.F. - p. 28

connotation "topologique" du terme ouverture avec l'image suivante qui peut représenter une situation analogique : Une personne placée géographiquement en un point donné doit quitter le lieu où elle se trouve, se déplacer : la situation dans laquelle se trouve cette personne sera plus ou moins ouverte, selon la multiplicité des buts où elle peut envisager de se rendre, et selon la connaissance qu'elle a ou non de parcours qu'elle pourrait effectuer pour se rapprocher du but choisi. Il se peut qu'un seul parcours lui permette d'atteindre son but, mais c'est la connaissance à priori qu'à cette personne des parcours possibles qui détermine l'ouverture ou la fermeture de la situation(1). Moins elle a d'informations sur les "bons parcours", et plus elle pourra essayer de parcours pour tenter d'atteindre son but.

Pour revenir aux situations initiales qui pourraient être proposées par des maîtres aux élèves, nous pouvons à leur propos nous poser les questions suivantes :

- La situation initiale implique-t-elle la détermination d'objectifs à atteindre ou ceux-ci sont-ils contenus dans ce qui constitue la situation initiale ?

L'exemple, cité ci-dessus, de l'enquête réalisée par des élèves sur le travail et les loisirs de leurs camarades de lycées constitue une situation qui implique que les élèves se fixent des objectifs. Par contre, maints problèmes mathématiques posés sous la forme "Etant donné.... montrer que...." contiennent dans leur formulation l'objectif à atteindre qui est la découverte d'une démonstration permettant de lier hypothèses et conclusions.

On peut considérer, c'est un regard possible parmi d'autres, la résolution de problèmes en situation d'apprentissage comme la simulation

---

(1) Ainsi un problème en mathématiques est qualifié d'ouvert par la communauté des mathématiciens tant qu'il n'a pas été résolu.

de ce que pourrait avoir à faire les apprenants dans un autre contexte comme celui de la vie professionnelle, ou de la vie courante; A ce titre, il nous semble qu'il est rare qu'un problème, dans ces contextes, se pose avec des objectifs précis à atteindre, et qu'une phase nécessaire de la résolution du problème est la détermination, en groupe ou individuellement, d'objectifs. Cette phase, nous semble-t-il à une place souvent trop minimisée dans l'enseignement et il serait bon de temps en temps de proposer aux élèves des situations qui impliquent sa mise en oeuvre.

- Le but étant fixé, la situation initiale contient-elle ou non des indications sur un processus de résolution ?

La situation initiale peut contenir des indications sur des activités que pourrait faire l'élève, sur des formulations à adopter, sur des étapes à franchir, sur des validations à opérer...
Voici, à titre d'exemple, à partir d'un même thème problèmatique, trois façons différentes de présenter la situation initiale aux élèves

Partie commune aux trois situations	On dispose d'une plaque carrée en carton qui mesure 60 cm de côté et on veut réaliser à l'aide de celle-ci une boîte ouverte de la manière suivante : On découpe à l'aide d'une paire de ciseaux, aux quatre coins, des carrées égaux (fig n° 1) puis on opère des pliages selon les pointillés de la figure n° 2, de façon à obtenir une boîte sans couvercle.

fig n° 1

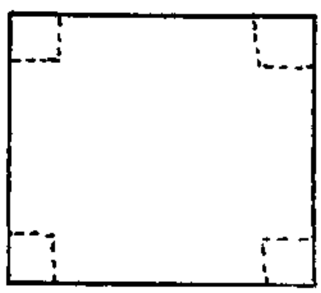
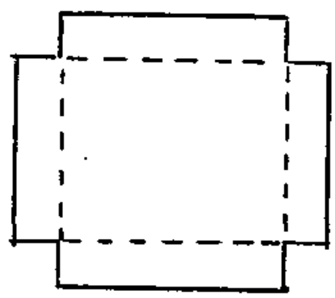


Fig n° 2



Première situation :

Comment faut-il choisir les carrés pour que la boîte obtenue ait le plus grand volume possible ?

Deuxième situation :

Soit x le coté du carré. Déterminer x pour que la boîte obtenue ait le plus grand volume possible ?

Troisième situation :

Soit x le côté du carré

1) Calculer le volume v(x) de cette boîte en fonction de x
2) Construire point par point la représentation graphique de la fonction qui à x associe v(x). On précisera son ensemble de définition.
3) Pour quelle valeur de x obtient-on la boîte de plus grand volume ?

Le fait d'introduire x, dans la deuxième situation donne une indication sur la façon de formuler le problème qui n'est pas contenue dans la première situation. La troisième situation donne à la fois davantage d'indications sur la formulation, (introduction de x et de v(x) et sur ce que l'élève doit faire (tracé de courbe).
Il y a progression de l'ouverture vers la fermeture : on pourrait encore imaginer des situations plus fermées (par exemple en indiquant que c'est pour x = 10 cm que l'on obtient le volume maximum).

Ces diverses façons de présenter le situation initiale influent sur les activités des élèves, comme nous le verrons par la suite.

Nous nous sommes centrés sur la "situation initiale" pour tenter de décrire "l'ouverture d'une situation problématique" mais ceci ne doit pas nous faire oublier qu'il n'y a véritablement de problème que pour celui qui tend à le résoudre, et que les caractéristiques de celui-ci sont à prendre en compte pour définir l'ouverture d'un problème. Comme le rappelle Oléron[1]

"Rien n'est plus inexact que de considérer que la résolution d'un problème est un processus totalement neuf, comme on a tendance à le faire parce qu'un problème est, par définition, une situation nouvelle et que la résolution implique une invention. L'observation, l'étude des tâtonnements montrent au contraire que le sujet met en oeuvre des procédés qu'il a déjà eu l'occasion de pratiquer dans des situations antérieures".

Cette remarque nous renvoie au continuum "familier, rencontré, nouveau," de D'Hainault. En toute rigueur, il conviendrait donc de parler d'ouverture d'une situation problématique pour un sujet donné (ou pour un groupe de sujets donnés).

Comme nous l'annoncions, notre intention n'était pas ici de présenter une typologie opérationnelle "des problèmes" mais une réflexion en faveur de typologies. Un caractère comme l'ouverture pourrait autoriser les maîtres à varier selon celui-ci, les types de problèmes qu'ils proposent à leurs élèves ; une autre typologie bâtie en fonction d'autres critères pourrait jouer le même rôle. En effet, il nous semble que les problèmes que l'on rencontre dans les manuels présentent peu de variété, et ce peu de variété est à l'origine de comportements comme ceux constaté en Pologne à l'école "normale supérieure de Krakov[2]"

"Several researches conducted by mathematics students in the higher school, in Krakov have schown that when facing a mathematical problem, a secondary school pupil usually begins by looking for analready known procedure or algorithm that might be suited for that problem. If he cannot find any one instantly, the pupils often refuses to solve the problem just saying "I cannot dot it". "

---

(1) In Fraisse et Piaget : <u>Traité de psychologie expérimentale</u> - Tome VII - p. 50

(2) M. CIOSEK : On strategies for solving mathematical problems - <u>XXVIIIème congrés de la CIEAEM</u> - p. 51

Les élèves polonais, en l'occurence, n'ont pas une attitude de résolution de problèmes dans la mesure où ils se contentent d'appliquer à la situation qui leur est présentée des principes connus sans chercher à combiner ceux-ci en vue de la découverte d'une solution. Utiliser des stratégies pédagogiques permettant aux élèves de se confronter avec des problèmes divers, nous semble pouvoir être la source chez les apprenants d'une variété de comportements nécessaires à la résolution de problèmes tels que ceux ci peuvent se poser dans des contextes hors-éducation, avec leurs variétés, leurs complexités. Développer des attitudes (1) chez les apprenants de résolution de problèmes, c'est activer des processus leur permettant de passer de situations insatisfaisantes à des situations plus satisfaisantes, c'est leur permettre d'exercer leur tendance à la conservation et à l'enrichissement, la tendance à l'actualisation, c'est activer le processus "apprendre".

C - Résolution de problèmes et processus de mathématisation

a) Etapes dans la résolution d'un problème

Nombreux sont les auteurs qui à la suite de Dewey (1910) décrivent le processus de résolution de problèmes comme formé de diverses étapes qui s'enchaînent les unes à la suite des autres (2). C'est ainsi que parmi les mathématiciens s'intéressant dans le champ de leurs activités à la résolution de problèmes, citons Polya et Glaeser :
Le premier distingue quatre phases : (3)

---

(1) Il n'y a pas d'aptitude générale qui correspondrait à la résolution de problèmes, mais des classes d'aptitudes correspondant à des classes de tâches à excécuter.

(2) cf par exemple, à ce sujet : GUIILFORD The Nature of Human Intelligence Mc Graw Hill - 1967 - p. 313

(3) POLYA (G.) : Comment poser et résoudre un problème - DUNOD - 1957

La compréhension, la conception d'un plan, l'exécution du plan, le retour en arrière sur la solution.

Le second(1), quant à lui, en propose cinq :

La préparation, le bricolage, l'incubation, l'inspiration, la vérification.

On peut cependant émettre deux critiques à ces présentations linéaires du processus de résolution d'un problème :

- La variété des problèmes et des composantes individuelles de chacun fait qu'il nous semble difficile de donner un schéma qui puisse être pertinent pour toutes les situations, qui puisse décrire de façon générale les comportements de résolution de problème. C'est ainsi qu'un problème peut nécessiter pour sa résolution la détermination l'objectifs, la recherche d'informations supplémentaires ; ce sont là des étapes qui n'apparaitront pas nécessairement dans un autre problème.

- La linéarité de présentation des phases nous semble également pouvoir faire l'objet de critique : il serait sûrement plus pertinent d'imaginer le processus de résolution d'un problème particulier comme pouvant être décrit par un organigramme complexe, avec des enchaînements linéaires, des boucles, des embranchements divers (2).

Nous nous intéresserons dans ce qui suit à des types de problèmes tels que :
- les objectifs à atteindre sont contenus dans la situation initiale
- le processus de résolution implique essentiellement l'utilisation de principes et de concepts mathématiques.

---

(1) GLAESER (G.) : Heuristique générale ; estimation de la difficulté d'un problème - in XXVIII compte -rendu de la CIEAEM - Louvain La Neuve - 1976 - p. 37

(2) GUILFORD propose ainsi un modèle complexe intégrant des sélections d'informations, des évaluations, des reconnaissances, des productions d'idées, des entrées et sorties de mémoires - cf The Nature of Human intelligence - Mac Graw Hill - 1967 - p. 315

Nous utiliserons, pour décrire le processus de résolution de ces problèmes un modèle proposé par G. BROUSSEAU (1)

b) Processus de mathématisation

Le modèle de cet auteur, que celui-ci désigne par le terme générique de "Processus de mathématisation" est interactionniste :

"Les relations de l'enfant, à un moment donné avec le monde qui l'entoure constituent une situation... mais une situation n'est pas statisque : elle évolue dans le temps par suite des échanges successifs d'informations et d'actions entre le sujet et le situation... au cours de ces échanges, l'enfant modifie son idée première de la situation créee et éprouve un comportement, un modèle mental... c'est un processus dialectique" (2)

Pour décrire ce processus, cet auteur distingue trois dialectiques entre des modèles correspondant à des structurations internes chez le sujet et la situation : Les dialectiques de l'action, de la formulation, et de la validation.

- dialectique de l'action *"En agissant l'enfant va améliorer ou dégrader sa position, il estimera s'être rapproché de son but ou s'en être éloigné, le modèle utilisé sera renforcé ou abandonné"* (3)

En particulier, c'est par son activité que le sujet recueillera des informations sur les éléments, sur les relations entre les éléments composant la situation ; c'est aussi par son activité qu'il pourra vérifier l'adéquation de modèles implicites ou explicites d'actions à la situation donnée.

---

(1) G. BROUSSEAU : Processus de mathématisation - IREM de Bordeaux - 1970

(2) idem p. 3

(3) idem p; 4

- <u>Dialectique de la formulation</u> *"Pour qu'apparaisse objectivement, dit Brousseau, ce que nous appelons de la mathématique, l'enfant doit exprimer, à propos d'une situation, des informations pertinentes dans un langage conventionnel dont il connait ou crée les règles : il ne suffit pas que l'enfant placé devant une situation ait l'envie et la possibilité de la modifier, il faut qu'il construise une description, une représentation un modèle explicite"* (1)

Ce qui est en jeu ici, c'est l'explicitation d'un modèle implicite d'action. Cette explicitation, se fait elle aussi progressivement, par ajustements successifs. La dialectique de la formulation peut avoir comme conséquence la construction de messages nouveaux à l'aide d'un répertoire et d'une syntaxe connus, ou la création d'un répertoire et d'une syntaxe nouveaux.

- <u>Dialectique de la validation</u> *"Au cours de la dialectique de la formulation, la construction des messages mathématiques s'accomplit suivant des règles qui sont encore implicites pour les deux interlocuteurs* (2).
Il s'agit maintenant d'expliciter ces règles, de préciser les conventions, de dire pourquoi telle écriture mathématique est correcte et pourquoi elle est pertinente" (3)

Il s'agit ici, pour celui qui produit un message et qui le considère comme adéquat avec ce qu'il veut signifier, de fournir une <u>explication</u> justifiant l'exactitude de celui-ci.

L'explication peut se définir comme le fait Balacheff (N.) par un discours visant à rendre intelligible le caractère de vérité, acquis pour

----

(1) op. cité p. 5

(2) L'auteur suppose ici la présence d'une seconde personne comme récepteur, la première qui résoud le problème étant l'émetteur.

(3) idem p. 9

le locuteur, d'une proposition ou d'un résultat(1). Ce discours formant l'explication va s'édifier lui aussi, en dialectique, par une série d'ajustements successifs.

Ces trois dialectiques qui servent à décrire une activité de résolution de problèmes(de types donnés) ne sont pas à considérer comme intervenant successivement, mais elles interréagissent les unes sur les autres : c'est ainsi que l'action peut être facilitée par une formulation correcte... Des conditions trop favorables à l'action rendent inutile une explication ... une tentative de constitution d'une explication peut déclencher des actions, des formulations....

c) Processus de mathématisation et taxonomie de Bloom

Nous nous sommes limité, ci-dessus, à des types de problèmes qui impliquent une activité de résolution qui peut être décrite à l'aide du "processus de mathématisation" de G. Brousseau. Par ailleurs, il n'y a problème pour un individu donné, que si sa structure cognitive ne lui permet pas d'assimiler de façon satisfaisante la situation problématique à une classe de situations connues. En ce sens, et en référence au contexte d'apprentissage, les items qui constituent les tests de connaissance que nous avons proposés aux élèves des classes étudiées ne constituent pas des problèmes(2). De façon plus générale, des objectifs pédagogiques se situant aux trois premiers

---

(1) BALACHEFF (N.) : Preuves et démonstrations en mathématiques au collège : "Recherches en didactique des mathématiques - Vol. 3 - n° 3 - 1982 - La Pensée Sauvage. Il convient en particulier de distinguer "explication" "preuve" et "démonstration". La logique d'une explication est interne au sujet, et peut être éloignée de la logique mathématique.

(2)C'est là une assertion élaborée en fonction du contexte d'apprentissage en fonction de ce que les élèves, dans celui-ci sont censés savoir faire. La réalité semble être différente : certains items pour des élèves donnés pouvaient pour ceux-ci être des problèmes.

niveaux de la taxonomie de Bloom, n'impliquent pas des activités que l'on peut qualifier de "résolution de problèmes".

Par contre, les processus mentaux apparaissant dans le processus de mathématisation nous semblent impliquer les opérations mentales associées aux niveaux 4, 5 et 6 de la taxonomie de Bloom(1). En effet, les dialectiques caractérisant le processus de mathématisation nous semble, toutes les trois, impliquer des activités relevant de l'analyse, de la synthèse et de l'évaluation :

- Analyse : c'est la recherche d'éléments, de relations entre les éléments de principe d'organisation, constituant la situation problématique telle qu'elle est perçue subjectivement par le sujet à un instant donné.
  Ce n'est pas la situation problématique définie objectivement qui est objet d'analyse, c'est l'organisation que le sujet construit à propos de celles-ci qui en est l'objet : à ce titre, une assertion produite par le sujet peut être objet d'analyse.

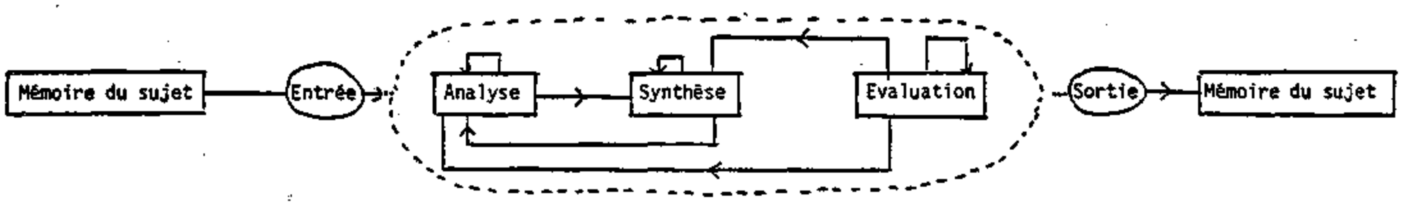
- Synthèse : C'est la production d'ordre entre les divers éléments livrés par Analyse ; c'est dit Bloom, l'opération qui consiste à disposer et combiner les fragments, parties, éléments de façon à former un plan ou structure que l'on ne distinguait pas auparavant.
  Les trois dialectiques visent à produire un ordre. Le bon ordre, celui qui sera retenu, n'est pas de manière générale, le seul ordre qui sera produit par le sujet au cours de la résolution du problème. Maintes organisations produites seront abandonnées après évaluation.

---

(1) Il est certes étonnant qu'une taxonomie comme celle de Bloom, ne contienne pas de catégorie "Résolution de problèmes". Des taxonomies comme celle de Wilson, de Gras, qui sont assez proches de celle de Bloom, et qui s'appliquent plus particulièrement aux mathématiques, réservent à la résolution de problèmes, les catégories hiérarchiquement les plus élevées.

- <u>Evaluation</u> : C'est dit Bloom, la formulation de jugements sur la valeur du matériel et des méthodes utilisés. Dans l'activité de résolution de problèmes, il va y avoir des évaluations fréquentes, pour vérifier l'adéquation, entre le modèle implicite que se fait le sujet de la réalité, et la réalité, l'adéquation entre le modèle implicite et son explicitation et enfin pour vérifier la valeur des explications qui sont produites.

L'activité de résolution de problèmes est composée, à notre avis, de micro-cycles que l'on peut schématiser comme suit.



Ce schéma s'applique aux trois dialectiques décrites par Brousseau mais aussi à l'intéraction entre ces trois dialectiques.

Nous introduisons dans ce schéma, la mémoire du sujet car c'est rappelons-le avec son capital intellectuel, cognitif que le sujet aborde la résolution du problème : la résolution de problèmes implique l'utilisation des processus mentaux des catégories 1, 2, et 3 de Bloom.
Par ailleurs le sujet peut stocker en mémoire des informations, des productions qu'il réutilisera éventuellement par la suite.

Après avoir repéré des éléments, extrait des informations de la situation perçue subjectivement à un instant donné (Analyse), le sujet peut produire un ordre, une organisation incluant ces éléments (synthèse) puis tester cette production, l'accepter ou la rejeter momentanément (Evaluation). Pour tester une production, le sujet peut avoir recours à une nouvelle analyse, faire appel à une autre production et il repasse ainsi de l'évaluation, à l'analyse ou à la synthèse.

Ces micro-cycles ne sont pas nécessairement conscients : en particulier par le jeu de l'évaluation, nombre de productions repérées comme insatisfaisantes, inexactes ne sont pas introduites en mémoire ou sont effacées de celles-ci. Comme l'avouait Faraday (1)

"Le public ne sait pas combien d'entre les pensées...qui ont traversé l'esprit d'un chercheur scientifique ont été étouffées dans le silence et le secret par sa propre critique sévère et par un examen qui s'est révélée défavorable".

Cette élimination, en conscience de productions mentales est source de difficultés pour la méthodologie de l'étude des activités de résolutions de problèmes : une part de ces activités n'est pas directement observable.

---

(1) cité par R. Boirel : Résolution de problèmes - Ed. Universitaires - p. 36

III - LES EPREUVES «RESOLUTION DE PROBLEMES»

A - Introduction

Nous avons soumis aux élèves composant notre population d'étude, deux épreuves que nous avons intitulées "Résolution de problèmes" : la première de celles-ci s'est déroulé en Septembre 1981 et la seconde en Mars 1982(1).

Comme nous l'avons dit précédemment, le champ de la résolution de problèmes est vaste et les épreuves que nous présentons ici ne peuvent prétendre qu'à une exploration très partielle de ce champ.

Pour construire ces epreuves, nous nous sommes référés aux instructions officielles introduisant les nouveaux programmes, qui stipulent qu'il ne faut pas hésiter à poser des problèmes peu formalisés et concis
Il convenait cependant que ces épreuves mettent en jeu de la part des élèves des activités qui ne l'éloignent pas trop de celle effectivement pratiquées par ceux-ci dans les classes de mathématiques; sans cela, il serait difficile d'attribuer spécifiquement d'éventuels effets d'apprentissage à l'enseignement reçu en mathématiques.
Par ailleurs, il convenait cependant que ces activités puissent traduire d'éventuelles variations des activités rendues possibles ou non par les maîtres, selon les attitudes de ceux-ci. C'est pour cela que nous avons choisi deux problèmes "non-formalisés", c'est-à-dire ne contenant pas dans leur description de formulations mathématiques, "concis" en ce sens que l'énoncé du problème, ne contient pas d'indications sur d'éventuelles étapes de résolution.

---

(1) Ce sont les enseignants qui ont fait passé ces épreuves.

Ces deux épreuves se présentent sous forme de questionnaires ouverts : les différentes parties le composant ont été choisies en référence au "Processus de mathématisation" de G. Brousseau et en référence aux niveaux taxonomiques de Bloom qui nous intéressent ici.

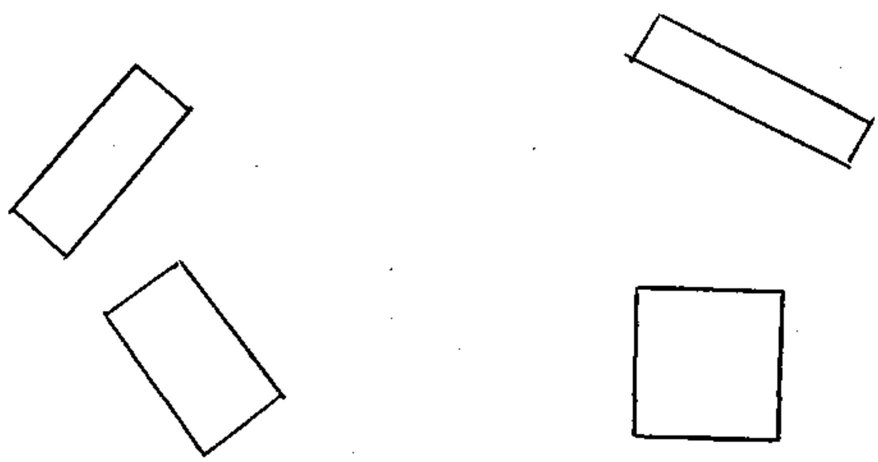
B - Présentation des épreuves

a) Les problèmes

- Problème posé en Septembre :

Un agriculteur dispose de 400 mètres de clôture. Il aimerait, avec celle-ci faire un enclos rectangulaire ou carré pour ses moutons dans un grand pré dont il est propriétaire.

Comment doit-il choisir les dimensions de cet enclos rectangulaire ou carré pour que sa surface soit la plus grande possible ?



En d'autres termes, comment choisir les dimensions (largeur, longueur) d'un rectangle (qui peut être carré) de telle sorte que sa surface soit la plus grande possible, sachant que son périmètre est constant et sa longueur de 400 mètres.

- Problème posé en Mars :

On dispose d'une plaque carrée en carton qui mesure 60 cm de côté et on veut réaliser à l'aide de celle-ci une boîte ouverte de la manière suivante :

On découpe à l'aide d'une paire deciseaux, aux quatre coins, des carrés égaux (fig n° 1) puis on opère des pliages selon les pointillés de la figure n° 2, de façon a obtenir une boîte sans couvercle.

Fig n° 1

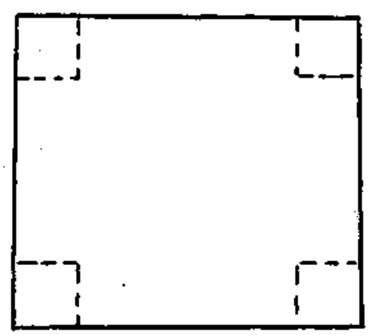
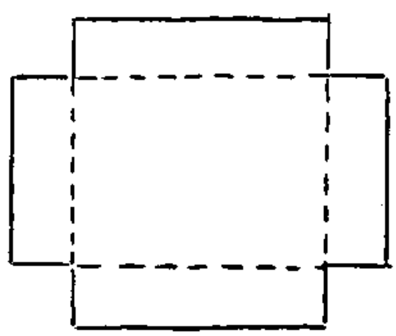


Fig n° 2



(On colle simplement les bords à l'aide de scotch).

Comment faut-il choisir les carrés pour que la boîte obtenue ait le plus grand volume possible ?

Commentaires :

Les énoncés de ces deux problèmes sont voisins :

. Tous deux se présentent avec des éléments concrets[1] : leurs résolutions impliquent une "formalisation", une mise en écriture de type mathématique.

---

(1) Il ne s'agit pas de problèmes se situant au sein d'une théorie mathématique, mais de pbs faisant intervenir des objets "concrets"

. Le but du problème est clairement défini, mais aucune indication n'est donnée concernant d'éventuelles étapes de résolution.

. Il s'agit de deux problèmes qui renvoient tous deux à une même partie du programme de seconde, celle qui concerne "le comportement global d'une fonction", et en particulier le sens de variation d'une fonction.

A titre indicatif, ce programme contient des thèmes dans lesquels on pourrait inscrire ces deux problèmes :

- Recherches de maxima, de minima, associées à des problèmes élémentaires d'optimisation.

- Taux de variation.

Notons que les élèves ne sont pas équipés techniquement, des outils classiques d'étude d'une fonction comme la dérivée par exemple ; le taux de variation indiqué en thème possible ne constitue pas non plus une partie obligatoire du programme de seconde.

Le premier problème impliquerait pour être résolu correctement un travail avec une fonction du second degré : les élèves au sortir de la classe de troisième sont habitués à travailler avec des fonctions du premier degré mais pas avec celles du second degré.

Le deuxième problème, impliquerait, quant à lui,, l'usage de fonctions du troisième degré : les élèves en seconde commencent simplement à travailler avec des fonctions du second degré.

Ces quelques remarques suggèrent que nous pouvons considérer ces deux problèmes, en nous référant à la typologie de d'Hainault comme formés :

- de situations initiales qui sans être tout à fait nouvelles pour les élèves, ne sont pas familières : on peut donc les qualifier de rencontrées. En particulier, la formulation en des termes simplement concrets de ces deux problèmes n'est pas courant : il suffit pour cela de se référer aux manuels de troisième et de seconde. Bien sûr, le caractère rencontré, n'a de sens qu'en référence au contexte d'apprentissage, et celui-ci peut être variable selon les élèves. Sur un continuum "familier-nouveau", on pourrait peut-être considérer le second problème comme plus familier que le premier, étant donné leur position respective dans le temps par rapport au contexte d'apprentissage.

- de buts : à qui on peut aussi, pour les mêmes raisons que ci-dessus, associer le caractère "rencontrés ". Les problèmes d'optimisation sans être complètement étrangers aux élèves ne sont pas cependant familiers (le but dans les deux cas est de trouver un maximum).

- le processus de résolution : En nous référant à une procédure de résolution qui pourrait être considérée comme correcte par un enseignant de seconde(1), nous pouvons associer au processus de résolution du premier problème le caractère "nouveau" et au second le caractère "rencontré".

b) Forme de la grille-réponse

- Présentation : chacune des épreuves proposées aux élèves était bien sûr individuelle ; les élèves avaient 1h30 pour tenter de résoudre le problème. La grille-réponse que nous leur avons proposée pour tenter de percevoir leurs façons de résoudre les problèmes, leurs démarches leur était ainsi présentée :

Nous allons vous proposer un problème de mathématiques à résoudre, mais ce qui nous intéresse ce n'est pas tant que vous trouviez la solution et sa démonstration, que les idées (mêmes farfelues) que vous suggère ce problème et les différentes actions que vous allez entreprendre ou auxquelles vous pourrez penser pour tenter de le résoudre. C'est ce qui vous explique que nous ne vous demandons pas de rédaction d'une solution comme vous avez pu le faire habituellement en mathématiques.

---

(1) Il y a là une difficulté pour utiliser les critères de d'Hainault : ceux-ci sont-ils à utiliser à priori, en prenant comme référence un produit attendre, ou à posteriori en étudiant les processus de résolution adoptés par les élèves. Nous avons ici adopté le premier point de vue .

Pour voir comment vous procédez pour tenter de résoudre ce problème, nous vous proposons une grille-réponse faite de plusieurs parties :

- Première partie : les calculs

Vous pouvez, pour vous faire une idée du problème, éventuellement, faire des calculs. Vous les indiquerez dans cette première partie.

- Deuxième partie : Représentations graphiques

Vous pouvez au cours de la résolution du problème, éventuellement, faire des dessins, utiliser des représentations graphiques, vous les indiquerez dans cette partie.

- Troisième partie : Formules mathématiques

Vous pouvez être amené à traduire certaines idées par des formules mathématiques, vous les mentionnerez dans cette partie.

- Quatrième partie : Hypothèses concernant la solution du problème

Vous pouvez penser, à divers moments que le problème a telle solution (sans nécessairement avoir de démonstration): vous indiquerez dans cette partie vos hypothèses.

- Cinquième partie : Démonstration

Vous aurez peut être, à certains moments, réussi à demontrer des propriétés concernant le problème ou bien vous aurez peut-être une démonstration concernant la solution du problème, vous les indiquerez dans cette partie.

- Sixième partie : Généralisation

On vous donnera un temps après que vous ayez réfléchi au problème, et on vous demandera d'essayer de généraliser le problème, c'est-à-dire, d'essayer de trouver des problèmes analogues, voisins de celui que vous venez de traiter.

Commentaires :

. Caractère ouvert de la grille-réponse : Cette ouverture nous a paru indispensable pour tenter d'appréhender les différents processus de résolution mis en oeuvre par les élèves ; nous savions qu'ainsi nous allions privilégier une étude qualitative, et qu'une quantification de ces épreuves serait ainsi rendue plus difficile(1), qu'une comparaison entre élèves, entre classes serait malaisée.

. Choix des différentes parties constituant la grille-réponse : nous avons tenté, en proposant cette grille-réponse d'organiser les traces écrites que les élèves pouvaient laisser de leurs activités de résolution. Nous nous sommes inspiré pour cette organisation à la fois de la description faite par G. Brousseau du processus de mathématisation et du modèle de résolution de problèmes que nous a inspiré la taxonomie de Bloom.

C'est ainsi que la première partie, celle consacrée au calcul, peut être associée à une activité de type "analyse", l'individu peut par des calculs rechercher des éléments d'informations sur la sitation, ou des relations entre ces éléments : des calculs numériques ou les grandeurs variables des problèmes sont remplacées par des valeurs précises s'inscrivant dans la dialectique de l'action de Brousseau. Des calculs algébriques peuvent par contre faire partie d'une dialectique de la formulation ou de la validation.

La seconde partie, celle consacrée aux représentations graphiques peut être analysée comme la première ; les représentations numériques, symboliques sont remplacées par des figures géométriques, des graphes de fonctions.

---

(1) On perd ici, les avantages quantitatifs obtenus à l'aide d'outils ayant la forme de QCM,de QROC. Par ailleurs, la docimologie a montré depuis longtemps que la notation en référence à des produits "normés" ne pouvait pas constituer une mesure même approchée tant les variations entre correcteurs sont grandes même dans le domaine des mathématiques.

La troisième partie nous a directement été inspirée par la dialectique de la formulation de Brousseau : nous espérions que dans celle-ci les élèves laissent les traces de leurs traductions mathématiques du problème.

Dans la quatrième partie, nous demandions aux élèves les diverses hypothèses qu'ils émettaient, concernant la solution du problème : une telle hypothèse ne peut être quele résultat d'une mise en ordre, d'une activité mentale du type synthèse.

La cinquième partie est à associer à la dialectique de la validation de Brousseau.

La dernière partie, "généralisation" n'était pas à remplir par les élèves pendant le temps de résolution du problème. Après celui-ci, la personne qui faisait passer l'épreuve avait comme consigne de laisser un temps de 1/4 d'heure à l'élève pour qu'il puisse imaginer des situations analogues à celles ayant fait l'objet du problème.
Nous espérions avec cette partie, avoir quelques renseignements sur le fonctionnement créatif de l'élève et sur les représentations qu'il se faisait du problème.

III - ANALYSE QUALITATIVE DES PROCESSUS DE RESOLUTION MIS EN OEUVRE PAR LES ELEVES

A - Usage fait par les élèves des différentes parties de la grille-réponse

On peut s'interroger sur la pertinence de la forme de la grille réponse. Nous avons proposé à une classe l'élèves en fin de troisième, le problème qui a servi à l'épreuve de Septembre ; les observations directes d'élèves travaillant en groupe, les échanges que nous avons eus avec eux ont fait apparaître par explicitation, des processus analogues à ceux repérés à l'aide de la grille réponse. Bien sûr, nous n'obtenons que des traces de l'activité de résolution mise en oeuvre par les élèves ; ces traces correspondent à diverses productions qui par le jeu de l'évaluation sont retenues suffisemment longtemps pour être écrites ou être dites.

Les différentes parties de la grille réponse n'ont pas été utilisé par les élèves dela même façon. Les deux premières parties, celles consacrées aux calculs et aux représentations graphiques sont les plus utilisées : c'est là que l'on voit le plus apparaître les tâtonnements où"les dialectiques" des élèves. La partie "formulation" est celle qui est la moins bien comprise : les élèves n'y écrivent que rarement leur propre formulation du problème, mais y marquent plus souvent les formules mathématiques, parmi celles qui font partie de leur répertoire, dont ils ont besoin. On pourrait modifier l'intitulé de cette partie de la grille pour la rendre plus conforme à nos intentions, mais cette interprétation faite par les élèves porté aussi sa signification : la partie "dialectique de la formulation" du processus de mathématisation est rarement activée par les problèmes classiques que les élèves ont à résoudre , les libellés de ceux ci contenant le plus souvent la formulation nécessaire.

La partie concernant les "hypothèses" est bien comprise : l'élève y écrit effectivement ce qu'il pense être la solution à un moment donné sans avoir nécessairement validé l'hypothèse ainsi énoncée, à condition toutefois, semble-t-il, que son degré de conviction soit assez fort.

La partie "Démonstration" est peu utilisée : on y trouve des "explications" justifiant les hypothèses, mais beaucoup plus rarement des tentatives de mise en ordre de ce qui pourrait constituer une démonstration mathématique .

B - Processus de résolution mis en oeuvre par les élèves pour résoudre le problème de Septembre

a) Exemples :

Avant de présenter une typologie synthétique des différents processus mis en oeuvre par les élèves, nous voudrions ici, présenter quelques exemples parmi ceux qui nous ont paru les plus significatifs[1] :

- Certains élèves ont des difficultés avec la notion de périmètre : C'est le cas de Corinne qui confond périmètre et aire ; elle écrit,

"sachant que son périmètre mesure 400 m. L X ℓ = 400 m.

Elle donne ensuite deux valeurs particulières à L et l satisfaisant cette égalité et s'arrête là.

Catherine, quant à elle, éprouve des difficultés, semble-t-il, à donner des valeurs particulières à la largeur et à la longueur du champ :

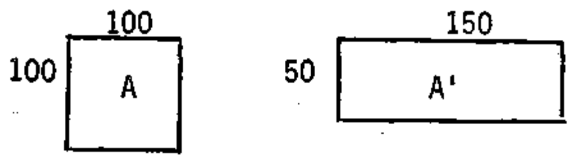
"la longueur de l'enclos est 100 m. Sa largeur 50 m.
100 + 50 (2) = 400 m.
L'enclos est rectangulaire".

C'est la solution qu'elle fournit au problème.

---

(1) Signalons tout de suite pour le mathématicien qui pourrait lire ces lignes, que nous n'obtenons quasiment aucune réponse qui pourrait être considérée comme correcte en référence aux contenus de mathématiques du second cycle. C'est ainsi que nous n'obtenons jamais cette réponse "simple d'apparence" du type. Pour $x \in [0;100]$ soient $100-x$ la largeur du rectangle et $100+x$ la longueur du rectangle ; l'aire du rectangle $S(x)$ est alors donné par $S(x) = (100-x)(100+x) = 10\,000 - x^2$
Alors $\forall x \in [0,100] \quad S(x) = 10\,000 - x^2 \leq 10\,000$
L'aire maximale est obtenue pour la seule valeur $x = 100$

- Frédéric réalise les deux figures suivantes :



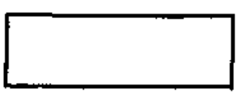
Il écrit surface A = surface A' et se justifie comme suit :

"Même si l'on change la largeur et la longueur, la surface reste la même".

- Lionel comme Frédéric, pense que tous les rectangles ont même superficie, mais il fait un choix :

"Je pense que l'agriculteur peut choisir l'enclos rectangulaire ou carré parce que l'enclos aura toujours la même surface. Mais je donne l'enclos rectangulaire, pas parce que la surface sera plus grande que l'enclos carré, mais parce que les moutons pourront couvrir une distance plus grande . Le rectangle serait 150 m de longueur et 50 m de largeur".

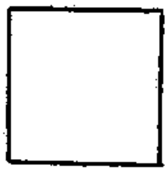
- Christophe estime que le problème était "assez simple". Il n'y avait aucun piège. Il suffisait de partir de dessins et on arrivait à conclure rapidement.
Voici ce qu'il écrit : (nous reproduirons l'ensemble de sa rédaction)

" 

Si je prends un pré ayant 150 m de long et 50 m de large, sa surface sera de 7500 M^2 et il fera 400 m de périmètre.

Si je prends un pré ayant 140 m de long et 60 m de large, sa surface sera de 8400 M^2 et son périmètre dera toujours 400 m.

Je conclus donc que si la largeur est aussi grande que la longueur (donc un carré) j'obtiendrais la surface du pré la plus grande.



*Le pré qui est carré, aura une surface de 10 000 M^2
et le périmètre fera bien 400 m.
C'est la surface du pré la plus importance."*

Frédéric et Lionel n'arrivent pas à se détacher de l'invariance de l'aire qui'ils lient à l'invariance du périmètre ; par contre Christophe, et deux calculs particuliers semblent lui suffire, remarque que la "variation de la largeur" l'emporte sur la "variation de la longueur" et conclut ainsi que la solution optimale est obtenue par le carré.

Francis, après avoir effectué plusieurs calculs, écrit :

"Grâce aux calculs, on peut remarquer deux choses :
. La première, c'est que plus il y a d'écart entre la largeur et la longueur, plus l'aire est petite.

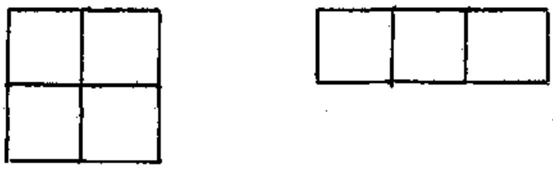
. La seconde, c'est que moins il y a d'écart entre la longueur et la largeur, plus l'aire est grande.

Donc, l'aire du rectangle est la plus grande lorsque la longueur et la largeur, sont égales".

Nombreux sont les élèves qui comme Christian effectuent de nombreux calculs (avec des longueurs égales à 100, 150, 180, 120, 110) et qui concluent

"Dans tous les cas le carré est plus avantageux pour l'agriculteur car la surface est plus grande que celle des rectangles."

D'autres arrivent à la conclusion sans faire de calculs mais en réalisant des figures du type suivant



avec un commentaire : *"Ces deux dessins ont le même périmètre mais le carré à une surface plus grande".*

. Certains élèves peu nombreux tentent d'élaborer une "démonstration"
C'est le cas de Véronique qui écrit :

"Si l'enclos est rectangle $\ell > L$ *ou* $L > \ell$.
$\ell < 200$ *et* $L < 200$; $\ell + L = 200$
Si $\ell < L$ *ou* $L < \ell$ *alors* $\ell \times L < L^2$ *ou* $L \times \ell < \ell^2$ *car la multiplication dans* $\mathbb{R}^+$ *conserve l'ordre, donc* $\ell \times L < 100^2$

L'agriculteur doit donc choisir un champ carré de 100 m".(1)

D'autres, comme Anne-Marie, n'élaborent pas de démonstration, mais font remarquer que des calculs ne suffisent pas pour assurer la preuve de ce qu'ils annoncent.

"Il m'est impossible de trouver la solution exacte car il y a de nombreuses solutions pourle rectangle. Cependant dans mes trois solutions envisagées, j'en retiens une celle du carré..."

Un seul élève(2) fournit une démonstration correcte. Celui-ci écrit :

"Posons a longueur del'enclos et b largeur de l'enclos.
On sait que $2(a+b) = 400 \Longrightarrow a+b = 200$ *et* $\frac{a+b}{2}$ = *côté du carré*
La surface du carré : $\frac{(a+b)^2}{4} = \frac{a^2+2ab+b^2}{4}$

Si l'enclos est rectangulaire $\Longrightarrow$ *surface :* $ab = \frac{4ab}{4}$

Cherchons si $\frac{a^2+2ab+b^2}{4}$ *est supérieur ou inférieur à* $\frac{4ab}{4}$

si $\frac{a^2+2ab+b^2}{4} \geqslant \frac{4ab}{4}$ *alors* $\frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{4} \geqslant 0$

si $\frac{a^2+2ab+b^2}{4} \leqslant \frac{4ab}{4}$ *alors* $\frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{4} \leqslant 0$

---

(1) Cette validation est fausse:il y a confusion dans la formulation ; la même lettre désigne la longueur d'un rectangle (statut de variable) et le côté du carré.
(2) Cet élève obtient la meilleure note au test "connaissance " de Septembre.

calculons $\dfrac{a^2+2ab+b^2-4ab}{4} = \dfrac{a^2-2ab+b^2}{4} = \dfrac{(a-b)^2}{4}$

Un carré est toujours positif $\Rightarrow (a-b)^2 \geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{(a-b)^2}{4} \geqslant 0$

$$\Rightarrow \dfrac{a^2+2ab+b^2-4ab}{4} \geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{a^2+2ab+b^2}{4} \geqslant \dfrac{4ab}{4}$$

donc $\dfrac{(a+b)^2}{4} \geqslant ab.$

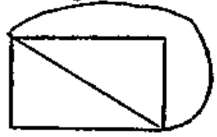
donc la surface du carré est $\geqslant$ *à la surface du rectangle*".

Les exemples que nous venons de présenter ne constituent qu'un petit échantillon, mais toutefois assez caractéristique, des diverses variantes de résolution adoptées par les élèves.

b) Typologie de résolution

Nous avons de façon synthétique, mais aussi de façon réductrice de la variété des possibles, distingué quatre types de résolution :

Type 1 : Il s'agit des élèves qui ne parviennent pas à donner des valeurs particulières aux côtés de l'enclos, ou qui ne parviennent qu'à trouver les données (longueur et largeur) du carré ou d'un rectangle particulier et qui adoptent cette solution. Les élèves de ce type ne formalisent pas le problème ni de façon algébrique, ni de façon géométrique.
On y rencontre les élèves chez qui il y a confusion entre surface et périmètre (quel sens a pour ceux là le problème ?)
D'autres semblent savoir ce qu' est le périmètre, mais par exemple, trace la figure suivante :



Cette figure semble indiquer qu'il y a déjà une opération mentale pour arriver au demi-périmètre Peut-être la diagonale est-elle tracée comme un auxiliaire pour pouvoir aller plus loin ? La décomposition de 200 en deux données semble être pour ces élèves difficile ou impossible.

Type 2 : Celui-ci est composé d'élèves qui savent donner des valeurs particulières à la largeur et à la longueur de l'enclos satisfaisant les données du problème, mais qui ne font pas de calcul d'aires. Ils s'en tiennent à l'hypothèse que tous les rectangles ont la même surface, ou alors ils adoptent une solution particulière pour des raisons esthétiques ou pratiques comme "permettre aux moutons d'avoir une plus grande longueur pour courir". Il semble que pour ces élèves la surface se comporte comme un invariant : si la longueur croit, la largeur diminue, et l'aire qui est le "composé" de la longueur et de la largeur est en conséquence constante, comme composée de deux grandeurs dont les variations s'annulent, (ce qui est vrai pour le périmètre).

Type 3 : Les élèves qui appartiennent à ce type sont ceux qui font plusieurs calculs ou qui tracent plusieurs figures géométriques et en déduisent le résultat. Ils infèrent le résultat soit en constatant que la surface du carré "reste" la plus grande, soit en remarquant que l'aire croit avec la largeur du rectangle ou décroit avec la longueur(1). A partir de cas particuliers, ils constatent donc que la croissance de la largeur, l'emporte sur la décroissance de la longueur.

Type 4 : Nous avons regroupé ici les élèves suivants :
- ceux qui constatent qu'ils ne sauraient par un ensemble de calculs envisager tous les cas possibles, sans pour autant savoir comment faire une démonstration. Ils se distinguent des élèves du type 3, en ceci qu'ils explicitent que leur explication n'est pas une preuve.
- ceux qui par utilisation d'inégalités avec des symboles littéraux tentent de démontrer que la surface du carré est la plus grande. Les résultats numériques leurs permettent de repérer que le carré à la plus grande surface, et ils tentent par une suite d'inégalités de justifier ce résultat.

---

(1) Croissance. avec la largeur et décroissance avec la longueur ne sont pas nécessairement une même chose chez les élèves : certains d'ailleurs éprouvent le besoin d'écrire les deux, sans pour autant les lier.

C - Résultats quantitatifs

Nous nous sommes limités, pour une exploration quantitative, à quatre classes, (soit 112 élèves) ; deux classes ayant des professeur en cotation haute selon le questionnaire sur les conceptions et les pratiques de l'enseignement, et deux classes ayant des professeurs en cotation basse.

. 83 % des élèves fournissent la réponse correcte au problème : ils expriment que le carré est la solution optimale (quelques soient les procédures et les explications données)

. Répartition selon les types définis à la page précédente

	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4
Nombre d'élèves (total 112)	16	7	82	9
Pourcentage	14 %	6 %	72 %	8 %

d) Autres commentaires

- Formulations : Les élèves des types 1, 2 et 3 se contentent le plus souvent de faire des calculs numériques ou des figures géométriques. Ils n'utilisent des symboles littéraux, lorsqu'ils en utilisent, que comme symbole de constantes ; c'est ainsi qu'ils désigne la longueur par L et utilise le symbole L exclusivement pour lui assigner successivement des valeurs particulières.

Certains élèves savent exprimer la longueur du rectangle en fonction de la largeur "L = 200 - l", mais aucun n'explicite la surface comme fonction d'une seule variable (la longueur ou la largeur). Quelques élèves, surtout ceux du type 4, utilisent des symboles de variables dans des formules du type précédent (ici des inégalités).

- Discrétisation du problème : Beaucoup d'élèves (du type 3) semblent considérer que seules des valeurs entières sont à prendre en compte pour largeur et longueur.
C'est ainsi qu'un élève écrit :

"Le plus grand rectangle a pour longueur 101 m et largeur 99 m, sa surface est 9999 m^2, le plus petit rectangle a pour longueur 199 m et pour largeur 1 m, sa surface est 199 m^2."

Quelques élèves examinent ce qui se passe avec des nombres décimaux écrits avec deux chiffres après la virgule (système de nombre D_2) mais ce qu'ils écrivent laisse penser qu'ils considèrent qu'ils font ainsi le tour de la question, et que par conséquent il y a bien là également un fonctionnement de type discret(1).

- Explication et démonstration : La plupart des élèves élaborent une réponse souvent juste au problème et il est ici intéressant de voir que les justifications qu'ils donnent sont rarement des démonstrations. C'est là une situation qui permet bien de distinguer "explication" "preuve" et "démonstration" comme le fait, à la suite de Piaget, Balacheff(2) :

"Nous appellerons explication un discours visant à rendre intelligible le caractère de vérité, acquis pour le locuteur, d'une proposition ou d'un résultat... certaines explications sont reçues pour preuve... parmi les preuves, certaines ont une forme particulière, elles sont une suite d'énoncés suivant des règles déterminées... nous appellerons démonstrations ces preuves."

---

(1) Claude Janvier avait déjà remarqué, avec des élèves analogues à ceux de notre population, cette prégnance de "modèles discrets" mis en oeuvre dans l'étude de fonctions.
cf C. JANVIER : Difficulties related to the concept of variable represented graphically
in Actes du V^{ème} colloque du groupe international "Psychology of mathematic Education - laboratoire IMAG - Grenoble 1981 - p. 189-192

(2) N. Balacheff : Preuve et démonstration en mathématiques au collège. in Recherches en didactique des mathématiques - La pensée sauvage - 1982 - Vol. 3.3 - p. 263

Beaucoup d'élèves fournissent des preuves du type : "les rectangles ont une surface plus petite que le carré", "Plus la longueur est grande, plus la surface est petite". Celles-ci ne constituent pas, dans la communauté, des mathématiciens, des démonstrations, car elles ne sont élaborées qu'à partir de cas particuliers (concrets) et ne mettent pas en jeu l'ensemble des cas possibles.

D'autres élèves expliquent pourquoi ils pensent que telle solution est la bonne tout en exprimant que cette explication ne saurait constituer une preuve (c'est le cas de certains élèves du type 4).

C - Processus de résolution du problème de Mars

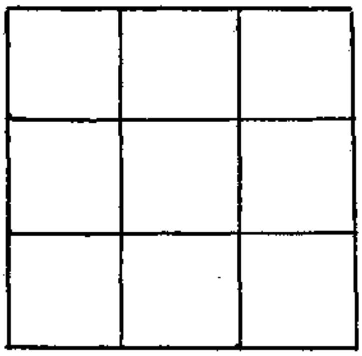
a) Une typologie et des exemples

Nous allons présenter une typologie analogue à celle que nous avons réalisée pour le problème de Septembre. Des processus mis en oeuvre par les élèves ressemblent pour bien des aspects à ceux mis en oeuvre au premier problème ; cependant, des nouveautés apparaissent et c'est pour tenir compte de celles-ci que nous proposons une typologie, non plus formée de quatre catégories, mais de six.
Nous illustrerons chacune de ces catégories par des exemples.

Type 1 : Nous retrouvons ici des élèves qui ne savent pas donner des valeurs particulières aux côtés de la boîte à construire et satisfaisant les conditions du problème. Ces élèves ne formalisent ni algégriquement, ni géométriquement le problème.
C'est le cas de Christel qui écrit successivement :

"Pour construire mon cube sans couvercle, il faudra que les carreaux éliminés soient de la même taille que les carreaux laissés'

Puis elle abandonne cette hypothèse (sans expliquer pourquoi) et écrit :



"Si je découpe les carrés les plus grands possibles, il y a de moins en moins de carton donc le volume est de plus en plus petit".

C'est cette dernière hypothèse qui la conduira à proposer une solution. La variation de la surface de carton l'emporte ici sur la variation du volume.

Laurence formule une hypothèse, semblable à la première de Christel où la surface joue également un rôle.

"Je pense qu'il faut enlever un coin à chaque angle du carré de façon à ce que le fond ait le même nombre de carrés que les côtés réunis, car à mon avis, si l'on prend des coins trop petits la boîte aura une trop grande surface et si l'on prend des coins trop grands, elle sera trop profonde et ne sera pas logeable."

<u>Type 2</u> : Nous regroupons ici des élèves qui savent donner des valeurs particulières aux côtés de la boîte satisfaisant aux conditions du problème mais qui n'effectuent pas correctement les calculs de volume ou qui ne formulent pas ceux-ci correctement. Nous retrouvons des élèves comme Sylvie, qui écrit :

"Quelque soit la longueur du côté du carré, le volume sera toujours le même" et qui le prouve en écrivant :

$$" \left.\begin{array}{l} a_1 < a_2 \\ A_1 > A_2 \end{array}\right\} \rightarrow V_1 = V_2 \qquad (1)$$

$$\begin{array}{l} a_1A_1 = V_1 \\ a_2A_2 = V_2 \end{array} \qquad \text{comme } a_1A_1 = a_2A2 \qquad V_1 = V_2 \ "$$

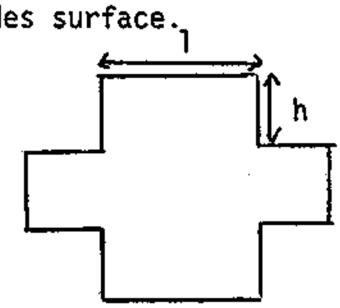
---

(1) a_1 et a_2 désignent des hauteurs de la boîte. A_1 et A_2 les aires du fond dela boîte et V_1 et V_2 les volumes correspondants

D'autres élèves avancent des explications analogues à celles des élèves du type 1 , mais ils savent donner des valeurs particulières aux côtés de la boîte.

Nous avons classé dans cette catégorie des élèves qui, comme Pascale, croit faire des calculs de volume alors qu'ils calculent des surface.

Pascale écrit

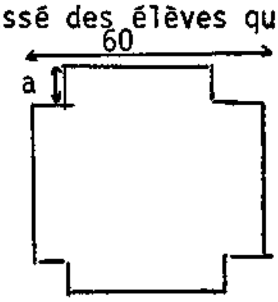


V = côté X côté

Dans le cas de la plaque évidée on obtient

$V = \ell \times h$

Nous y avons également classé des élèves qui calculent le volume de la boîte comme suit :



$V = 60^3 - a^3$

C'est une formulation qui traduit, à notre sens, une mauvaise représentation du volume de la boîte : cette représentation semble être ici très liée à celle de la surface du carton restant ce qui justifie que nous ayons classé ces élèves dans le type 2.

<u>Type 3</u> : Nous avons classé dans ce type les élèves qui font des calculs particuliers du volume, en mettant en jeu un algorithme correct, et qui en déduisent le résultat selon l'une des modalités suivantes :

Ceux qui font un constat comme Philippe qui déclare :

"Après plusieurs calculs, on remarque que si les carrés ont 10 cm de côté le volume est de 16000 cm^3 qui est le plus grand"

- D'autres élèves dépassent le simple constat et font des remarques qui suggèrent que plus on s'éloigne de 10 cm, plus le volume diminue.

- Nous avons classé ici également des élèves qui à partir de calculs particuliers, élaborent un graphe représentant le volume de la boîte en fonction d'une longueur et qui font le choix de leur solution avec des arguments du type suivant :

"Le point le plus haut de cette courbe est 16000 cm^3 et je pense donc qu'il faut que les carrés mesurent 10 cm de côtés".

- Certains élèves ont également élaborés un tableau de variation du volume en fonction d'une longueur : ils l'ont dressé à partir de leurs résultats numériques, sans explicitation d'une formule permettant le calcul général du volume en fonction de la longueur considérée.

Dans ces deux dernières modalités, l'élaboration du graphe ou du tableau de variation se fait sans explicitation à l'aide de variables du volume en fonction d'une longueur, mais se fait uniquement à partir des données numériques.

Type 4 : Nous avons rangé dans ce type essentiellement, les élèves qui formulent correctement le volume comme fonction d'une des longueurs de la boîte.
Voici ce que rédige Philippe :

"Soit x la valeur de la longueur du côté du carré
y le volume de la boîte.

$y = (60-2x)^2 \times x = 3600\,x - 240\,x^2 + 4\,x^3$"

Les élèves de ce type utilisent eventuellement ce type de formule pour réaliser des calculs particuliers, en remplaçant x par diverses valeurs mais les explications qu'ils fournissent sont analogues à celles des élèves du type 3 ; c'est dire qu'ils élaborent eux aussi leurs preuves essentiellement à la vue de résultats numériques.

Type 5 : Nous avons rangé ici des élèves qui comme ceux du type 4 formulent le volume comme fonction d'une des longueurs de la boîte mais qui de plus tentent d'utiliser la notion de taux de variation(1), (notion qui est "hors-programme" dans la classe de seconde mais qui est donné comme thème d'étude). Cependant, il n'apparait pas clairement que les élèves rangés dans cette catégorie, utilisent le taux de variation pour édifier une démonstration. La complexité du calcul fait qu'ils abandonnent celui-ci, et ils ont recours à des explications semblables à celles utilisées par les élèves du type 3.

Olivier par exemple appartient à cette catégorie, il écrit :

"On peut essayer de résoudre ce problème avec les fonctions

$f : R \mapsto R \qquad a \mapsto f(a) = a\,(3600 - 240\,a + 4\,a^2)$

On calcule le taux d'accroissement de cette fonction

$$T\,a\,a' = \frac{f(a) - f(a')}{a-a'} = \frac{3600a - 240a^2 + 4a^3 - 3600a' + 240a'^2 - 4a'^3}{a-a'}$$

Il fait quelques calculs pour simplifier cette expression, mais il n'utilise nulle part ailleurs le taux de variation : en particulier il fait quelques calculs (a = 10, a = 15, a = 5) et cela semble lui suffire pour annoncer la bonne solution : c'est ainsi qu'il écrit

"En prenant différents exemples, on remarque que c'est 10 qui permet à V d'être le plus grand".

---

(1) le taux de variation d'une fonction f d'une variable réelle entre deux valeurs x_1 et x_2 se définit par

$\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$. Cet outil permet surtout d'étudier le sens de variation d'une fonction.

Type 6 : Nous avons réservé ce type pour les élèves qui savent calculer, selon un algorithme correcte, le volume, et qui de plus explicitent à quelque part une prise en compte de l'ensemble des possibles.
C'est le cas tout d'abord pour des élèves comme Corinne, qui après quelques essais déclarent :

"Mais ces quelques exemples ne démontrent rien cela donne une idée".

ou comme Jean qui dit :

"J'aurai aimé démontrer cette solution d'une autre façon avec une fonction mais je n'arrive pas à trouver le taux de variation".

D'autres tentent effectivement d'élaborer une démonstration qui puisse être considérée comme telle par des mathématiciens en utilisant diverses inégalités.

b) Résultats quantitatifs

Toujours avec un effectif de 112 élèves venant de quatre classes distinctes extraites de notre population d'étude, voici la répartition en pourcentage des élèves selon les divers types.

	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4	Type 5	Type 6
Pourcentage	17 %	22 %	31 %	14 %	5 %	10 %

Nous avons été étonné par le nombre d'élèves qui ont des difficultés avec le volume de la boîte de ce problème : 39 %. (les élèves de type 1 et de type 2) ne parviennent pas à effectuer des calculs de volume corrects : il ne s'agit pas d'erreur d'innatention mais bien de difficulté à passer du plan à l'espace. Remarquons que seulement 20 % (mais c'est déjà beaucoup) des élèves avaient des difficultés avec l'aire du rectangle du premier problème.
Plus de 19 % (élèves detype 4 et 5 auxquels il faut ajouter des élèves du type 6) des élèves arrivent à exprimer le volume comme fonction d'une des longueurs d'un côté de la boîte. Il y a une variation avec ce qui se passait pour le premier problème puisque reppelons-le, très peu d'élèves formulaient

la surface du rectangle comme fonction d'un des côtés du rectangle.

La discrétisation du problème est là aussi comme pour le problème de Septembre, très présente : il semble qu'il y ait là un modèle de fonctionnement fortement ancré chez une grande partie des élèves : il y a cependant une évolution et l'on rencontre ici plus d'élèves que précédemment qui tentent de prendre en compte l'ensemble des possibles. Ce processus "discrétisation du problème", par le fait même de son efficacité, comme le montre les deux problèmes proposés ici, peut constituer un "obstacle didactique" à l'acquisition des concepts mathématiques liés à la notion de fonction à variable réelle, et qui impliquent la prise en compte d'un ensemble continu et donc infini de possibles.(1)

Il est bien sûr intéressant d'examiner comment évoluent les élèves selon leur type au problème de Septembre.

Voici un tableau qui résume la situation.

		Types en Mars					
		1	2	3	4	5	6
Types en Septembre	1	7	6	1			1
	2	2	3	2			
	3	10	16	30	12	6	7
	4			3	4		4

On peut faire les remarques suivantes :

Dix-huit parmi les vingt-deux élèves ayant des difficultés sérieuses avec l'aire du rectangle, ont des difficultés avec le volume de la boîte. Un de ces élèves passe du type 1 au type 6.

Les élèves qui étaient du type 4 en Septembre arrivent tous à calculer correctement des volumes de boîte : ils se répartissent dans les catégories 3, 4 et 6.

---

(1) Il pourrait donc être utile en classe de seconde de proposer des problèmes qui mettent en échec ce processus de discrétisation. A propos de la notion d'obstacles didactiques, on peut consulter G. Brousseau : Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Congrés de la CIEAEM - opus cité.

Les élèves de type 3 en Septembre présentent moins de stabilité dans leur ensemble : on les retrouve en Mars dans tous les types : le type 3 reste cependant celui qui en recueille le plus.

D - Discussion de l'analyse proposée

Avant d'utiliser l'analyse que nous venons de proposer dans le cadre de nôtre problématique, il nous paraît important de discuter celle-ci: en effet, pour nous, il s'agit ici davantage d'un travail en cours d'élaboration que d'un produit fini, et ce pour les raisons que nous présentons ci-dessous.

a) Objectivité de la classification obtenue à l'aide des typologies.

Selon la façon dont un élève a rempli la grille-réponse à l'un des deux problèmes, nous l'avons classé dans un des types que nous avons présentés ci-dessus. Mais, ici, se pose le problème mis en évidence depuis longtemps par les diverses études docimologiques, de l'objectivité de la classification. Nous ne sommes pas assuré, car nous n'avons pas fait l'expérience, qu'un autre correcteur classerait les élèves de la même façon que nous. Il y a toujours ce risque, que partant du produit, objectivement observable, laissé comme trace par l'élève de son activité, le correcteur interprète celui-ci, extrapole et ainsi transforme le produit initial en un autre qui lui est réellement l'objet de l'évaluation. Par ailleurs, il est aussi vrai ici, que le produit ne constitue qu'une trace qui n'est peut être pas nécessairement un fidèle reflet de l'activité de l'élève ; Et ceci pose la question de la "fidélité"(1) de la classification opérée.

---

(1) Terme pris ici dans le sens traditionnel du vocabulaire des "Tests"

b) Niveau de complexité du processus et typologies

Nous avons pour des raisons évidentes de simplification, regroupé dans un même type, différentes variantes de processus : nous l'avons fait cependant en essayant de regrouper ensemble des élèves qui nous ont semblé avoir mis en oeuvre, relativement aux problèmes proposés, des processus présentants des niveaux de complexité relativement semblables. Cette hypothèse mériterait bien sûr, d'être fouillée davantage, avec une méthodologie complémentaire, comme par exemple des observations et des entretiens cliniques avec des élèves résolvant les problèmes. Nous avons, par exemple, regroupé ensemble des élèves (type 4 en Septembre) qui trouvent la bonne solution grâce à un processus de discrétisation (type 3) mais qui ont conscience qu'ils ne prouvent rien ainsi, avec des élèves qui ont entamé une démonstration réelle avec des inégalités : l'argument en faveur de ce regroupement est que bien sûr il s'agit d'élèves qui tentent de prendre en compte l'infinité des possibles, mais celui-ci mériterait d'être davantage étayé par un faisceau de preuve.

De la même façon, nous avons tenté de présenter une typologie hiérarchisant les niveaux de compléxité des processus mis en oeuvre par les élèves. Les élèves de type 1 semblent avoir des difficultés en Septembre à passer du périmètre (une donnée) à des exemples concrets de rectangle, c'est-à-dire à décomposer une donnée en deux données liées par une relation. Les élèves de type 2 réunissent ce que les élèves de type 1 n'arrivent pas à faire, mais n'arrivent pas à se dégager de l'invariance de la longueur de la clôture, pour aborder "la variation" de la surface. Les élèves de type 3 arrivent à dégager la variation de la surface, et résolvent le problème par un processus de discrétisation qui leur permet de voir que la largeur l'emporte sur la longueur ; cependant, ils ne prennent pas en compte comme ceux de type 4, l'ensemble infini des possibles. Ces arguments justifient notre hiérarchisation, mais eux aussi mériteraient d'être davantage étudiés, validés par d'autres expériences, et aussi par des référents théoriques.

C - Conclusion

Les deux types de critique que nous venons de faire nous obligent à être prudent quant à l'exploitation que nous pourrons faire des résultats, tels que nous les repérons, des élèves à ces deux épreuves "Résolution des problèmes" . C'est, en partie, ce qui justifie que nous ayons limité notre étude à quatre classes seulement et que nous ne l'ayons point étendue quantitativement à l'ensemble de notre population.

V - ATTITUDES DU MAITRE ET RESULTATS DES ELEVES AUX EPREUVES «RESOLUTION DE PROBLEMES»

A - Introduction

Il s'agit dans l'étude comparative que nous tentons de faire, d'essayer de repérer ce qui peut constituer pour les élèves de notre population, des effets d'apprentissages : comme nous le verrons par la suite, cette question "des effets d'apprentissage" qui implique que l'on prenne en compte pour chaque élève, situation initiale et situation finale, n'est pas simple dans le cas qui nous préoccupe ici.

Nous ferons, dans ce qui suit, deux comparaisons :

- Dans la première nous ne considérerons que la solution, correcte ou non, que chaque élève fournit à chaque problème et ce indépendemment du processus utilisé pour y parvenir. L'activité de résolution n'est pas prise en compte explicitement mais le résultat dichotomique à chaque épreuve n'est pas contestable et fournit donc une donnée objective.

- Dans la seconde, nous prendrons en compte l'activité de l'élève en utilisant les divers types de résolution exhibés dans l'analyse qualitative. C'est dans cette comparaison que nous pourrons réellement aborder la question des effets d'apprentissage. Les critiques adressés à notre typologie fait bien sûr que les données sont ici plus contestables que celles de la première comparaison.

Nous désignerons par E_1 l'ensemble des élèves de l'enseignant ayant le plus fort score au questionnaire "Conceptions et pratiques de l'enseignant, par E_2 ceux de l'enseignant ayant le score suivant et par E^+ l'ensemble des élèves de ces deux classes : $E^+ = E_1 \cup E_2$

De la même façon, nous désignerons par E_3 , E_4 et E^- les élèves des enseignants ayant les moins bons scores avec : $E^- = E_3 \cup E_4$

B - Première étude comparative

Pour chaque élève, et chaque problème, nous ne nous intéressons ici qu'à la solution adoptée par l'élève, indépendamment du processus qui l'a conduit à cette solution. C'est ainsi que tout élève qui énonce, pour le premier problème, que la solution est un carré, fournit la bonne solution. Cet élève sera opposé, dichotomiquement, à celui qui fournit une autre réponse, ou pas de réponse. Chaque élève est donc considéré soit comme réussissant, soit comme échouant à l'épreuve.

Comparons tout d'abord, les fréquences de réussite.
Voici un tableau donnant en Septembre et en Mars les fréquences de réussite pour les élèves des groupes E^+ et E^-

	Septembre	Mars
E^+	78 %	40 %
E^-	95 %	59 %

C'est ainsi que 78 % des élèves du groupe E^+ ont fourni la bonne solution au problème de Septembre.
Le groupe E^- réussit mieux que le groupe E^+ aussi bien en Mars qu'en Septembre.

Sachant que le groupe E^+ est formé de 58 élèves, que le groupe E^- de 56 élèves, nous pouvons comparer statistiquement ces fréquences de réussite.

La différence observée en Mars entre les deux groupes est significative à 2 % [1]. Celle observée en Septembre est significative à 1 %.

Si donc, les élèves du groupe E^- réussissent mieux de façon significative en Mars que ceux du groupe E^+, nous ne saurions l'imputer pour l'instant du moins, à des effets d'apprentissage[2], puisque nous retrouvons cette même différence significative au niveau de l'épreuve d'entrée.

Pour tenir davantage compte simultanément des résultats, pour chaque élève, au premier problème et au second, nous pouvons définir quatre catégories d'élèves :

VV : élèves qui ont réussi simultanément les deux épreuves
FF : élèves qui ont échoué simultanément aux deux épreuves
VF : élèves qui ont réussi en Septembre et échoué en Mars
FV : élèves qui ont échoué en Septembre et réussi en Mars

---

(1) On ne peut accepter, au risque de 2 % l'égalité des fréquences;
(2) La comparaison des fréquences de réussite, supérieures à l'épreuve d'entrée, ne permet pas de parler d'effets d'apprentissage : elle permet davantage de dire que le problème de Mars qui implique des calculs de volume est plus difficile que celui de Septembre qui implique des calculs de surface : et ceci, bien que les concepts mathématiques liés au programme de seconde soient les mêmes (volume et surface font partie des programmes des classes antérieures : 6^- et 5^-)

En fonction de ces quatre catégories, nous obtenons alors les répartitions (avec les effectifs) suivantes :

	VV	VF	FV	FF
E^+	20	25	3	10
E^-	33	19	0	4

La plupart des élèves (à l'exception de 3) qui fournissaient une mauvaise réponse en Septembre, fournissent aussi une mauvaise réponse ~~ne~~ en Mars : les trois élèves qui font exception appartiennent au groupe E^+ ; les faibles effectifs mis en jeu ici ne nous permettent pas de faire de comparaison.

Si l'on restreint la comparaison aux élèves ayant fournit une réponse correcte en Septembre, nous avons alors pour l'épreuve de Mars les fréquences de réussite suivantes :

E^+ (sur 45 élèves) ; 44 %

E^- (sur 52 élèves) : 63 %

Cette différence est significative au seuil de 5 % et elle se fait en faveur du groupe d'élèves E^-. C'est là un résultat qui à priori s'oppose à un résultat quiaurait été conforme à notre hypothèse.
Mais pour que ceci puisse avoir réellement un sens, encore faudrait-il s'assurer que la réussite (ou l'échec) à l'épreuve de Mars est un effet d'apprentissage (même partiel). Un examen des classements des élèves selon les types de résolution de problèmes que nous avons défini va nous pour permettre d'aborder cette question. C'est ce qui fait l'objet de la deuxième étude comparative que nous présentons maintenant.

b) Deuxième étude comparative :

Présentons tout d'abord les données qui vont être utilisées pour cette étude. Les tableaux qui suivent donnent les diverses répartitions des élèves selon leur type en Septembre (lignes) et leur type en Mars (colonne), pour la population totale (quatre classes) et pour les groupes d'élèves E^+ et E^-. Les nombres qui apparaissent correspondent à des effectifs.

Pour faire le lien avec la première étude comparative, il convient de noter que l'échec (au sens de la première étude) estlié, sauf exceptions, au fait que l'élève appartient au type 1 et au type 2.

Tableaux de données

Tableau 1 Population totale $E^+ \cup E^-$

Types de Septembre \ Types en Mars	I	II	III	IV	V	VI
1	7	6	1			1
2	2	3	2			
3	10	16	30	12	6	7
4			3	4		4

Tableau 2 Population E^+

Types en Septembre \ Types en Mars	I	II	III	IV	V	VI
1	5	4				
2	2	3	2			
3	8	10	12	2	4	3
4				1		2

	Types en Mars					
	I	II	III	IV	V	VI
1	2	2	1			1
2						
3	2	6	18	10	2	4
4			3	3		2

Types en Septembre

Tableau 3
Population E^-

- Evolution des élèves classés en type 1 et 2 en Septembre : La plupart des élèves qui étaient ainsi classés en Septembre, se retrouvent (sauf 4 sur 22) classés de la même façon en Mars. Dans l'étude précédente nous avions remarqué qu'il y avait beaucoup plus de "FF" que de "FV". Cette stabilité des élèves de ce type est vraie aussi bien pour le groupe E^+ que pour le groupe E^-.
Les élèves stables dans les types 1, et 2 sont plus nombreux à appartenir au groupe E^+ de la même façon, il y avait plus d'élèves FF dans ce groupe.

En termes d'apprentissage, nous pouvons faire les remarques suivantes :

- Il semble bien que nous soyons ici en présence d'élèves qui ont des difficultés opératoires, des difficultés à se distancier d'une donnée concrète pour en produire d'autres.

- L'apparente stabilité des élèves dans leur ensemble ne permet pas de conclure à une absence d'apprentissage pour ceux-ci : pour que cette conclusion soit réellement acceptable,il aurait fallu que les deux problèmes soient de difficulté équivalente : or il est manifeste que celui de Mars est plus difficile que celui de Septembre.

- Il se peut que la variation des quatre élèves qui atteignent au moins, le type 3 en Mars, soit imputable à une effet d'apprentissage mais il se peut aussi fort bien qu'ils'agisse là d'élèves qui se sont trouvés, par l'occurence de l'épreuve de Septembre, sous-classés par celle -ci (1)

---

(1) on retrouve ici le problème de la fidélité d'une telle épreuve.

Si leurs variations peuvent être imputées à un apprentissage qui a eu lieu en classes de mathématiques (1), on ne saurait ici conclure à des différences significatives entre le groupe E^+ et le groupe E^-.

- Evolution des élèves classés en type 4 en Septembre : Ceux-ci sont peu nombreux, et se retrouvent en Mars dans un type au moins égal à trois. Il semble cependant que la structure mentale impliquant la prise en compte d'une infinité de possibles soit peu stable et que la difficulté du problème de Mars réactualise pour certains par son efficacité, le processus de discrétisation. Les faibles effectifs ne nous permettent pas de comparer de façon significative, les groupes E^+ et E^-. Cependant, plus d'élèves du groupe E^- appartiennent au type 4 (8 contre 3). Or il s'agit d'élèves qui sont repérés, dans la première étude, dans la catégorie VV. Cette différence initiale entre les groupes E^+ et E^- contribuerait donc déjà à expliquer la différence de réussite entre élèves "VV" et "VF" que nous avions mis en évidence dans la première étude. (En éliminant les élèves de type 4 en Septembre, et en recomparant les catégories VV et VF des groupes E^+ et E^-, on retrouve une différence en faveur du groupe E^-, mais celle-ci n'est plus significative).

- Evolution des élèves de type 3 en Septembre : C'est la catégorie d'élèves qui se disperse le plus dans les types définis pour l'épreuve de Mars.

Nous reproduisons ici, les lignes correspondant à ce type pour les élèves de groupe E^+ et ceux du groupe E^- (1)

	1	2	3	4	5	6	
E^+	8	10	12	2	4	3	(39)
E^-	2	6	18	10	2	4	(42)

---

(1) Et c'est ici , loin d'être évident, car les opérations nécessaires pour dépasser les types 1 et 2 peuvent être considérées comme devant être acquise à l'entrée de la seconde

(2) Les nombres dans ce tableau sont des effectifs. Les nombres en parenthèse correspondent aux effectifs concernés des groupes E^+ et E^-

Si nous regroupons d'une part les types 1 et 2 (difficulté avec la notion de volume) et d'autre part les types 3, 4, 5 et 6 nous obtenons la répartition suivante des élèves en pourcentage.

	1, 2	3, 4, 5, 6
E^+	46 %	54 %
E^-	19 %	81 %

La différence de répartition entre les groupes E^+ et E^- est manifeste et est significative au seuil de 1 %. Il y a beaucoup plus d'élèves du groupe E^+ qui se trouvaient être de type 3 en Septembre et que l'on retrouve en type 1 et 2 en Mars.

C'est cette différence qui explique les différences de répartition entre les catégories VV et VF de la première étude. Or rappelons le, les élèves de type 1 ou 2, sont ceux qui n'arrivent pas à calculer un volume en affectant une valeur particulière à un des côtés de la boîte. Il nous semble que cela dépend beaucoup plus de la structuration mentale initiale de l'élève que de la présence ou l'absence d'un effet d'apprentissage. Il est probable que les élèves de type 3 à l'épreuve de Septembre n'ont pas le même équipement intellectuel pour aborder un problème comme celui de Mars, mettant en jeu des données relatives à des volumes : c'est ce que fait apparaître le fait que certains élèves quirestent assez nombreux, se retrouvent en type 1 ou 2 en Mars. Il semble donc que dans leur ensemble les élèves du groupe E^+ soient plus faibles que ceux du groupe E^-.

On peut, par contre certainement repérer des effets d'apprentissages dû à l'enseignement des mathématiques si l'on s'intéresse aux élèves qui atteignent au moins le type 3 en Mars, c'est à dire qui sont au moins capable avec des données particulières de calculer le volume d'une boîte. Les données se réduisent alors aux suivantes :

	3	4	5	6	
E^+	57%	9 %	19 %	14 %	(21)
E^-	53%	29 %	6 %	12 %	(34)

Les élèves qui se retrouvent en type 3 utilisent en Mars comme en Septembre, un processus de discrétisation : il y a peu de différence entre le groupe E^+ et le groupe E^-. Ceux qui se trouvent en types 4, 5 ou 6 ont ajouté dans la procédure de résolution en Mars, soit une formulation, un taux de variation, soit des éléments de démonstration prenant en compte l'ensemble infini des possibles. Les élèves qui se trouvent en type 6 sont aussi peu nombreux pour le groupe E^+ que pour le groupe E^-.

Le taux de variation n'est pas du programme de seconde, n'est donné à titre indicatif que comme thème d'étude, mais il nous a semblé cependant, que les élèves qui l'utilisait dépassaient quelque peu le simple stade de la formulation, sans pour autant atteindre sans ambigüité le type 6 ; c'est pour cette raison que nous avons introduit le type 5. Il se peut, pour tenir compte du fait que le taux de variation n'appartient pas aux programmes, qu'il soit légitime de regrouper ce type avec le type 4. Dans ces conditions, on le voit, les répartitions des groupes E^+ et E^- sont peu différentes.

L'apprentissage dont on peut trouver des traces dans la résolution de ces problèmes semble donc avoir des conséquences équivalentes pour les élèves du groupe E^+ et du groupe E^- ; du moins, les effectifs mis en jeu ne permettent pas d'exhiber de différences significatives.

C - Conclusion

Les résultats que nous obtenons ne confirment pas notre hypothèse de travail. La première étude comparative fournit même un résultat plutôt en faveur des élèves ayant des maîtres plus directifs. Mais la seconde étude qui permet davantage d'étudier l'évolution des élèves montrent que dans son ensemble, le groupe E^+ est "plus faible" initialement que le groupe E^- et qu'on ne saurait conclure à une différence significative d'évolution des élèves de ces deux groupes. On peut émettre l'hypothèse que c'est ici, davantage l'équipement intellectuel de l'élève en début d'année qui explique à la fois les processus de résolution adoptés pour résoudre le problème de Septembre, et aussi ceux pour résoudre celui de Mars. Pour quelques élèves, on note une évolution, une complexification de la structure intervenant pour la résolution, mais si l'on se réfère à l'ensemble de l'effectif, il semble que cette évolution soit lente.

Nous avions envisagé également de nous intéresser aux variétés de résolution adoptées par les élèves : on pouvait penser que les élèves du groupe E^+ présenteraient dans leur ensemble plus de variantes que les autres. Ces diverses variantes s'intègrent dans les divers types d'écrits et il ne nous semble pas qu'il y ait là de différence manifeste.

On pouvait penser également que les élèves de E^+ laisseraient davantage de traces de pistes, non nécessairement correctes, envisagées pour résoudre le problème. Certains élèves formulent effectivement des hypothèses (comme l'invariance de l'aire du champ) qu'ils abandonnent, mais là aussi, il ne nous semble pas, à la lecture des grilles-réponses, qu'il y ait de différence manifeste.

VI - CONCLUSION

Notre expérience d'animateur, la connaissance que nous avons des enseignants nous montrent qu'un maître davantage non-directif adopte plus qu'un autre des stratégies ouvertes, laissent à ces élèves plus d'initiatives, plus deliberté de pensées, d'actions ; un maître plus directif dicte davantage à ses élèves ce quil convient de faire, de penser. Ces différences se retrouvent,comme l'ont montré divers auteurs, dans les activités des élèves, dans leur fonctionnement cognitif, dans leurs échanges avec le maître. Il est donc légitime de se demander si ces différences d'activités laissent des traces d'apprentissages différentes. Nous nous sommes en particulier, intéressé ici à la résolution de problèmes pour les raisons suivantes :

- "Résoudre les problèmes" fait partie des objectifs de la classe de seconde en mathématiques.

- Les enseignants peuvent proposer à leurs élèves des problèmes plus ou moins ouverts : on peut penser que les maîtres davantage non-directifs, par la confiance qu'ils font à leurs élèves, proposeront plus souvent des problèmes présentant davantage d'ouverture.

- L'activité de résolution de problèmes implique des opérations mentales qui se situent aux niveaux 4, 5 et 6 de la taxonomie de Bloom : on peut penser que ces activités sont facilitées par un climat de liberté et de confiance mutuelle.

Le champ de la résolution de problème est vaste et nous ne pouvions que nous limiter à l'étude de problèmes particuliers.

Nous avons choisi deux problèmes, peu formalisés et d'énoncé conçu en référence à la partie du programme de seconde traitant de la notion de fonction. Méthodologiquement, nous avons pris le parti de proposer aux élèves une grille-réponse ouverte comportant plusieurs parties définies en référence à des modèles de "résolution de problèmes" et en particulier, à celui spécifique aux mathématiques, de Guy Brousseau. L'ouverture de la grille-réponse pose bien sûr le problème de l'objectivité de l'exploitation des données, mais elle a le grand avantage de nous fournir des renseignements intéressants sur les processus de résolution adoptés par les élèves. Ces processus sont, dans leur ensemble, loin d'être conformes à ceux que l'on peut espérer voir se développer dans une classe de seconde. En particulier, nous avons été surpris par le nombre d'élèves ayant des difficultés à faire des calculs particuliers de surface et de volume. Notons aussi, que le processus que nous avons appelé de "discrétisation" par son efficacité même à résoudre ce type de problème peut constituer un obstacle didactique à franchir pour mettre en place des processus intégrant des ensembles infinis, continus de possibles.

Beaucoup d'élèves fournissent des explications qui ne constituent pas des démonstrations mathématiques.

Nous nous sommes limité pour explorer l'hypothèse étudiée dans ce chapitre à quatre classes. Les résultats obtenus n'étayent pas celles-ci Une étude comparative des processus de résolution adoptés par les élèves en Septembre et en Mars montrent quele phénomène est complexe; on peut émettre l'hypothèse qu'il faut attribuer davantage les différences observées à l'équipement intellectuel des élèves à l'entrée de seconde qu'à des attitudes différentes de la part des maîtres. Ce travail de comparaison utilise des typologies, mais il s'agit ici d'une étude qui n'est point achevée et qui mériterait d'être poursuivie. Par ailleurs, pour pouvoir mesurer ou déceler réellement des effets d'apprentissages, il conviendrait, dans ce domaine, de disposer de problèmes équivalents (permutables) ce qui n'est

pas le cas des deux problèmes utilisés.
En conclusion, l'hypothèse formulée, confrontée aux faits utilisés ici, n'est pas vérifiée. Les maîtres ayant une cotation haute au questionnaire sur les conceptions et les pratiques de l'enseignement n'obtiennent pas ici, de façon significative, de meilleurs résultats. Nous ne pouvons pas, non plus dire qu'ils obtiennent de moins bons résultats.

Les résultats obtenus suggèrent, en hypothèse, que c'est l'équipement intellectuel de l'élève à l'entrée de la seconde qui est le facteur le plus explicatif des processus adoptés par celui-ci.
Si la variable "attitude de maître" intervient, il ne semble pas que le temps soit suffisant pour qu'on puisse en apercevoir des effets sur les structures cognitives des élèves en classe de seconde.