CHAPITRE IV

ETUDE DIDACTIQUE

1928-29
C. FREINET
L'Educateur
Prolétarien

« La libération de l'Ecole Populaire viendra d'abord de l'action intelligente et vigoureuse des instituteurs populaires eux-mêmes. »

Plus que les autres chapitres, celui-ci se centre, comme son intitulé l'indique, sur une analyse didactique. Sans nul doute que cette analyse peut être poussée au delà des limites fixées ici par les contraintes du temps et de la rédaction.

Il convenait, en premier lieu, de regarder ce qu'était l'enseignement de la Trigonométrie au cycle Secondaire. Nous avons recherché au travers d'ouvrages et des programmes de ce siècle, à expliciter son évolution.
Il est apparu un glissement de cet enseignement de la classe de Terminale à la classe de Troisième où la Trigonométrie y est greffée comme un appendice.

En second lieu, nous nous sommes livrés à une analyse des erreurs commises par les élèves lors de la passation du test préliminaire et du test final (année scolaire 1980-1981).

En troisième lieu, nous avons porté notre attention sur le test des prérequis (année 1981-1982). Enfin, nous avons pointé notre regard sur la notion de singularité* de traitement.

* * *
* *
*

SOMMAIRE DU CHAPITRE IV

IV.1. PETITE HISTOIRE DE L'ENSEIGNEMENT DE LA TRIGONOMETRIE

L'objet de ce travail n'étant pas de fournir une histoire de l'enseignement, nous nous contenterons de la période allant de la fin du XIXe siècle à nos jours.
A travers cette recherche historique que voulons-nous savoir ?
Nous souhaitons nous rendre compte avec plus de précision de ce qu'est "l'apprentissage de la trigonométrie dans l'enseignement des mathématiques".
Nous avons donc consulté les programmes officiels, puis quelques manuels.
Nous donnons en premier lieu, les informations issues de cette compilation.

IV.1.1. Les sources

IV.1.1.1. " Algèbre linéaire et géométrie élémentaire" DIEUDONNE-HERMANN (D-4)

Dans son introduction, Dieudonné fait mention de la trigonométrie.
Pour illustrer son propos, habilitation de l'algèbre linéaire, il répond à la critique d'excès d'abstraction de l'enseignement des Universités.

"...Il est bien vrai que l'ont peut exhiber sur de belles photographies les cascades de triangles que forment les poutrelles d'une constructions métallique ; mais pour être en état d'en fabriquer de semblables, vaut-il mieux savoir que les hauteurs d'un triangle sont concourantes, ou avoir acquis quelques principes fondamentaux de résistance des matériaux ?
Il est bien vrai que les formules trigonométriques sont tout à fait indispensables à trois professions éminemment respectables :

1° Les Astronomes
2° Les Arpenteurs
3° Les Auteurs de manuels de trigonométrie

Mais il y a des centaines d'autres professions tout aussi honorables qui se contentent fort bien, en matière de " trigonométrie", de ce qui tient en trois ou quatre pages de ce livre..."

Un peu plus loin, il dénonce un enseignement de "sciences" présentées isolément; parmi celles qu'il cite, on trouve la "trigonométrie".

IV.1.1.2. "Cours de trigonométrie rectiligne" par F.G.M. (M-5)
Classes de première et de mathématiques, année 1913.

Ce livre comporte le programme des classes de 1ère C et D du 4 mai 1912 et celui des classes de mathématiques A et B du 29 juillet 1911.

PROGRAMMES OFFICIELS

CLASSES DE PREMIÈRE C ET D

(*Programme du 4 mai 1912.*)

Fonctions circulaires (sinus, cosinus, tangente et cotangente). — Relations entre les fonctions circulaires d'un même arc. — Calcul des fonctions circulaires de quelques arcs $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, etc.

Théorie des projections.

Formules d'addition pour le sinus, le cosinus et la tangente.

Expressions de $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\operatorname{tg} 2a$.

Toutes les fonctions circulaires de l'arc a s'expriment rationnellement en fonction de $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$.

Connaissant $\cos a = b$, trouver les valeurs du sinus et du cosinus des arcs $\frac{a}{2}$; choix des valeurs correspondantes à un arc a donné.

Connaissant $\operatorname{tg} a$, trouver les valeurs des tangentes des arcs $\frac{a}{2}$; choix de la valeur correspondante à un arc a donné.

Transformer en produit la somme ou la différence de deux fonctions circulaires, sinus, cosinus ou tangentes. — Problème inverse.

Usage des tables de logarithmes à quatre ou à cinq décimales.

Résolution des triangles rectangles.

Résolution ou discussion de quelques équations trigonométriques simples.

Relations entre les côtés et les angles d'un triangle. (On ne s'occupera pas de l'équivalence des systèmes.)

CLASSES DE MATHÉMATIQUES A ET B

(*Programme du 29 juillet 1911.*)

Résolution des triangles.

Application de la trigonométrie aux diverses questions relatives au levé des plans.

(On ne parlera pas de la construction des tables trigonométriques.)

N. B. — Les questions qui ne se rapportent pas directement aux programmes précédents ainsi que les applications placées à la fin des chapitres ont été imprimées en caractères plus petits.

Pour décrire l'ouvrage succintement, voici les titres de chapitres :

IV.1.1.3. " Géométrie " Emile BOREL (B-9)
premier et second cycle, édition 1921

Ce livre est rédigé conformément au programme du 27 juillet 1905.
Il est centré sur la géométrie élémentaire. La préface datée du 15 septembre 1905 explique l'esprit nouveau de la géométrie à partir de l'étude de transformations.
Il ne fait pas mention de la trigonométrie .
Dans cet ouvrage, de plus de 400 pages, la trigonométrie apparaît dans la troisième partie.

TROISIÈME PARTIE

SIMILITUDE. — AIRES ET VOLUMES

IV.1.1.4 " Trigonométrie à l'usage des éléves des classes de première C et D et de mathématiques A et B "par A. GREVY(G-4)

PROGRAMME OFFICIEL
du 4 mai 1912

Classes de Première C et D

Fonctions circulaires (sinus, cosinus, tangente et cotangente). Relations entre les fontions circulaires d'un même arc. Calcul des fonctions circulaires de quelques arcs : $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ *etc.*

Théorie des projections.
Formules d'addition pour le sinus, le cosinus, et la tangente.
Expression de sin 2a, cos 2a, tg 2a. Toutes les fonctions circulaires de l'arc a s'expriment rationnellement en fonction de $tg\ \frac{a}{2}$.

Connaissant cos a = b, trouver les valeurs du sin et du cos des arcs $\frac{a}{2}$; choix des valeurs correspondantes à un arc a donné.
Connaissant tg a, trouver les valeurs des tg des arcs $\frac{a}{2}$; choix de la valeur correspondante à un arc a donné.
Transformer en produit la somme ou la différence de deux fonctions circulaires, sinus, cosinus ou tangentes. Problème inverse.
Usage des tables de logarithmes à quatre ou à cinq décimales.
Résolutions des triangles rectangles.
Résolution ou discussion de quelques équations trigonométriques simples.
Relations entre les côtés et les angles d'un triangle. (On ne s'occupera pas de l'équivalence des systèmes).

Classes de Mathématiques A et B

Fonctions circulaires. Addition et soustraction des arcs. Multiplication et division par 2
Résolution des triangles.
Application de la trigonométrie aux diverses questions relatives au levé des plans(1)

(1) On ne parlera pas de la construction des tables trigonométriques.

IV.1.1.5. Programmes 1910-1911 des premiers cycles secondaires.
L'enseignement secondaire comportait deux sections, A et B, pour le premier cycle. La section A proposait des langues anciennes (latin dès la 6e), la section B était plus "scientifique". Les textes des programmes présentés sont extraits des Rapports de la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique, Sous-Commission Française, Hachette (Paris), 1911.

Premier Cycle (A).

6e A. — 2 heures de classe.
Calcul : nombres entiers, nombres décimaux, fractions.
5e A. — 2 heures de classe.
Système métrique, mesure du temps, vitesse. Règles de trois. Emploi des lettres pour représenter des inconnues, formules simples.
4e A. — 2 heures de classe.
Arithmétique. — Produits. Caractères de divisibilité. Nombres premiers. Proportions. Règle d'extraction de la racine carrée.
Géométrie. — Ligne droite et cercle.
3e A. — 3 heures de classe.
Arithmétique. — Exercices sur le système métrique et les proportions.
Algèbre. — Nombres positifs et négatifs. Notions élémentaires de calcul algébrique. Equations numériques du 1er degré à 1 ou 2 inconnues.
Géométrie. — Revision. Lignes proportionnelles. Triangles semblables. Homothétie. Relations métriques. Polygones réguliers. Aires.

Premier Cycle (B).

6e B. — 4 heures de classe dont 1 de dessin géométrique.
Calcul. — Nombres entiers, fractions, système métrique, règles de trois. Problèmes d'intérêts, d'alliages, etc.
Dessin géométrique. — Emploi de la règle et du compas. Application à des motifs simples de décoration. Lavis.
5e B. — 4 heures de classe dont 1 de dessin géométrique.
Calcul. — Revision; problèmes simples conduisant à des équations du 1er degré.
Géométrie. — Ligne droite et cercle. Problèmes de construction.
Dessin géométrique. — Applications du cours; figures dans lesquelles entrent des lignes droites et des cercles. Lavis.
4e B. — 5 heures de classe dont 1 heure de dessin géométrique.
Arithmétique. — Fractions. Règle pour l'extraction d'une racine carrée. Progressions. Arithmétique commerciale.
Géométrie. — Lignes proportionnelles. Triangles semblables. Homothétie. Polygones réguliers. Aires. Construction de cissoïde, conchoïdes, etc.
Dessin géométrique. — Comme en 5e et en outre construction de lieux géométriques et tracé de courbes à la plume.
3e B. — 4 heures de classe.
Algèbre. — Nombres positifs et négatifs. Eléments de calcul algébrique. Equations du 1er degré à 1 ou 2 inconnues. Equation du 2e degré à 1 inconnue.
Représentation graphique du trinome et de $\frac{ax+b}{a'x+b'}$, usage des logarithmes.
Géométrie. — Géométrie de l'espace. Polyèdres. Cône. Sphère. Ombres de ces corps. Levé des plans.

La trigonométrie n'est pas mentionnée dans les textes ci-dessus. Toutefois, à la même époque, l'enseignement primaire supérieur proposait explicitement des notions de trigonométrie dans les programmes de deuxième année de la section générale (le texte ci-dessous est extrait du même Rapport que les précédents).

Section d'enseignement général.

DEUXIÈME ANNÉE

Géométrie plane. — Lignes proportionnelles. Triangles semblables; cas de similitude. Figures semblables.
Relations métriques dans un triangle rectangle et dans un triangle quelconque.
Problèmes et constructions graphiques. Partage de droites en parties proportionnelles; quatrième proportionnelle et moyenne géométrique. Construction de triangles et de polygones semblables à des triangles et à des polygones donnés.
Polygones réguliers. Carré, hexagone, triangle équilatéral.
Mesure de la circonférence: valeur de π.
Définition des lignes trigonométriques : sinus, cosinus et tangente d'un angle.
Formules relatives au triangle rectangle.
Géométrie dans l'espace. — Du plan et de la ligne droite dans l'espace. Droites et plans perpendiculaires, droites et plans parallèles.
Angles dièdres, trièdres, polyèdres.

IV.1.1.6 "Trigonométrie " par Emile BOREL [B-2]
second cycle , année 1922, 8ème édition.

PROGRAMMES OFFICIELS

TRIGONOMÉTRIE

Classe de Première (Sections C et D).

Fonctions circulaires (sinus, cosinus, tangente et cotangente). Relations entre les fonctions circulaires d'un même arc. Calcul des fonctions circulaires de quelques arcs : $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, etc.

Théorie des projections.

Formules d'addition pour le sinus, le cosinus et la tangente.

Expressions de *sin* 2*a*, *cos* 2*a*, *tg* 2*a*.

Toutes les fonctions circulaires de l'arc *a* s'expriment rationnellement en fonction de $tg\,\frac{a}{2}$.

Connaissant $cos\, a = b$, trouver les valeurs du *sin* et du *cos* des arcs $\frac{a}{2}$; choix des valeurs correspondantes à un arc *a* donné.

Connaissant *tg a*, trouver les valeurs des *tg* des arcs $\frac{a}{2}$; choix de la valeur correspondante à un arc *a* donné.

Transformer en produit la somme ou la différence de deux fonctions circulaires, sinus, cosinus ou tangentes. Problème inverse.

Expressions de la forme

$$a\, cos\,(\omega t + \alpha) + b\, cos\,(\omega t + \beta)$$

où *t* désigne la seule variable.

Usage des tables de logarithmes à quatre ou à cinq décimales.

Résolution des triangles rectangles.

Résolution et discussion de quelques équations trigonométriques simples.

Relations entre les côtés et les angles d'un triangle. Résolution des triangles.

Classe de Mathématiques (Section A).

Fonctions circulaires. Addition et soustraction des arcs. Multiplication et division par 2.

Résolution des triangles.

Applications de la trigonométrie aux diverses questions relatives au levé des plans.

(On ne parlera pas de la construction des tables trigonométriques).

Nous donnons ensuite la préface rédigée par Emile BOREL.

PREFACE

On a longtemps regardé la Trigonométrie comme une branche des Mathématiques d'un ordre plus élevé que l'Arithmétique, l'Algèbre et la Géométrie ; en réalité, il est, dans ces sciences, peu de chapitres aussi simples et en même temps aussi féconds que les premiers éléments de la Trigonométrie. Aussi doit-on approuver sans réserve les auteurs des nouveaux programmes d'avoir prescrit l'étude de ces éléments dès la classe de Seconde. Mais, pour que cette innovation produise tous les avantages qu'on est en droit d'en attendre, il semble nécessaire que l'enseignement des éléments de la Trigonométrie devienne véritablement élémentaire et en même temps résolument pratique.

J'ai cherché à atteindre ce double résultat, dans les limites où le permettait la lettre et l'esprit des programmes ; j'ai quelquefois regretté qu'ils ne fussent pas un peu plus étendus pour les questions pratiques et un peu moins pour les questions théoriques en Seconde et en Première ; (les nouveaux programmes du 27 juillet 1905 donnent satisfaction à ce desideratum qui se rapportait à ceux de 1902).

Presque toute *la Trigonométrie est renfermée dans les deux premiers chapitres de ce livre :* définition des trois fonctions fondamentales, relations entre les fonctions circulaires d'un même arc, d'arcs complémentaires, supplémentaires, etc., usage des tables, résolution des triangles rectangles[1].

Lorsque ces notions essentielles sont acquises et possédées à fond, de telle manière que l'usage en soit aisé et facile, le reste n'exige pas grand effort. Aussi doit-on multiplier les exercices sur ces principes, jusqu'à ce que leur résolution devienne aussi familière que l'emploi des quatre règles de l'arithmétique. Ces exercices doivent être nombreux ; il est moins nécessaire qu'ils soient variés ; en fait, il est même utile de répéter plusieurs fois le même exercice *avec des données différentes. Sur le conseil de quelques professeurs, j'ai cru devoir désigner par des numéros différents les diverses formes données à un même exercice, avec des données différentes ; il peut en résulter des facilités pratiques dans l'enseignement. Le nombre apparent des exercices se trouve ainsi être sensiblement plus élevé que dans mon Arithmétique ou mon Algèbre ; le nombre réel est à peu près le même.*

Après mûre réflexion, j'ai donné la première place à la division centésimale du quadrant ; la division sexagésimale est indiquée, accessoirement, *mais cependant traitée avec tous les détails qu'exige l'importance pratique qu'elle a encore et introduite dans d'assez nombreux exercices. Il semble que l'on se trouve, en ce moment, dans une période de transition, analogue à celle qui a suivi l'établissement du système métrique ; les livres d'arithmétique de cette époque maintenant ancienne fourmillent d'exercices sur le passage des anciennes unités aux nouvelles, et inversement ; Il y a, de même, actuellement lieu d'habituer les élèves à la conversion des unités centésimales en unités sexagésimales, et à la conversion inverse.*

Je ne puis entrer ici dans le détail de l'historique de l'introduction des nouvelles unités, ni dans la discussion des raisons pour lesquelles on doit leur donner la préférence ; je ne puis mieux faire que de renvoyer à une excellente Notice due au commandant Guyou, membre de l'Académie des Sciences et du Bureau des Longitudes : Sur l'application de la division décimale du quart de cercle à la pratique de la navigation (Annuaire du Bureau des Longitudes pour l'an 1902).

J'emprunte seulement à cette Notice une remarque de nature à justifier les espérances de disparition relativement prochaine et presque totale[2]

de l'usage des anciennes unités : les jeunes gens qui auront été habitués aux unités nouvelles ne se résigneront pas facilement à se plier aux complications qu'entraîne l'emploi des subdivisions sexagécimales.
En terminant, je tiens à remercier les Maîtres de l'enseignement secondaire qui ont bien voulu me faire part de leurs observations sur mes livres ; leur collaboration m'est précieuse et j'espère qu'ils me la continueront. Je souhaite que ce nouveau livre reçoive d'eux aussi bon accueil que les précédents ; leurs encouragements sont la meilleure récompense de mon travail.

Emile BOREL

[1] il m'a paru nécessaire de placer l'usage des tables dès le second chapitre c'est-à-dire aussitôt que possible. Il était d'usage de rejeter cette partie essentielle à la fin de la trigonométrie, parce qu'on avait l'habitude de parler auparavant de la construction des tables, heureusement absente du nouveau programme. Il est essentiel de familiariser le plus tôt possible les élèves avec l'emploi des tables, et, pour celà, je crois qu'il est bon de se servir d'abord des tables à quatre décimales, qui suffisent à la plupart des besoins pratiques ; j'ai tenu, malgré les dimensions restreintes de ce livre, à y insérer des tables à quatre décimales comprenant : logarithmes des nombres, antilogarithmes, logarithmes des fonctions circulaires de demi-grade en demi-grade et de demi-degré en demi-degré ; il est désirable que l'élève fasse très grand usage de ces petites tables, pour la résolution de nombreux problèmes pratiques.

[2] Je dis presque totale, parce que les astronomes les utiliseront encore pendant longtemps, par suite du nombre considérable d'observations anciennes et de calculs qui ont été publiés avec ces unités. Mais les astronomes eux-mêmes s'habitueront de plus en plus à employer uniquement les unités nouvelles dans tous leurs calculs, en faisant simplement la conversion en unités anciennes au commencement ou à la fin.

PRINCIPES FONDAMENTAUX

I.- mesure des arcs

1. But de la trigonométrie :
On sait que pour construire une figure géométrique composée de portions de droites, il n'est pas toujours nécessaire d'en connaître tous les éléments ; par exemple, pour construire un triangle, il suffit de connaître deux des côtés et l'angle qu'ils comprennent ; pour construire un parallélogramme il suffit de connaître deux côtés non égaux et une diagonale,etc. Certains éléments de ces figures sont donc déterminés par la connaissance de certains autres éléments des mêmes figures ; une construction soigneusement faite, avec la règle, l'équerre, le compas, le double décimètre et le rapporteur permet d'effectuer cette détermination avec une certaine approximation : par exemple si nous construisons un triangle dont deux des côtés mesurent 32mm et 45mm, l'angle compris entre ces côtés étant la moitié d'un angle droit, nous constatons que le troisième côtés mesure environ $31^{mm},9$. Le but de la trigonométrie,c'est de résoudre par calcul les questions analogues à la précédente, c'est-à-dire de fournir un procédé de calcul permettant, lorsque l'on donne numériquement des éléments (longueurs ou angles) qui suffisent à construire une figure géométrique, de déterminer les valeurs numériques des autres éléments de la figure (longueurs ou angles). IL s'agit ici de figures exclusivement composées de portions de droites ; comme de telles figures peuvent toujours être décomposées en triangles, on peut dire aussi que le but de la trigonométrie est la résolution des triangles, c'est-à-dire le calcul des éléments inconnus d'un triangle lorsqu'on connaît un nombre d'éléments suffisant pour pouvoir construire ce triangle[1]. Pour atteindre ce but, il est nécessaire de définir la mesure des angles d'une manière plus précise qu'on ne le fait en géométrie, et il est commode de s'occuper d'abord de la mesure des arcs ; car bien que ces deux questions : mesure des angles, mesure des arcs soient exactement équivalentes, l'exposition de la seconde est plus claire que l'exposition de la première, parce que la notion d'arc est plus concrète que la notion d'angle.

[1] Nous ne nous occupons que de la Trigonométrie rectiligne, la Trigonométrie sphérique se propose un but analogue pour les figures tracées sur la sphère et composées d'arcs de grands cercles.

IV.1.1.7. " Trigonométrie" à l'usage des classes de mathématiques de l'enseignement secondaire (C-4)
(lycées et collèges de garçons et de jeunes filles)
Pierre CHENEVRIER 1934, Hachette.

Ce livre suit les instructions officielles du 30 avril 1931
Afin de mettre en évidence les intentions didactiques de l'auteur, je reproduis ici quelques extraits de la préface ainsi que l'introduction du chapitre premier.

PRÉFACE

Le présent Cours de Trigonométrie est le développement du programme de la classe de Mathématiques des Lycées et Collèges de garçons et de jeunes filles conformément à l'arrêté et aux instructions ministerielles du 30 avril 1931.

J'ai suivi l'ordre du programme. L'ouvrage débute par l'étude des fonctions circulaires : sinus, cosinus, tangente, cotangente. J'ai laissé de côté la sécante et la cosécante qui ne sont d'aucune utilité. J'aurais volontiers sacrifié la cotangente puisque la tangente suffit amplement; mais sur ce point j'ai voulu me conformer à l'usage.

J'ai insisté sur les propriétés des sinus et tangentes des petits arcs. Les élèves les confondent volontiers avec l'arc mais, le plus souvent, sans se rendre compte de ce qu'ils font. Les physiciens ne seront pas fâchés, je le pense, si leurs élèves sont un peu plus avertis en cette matière.

Je ne saurai trop insister sur la nécessité de savoir par cœur, sans aucune hésitation, les formules fondamentales du cours. Je les ai écrites plusieurs fois dans le texte, à dessein, afin que leur lecture répétée facilite l'assimilation. Je les ai groupées à la fin du volume dans un formulaire que les élèves devront lire et relire. Je constate trop souvent, chez des candidats aux grandes Écoles, une ignorance telle de ces résultats, qu'il me faut insister de la façon la plus formelle sur la nécessité de les savoir

J'ai indiqué, conformément au programme, comment on devait utiliser les tables de logarithmes à cinq décimales. J'ai sous-entendu l'usage des tables à quatre décimales. Qui peut le plus, peut le moins. Mais je conseille également l'usage des tables naturelles, aussi commodes et quelquefois plus pratiques que les tables logarithmiques. Les élèves doivent être habitués à utiliser concurremment les deux tables et à donner, le cas échéant, leur préférence à celle dont l'usage est le plus pratique. Ajouterai-je que la plupart de mes élèves ne savent pas calculer, à l'aide des tables logarithmiques, les sinus et les tangentes des petits angles. J'ai expliqué les calculs à faire dans ce but et j'ai préféré ne pas renvoyer le lecteur aux notices souvent trop condensées qui accompagnent les tables logarithmiques et expliquent leur usage.

Sur les équations trigonométriques le programme est rédigé en des termes assez vagues. Il indique des « exercices sur la résolution et la discussion de quelques équations trigonométriques simples ». On ne sait où s'arrête cette simplicité. Le fait n'est pas gênant pour un professeur qui doit savoir où il limitera l'effort de ses élèves; il l'est plus pour un examinateur qui choisit un texte d'examen. Je me suis borné au cas où l'équation peut se ramener à une équation entière dont l'inconnue est l'une des fonctions circulaires des arcs cherchés ou la tangente des arcs moitiés C'est par des procédés de lecture, par l'examen attentif des divers termes de l'équation proposée que je veux habituer l'élève à trouver l'inconnue qui s'impose. J'estime ces errements plus éducatifs que des changements de x en $-x$, de x en $\pi - x$, de x en $x + \pi$ dont le succès désigne $\cos x$, $\sin x$ ou $\operatorname{tg} x$ comme inconnue de choix et que les élèves prennent l'habitude de faire mécaniquement, sans même regarder un instant l'équation qu'on leur propose.

J'ai essayé de montrer pourquoi on indique d'habitude deux groupes de relations dans les triangles. J'ai sacrifié un troisième groupe qui tenait, à mon sens, un rang auquel il n'avait pas droit, à côté des deux autres. J'ai considéré enfin les triangles rectangles comme un cas particulier et je ne leur ai réservé aucun chapitre spécial.

Le programme se termine par les mots : « Résolution des triangles ». Il s'agit évidemment d'abord des quatre cas classiques. Le programme vise-t-il autre chose ? C'est à nous de décider. J'ai ajouté un chapitre consacré aux cas non classiques de résolution. Je me borne à calculer les grandeurs usuelles d'un triangle en fonction du côté a et des angles et je traite quelques exemples de résolution. Je n'ai fait aucune théorie ni aucune classification. Chaque fois que je l'ai pu simplement, j'ai résolu le problème d'algèbre correspondant relatif au calcul préalable des côtés inconnus. Qu'on veuille bien voir dans ces calculs un souci de vérifier une discussion quelquefois compliquée et non un accès passager de trigonite, maladie à la mode depuis quelques années.

Enfin, malgré le mutisme du programme, j'ai cru devoir dire un mot du quadrilatère inscriptible et surtout des applications topographiques de la trigonométrie. Le chapitre correspondant est le dernier. Il peut être négligé, faute de temps, mais non sans inconvénients, à mon sens.

Des exercices sont proposés à la fin des chapitres. On trouvera, à la fin de l'ouvrage, des énoncés proposés au Baccalauréat. ... »

« **1. — But de la trigonométrie.** — Des relations métriques dans les triangles ont été établies en géométrie. On a, en particulier, appris à calculer, en fonction des mesures des côtés, les mesures des diverses grandeurs habituellement considérées dans un triangle : hauteurs, médianes, bissectrices, rayons des cercles remarquables, surface, etc.... Le triangle étant déterminé par la donnée de ses trois côtés, il était logique de résoudre ces problèmes. Toutefois le calcul des angles n'a pas été fait.

De même les calculs des mesures des grandeurs précitées n'a pas été fait quand le triangle est déterminé par des données dont certaines sont angulaires. Quelques cas particuliers ont pu être traités comme celui du triangle rectangle isocèle ou celui du triangle équilatéral, mais les formules générales de la géométrie du triangle ne font pas intervenir les angles.

La trigonométrie, comme son nom l'indique, a eu d'abord pour but de combler cette lacune par l'introduction des angles dans les calculs relatifs aux triangles. Puis ce but a été dépassé et la trigonométrie a été utilisée et a rendu des services indépendamment de tout calcul de triangle. Elle est aujourd'hui indispensable pour comprendre les mathématiques les plus simples.

Les chapitres qui vont suivre contiennent l'essentiel de la trigonométrie plane. Celle-ci permet de résoudre, comme on l'a fait pressentir ci-dessus, des questions simples relatives aux triangles. Il existe une trigonométrie sphérique, dont nous ne parlerons pas, et qui permet de résoudre des problèmes analogues relatifs aux trièdres. L'usage en est constant en astronomie.

2. — Fonctions circulaires. — La trigonométrie repose sur l'introduction de fonctions d'une variable dites *fonctions circulaires*. Ces fonctions, dans lesquelles la variable est la mesure d'un arc de cercle ou de l'angle au centre associé, vont être définies plus loin. Il est nécessaire, auparavant, de résumer, en les précisant, des notions acquises antérieurement et sur lesquelles il est indispensable de n'avoir aucun doute. »

IV.1.1.8. " Trigonométrie" classe de Mathématique (garçons et jeunes filles) par André MUXART, 1931, A. Colin (M-2)

Ouvrage conforme aux programmes de 1925 modifiés en 1931.

PROGRAMMES OFFICIELS DU 3 JUIN 1925

MODIFIÉS LE 30 AVRIL 1931

(Enseignement secondaire des garçons et des jeunes filles)

TRIGONOMÉTRIE

CLASSE DE MATHÉMATIQUES

Extension de la notion d'arc et d'angle. Fonctions circulaires (sinus, cosinus, tangente et cotangente).

Théorie des projections. Somme géométrique des vecteurs.

Formules d'addition, formules de multiplication par 2.

Toutes les fonctions circulaires de l'arc a s'expriment rationnellement en fonction de tg $\frac{a}{2}$.

Transformer en produit la somme ou la différence de deux fonctions circulaires, sinus, cosinus. Problème inverse.

Usage des tables de logarithmes à quatre ou cinq décimales.

Exercices sur la résolution et la discussion de quelques équations trigonométriques simples.

Relations entre les côtés et les angles d'un triangle. Résolution des triangles.

CHAPITRE I

« 1. — **La Trigonométrie.**

La Trigonométrie est une branche de l'Algèbre dans laquelle sont étudiées certaines fonctions particulières. Elle se rattache aussi à la Géométrie, car elle permet d'établir un grand nombre de formules dont les plus usuelles renferment les côtés et les angles des triangles. De là résulte l'importance des calculs trigonométriques pour les applications des mathématiques : l'Astronomie, la Géodésie, la Cartographie ne sauraient se passer de son concours. De même, en Physique, la théorie des mouvements vibratoires et des ondulations a pour fondement la connaissance des fonctions trigonométriques. »

IV.1.1.9. Programme officiel - classe de 3ème 1935

PROGRAMME OFFICIEL

ARITHMÉTIQUE ET ALGÈBRE

Propriétés des sommes, différences, produits, puissances des nombres entiers ou fractionnaires.
Rapport de deux grandeurs. Grandeurs proportionnelles.
Notions concretes sur les nombres positifs et négatifs. Opérations. Applications.
Monômes, polynômes, termes semblables; addition, soustraction, multiplication des monômes et des polynômes. Division des monômes.
Équations numériques du premier degré à une ou deux inconnues.

GÉOMÉTRIE

Points qui partagent un segment de droite dans un rapport donné.
Droites paralleles et lignes proportionnelles.
Triangles semblables.
Relations métriques dans un triangle rectangle.
Propriétés des sécantes dans le cercle.
Construction de la quatrième proportionnelle et de la moyenne proportionnelle.
Polygones réguliers : carré, hexagone, triangle équilatéral.
Mesure de la circonférence de cercle (énoncé).
Mesure des aires du rectangle, parallélogramme, triangle, trapèze, des polygones, du cercle.
Rapport des aires de deux triangles semblables.

IV.1.1.10. Algèbre et ,notions de Trigonométrie
à l'usage de l'enseignement secondaire
(classe de seconde et première)
BRACHET, DUMARQUE. contenant 785 exercices et problèmes
1937. [B-3]

La Table des matières nous indique la place de la Trigonométrie.

Livre I	page 1 à 55	en trois chapitres	: calcul algèbrique (révision)
Livre II	page 63-117	en cinq chapitres	: "le premier degré"
Livre III	page133-214	en six chapitres	: "le second degré - la fonction homographique"
Livre IV	page232-254	en quatre chapitres	: "progressions et logarithmes"

NOTIONS DE TRIGONOMÉTRIE

Nous pouvons aussi examiner les exercices et les problèmes proposés en trigonométrie 83 pour la classe de seconde et 45 pour la classe de première.
On peut repérer dans l'ordre pour :

classe de seconde :

- des exercices de conversion "grade" - "degré-minute-seconde"
- des exercices de recherche de sinus, cosinus, tangente, cotangente à l'aide de la table de valeurs (angles aigus)
- des exercices de recherche de valeur de l'angle à l'aide de la table
- construction de la représentation graphique des fonctions sinus et tangente, à démonter
- exercices de recherche de sinus, cosinus, tangente, cotangente pour des angles dont les mesures sont donnés en "degré-minute", "grade et centigrade", supérieures à 90° (à 100 gr), ou négatives.
- exercices réciproques
- construction des représentations graphiques de sinus, cosinus pour $x \in [0\ ;\ 360°]$ et tangente pour $x \in [0\ ;\ 180°]$
- exercices de résolution d'équations trigonométriques
- exercices de résolution d'inéquations trigonométriques
- exercices de résolution de triangle : triangles rectangles
- exercices de résolution de triangle : triangles quelconques
- exercices de calcul d'aire : parallélogramme
  quadrilatère convexe
  segment circulaire

Classase de première :

- exercices fondés sur la formule : sin i = sin r (optique)
- exercices de résolution d'équations trigonométriques
- exercices de résolution d'équations trigonométriques avec paramètre
- exercices sur des calculs de coordonnées de vecteurs
- exercices sur les formules de transformations
- exercices de résolution de triangle
- exercices d'application de la trigonométrie à des problèmes de géométrie dans l'espace (parallélipipède tétraèdre, sphère).

IV.1.1.11 "leçon d'algèbre" classes de 2ème et 1ère (A.A'. B) [C-2]
H. Commissaire. 9ème ed. augmentée de notions de trigonométrie, 1939.

programme de 1931. Instructions ministèrielles de 1937 pour la trigonométrie.

AVERTISSEMENT

L'application du nouveau plan d'études entraîne la disparition de la Trigonométrie du programme de la classe de première et la répartition entre la classe de seconde et celle de première des notions d'algèbre précédemment enseignées en seconde. La septième édition de ces « Leçons d'Algèbre » a été entièrement refondue pour tenir compte de ces modifications.

La première partie du volume est destinée aux élèves de seconde. Elle renferme les éléments du Calcul algébrique et l'étude des équations du premier degré. La représentation graphique d'un binôme du premier degré fait suite à l'étude de l'équation du premier degré à une inconnue. Elle vient l'illustrer par l'interprétation géométrique et en faciliter la compréhension.

La deuxième partie contient le développement du programme d'algèbre de la classe de première, notamment la résolution de l'équation et l'étude du trinôme du second degré. Pour la discussion des problèmes du second degré je donne la méthode dont l'application nécessite le moins d'efforts et qui a, en outre, l'avantage de conduire aux résultats en évitant tout calcul inutile.

Comme dans les éditions précédentes, plus de six cents exercices donneront au lecteur le moyen d'acquérir la pratique du calcul algébrique et les méthodes de l'algèbre élémentaire.

IV.1.1.12 " Algèbre et géométrie" BRACHET et DUMARQUE (B-4)
1280 exercices et problèmes, 1940.
classes de 3ème A et B - 3ème année des E.P.S.

Nous ne reproduisons ici que la partie "géométrie" du programme, programme qui repose sur les instructions du 30 septembre 1938.

GÉOMÉTRIE

I. — *Revision d'une partie du programme de la classe précédente et compléments.*

Exemples de lieux géométriques : points équidistants de deux points donnés ou de deux droites données; points situés à une distance donnée d'une droite donnée; points d'où l'on voit un segment de droite donné sous un angle donné. Applications à des problèmes de construction : cercle circonscrit à un triangle, cercle inscrit dans un triangle, tangentes menées d'un point à un cercle.

Similitude des triangles. Similitude des polygones réguliers, des cercles, de deux arcs de cercle dont les angles au centre sont égaux. Similitude de deux rectangles.
Projections orthogonales. Sinus, cosinus, tangente d'un angle dont la mesure est comprise entre 0 degré et 180 degrés. Usage des tables de valeurs naturelles.

II. — *Programme particulier à la classe.*

1° Géométrie plane.

Relations métriques dans le triangle rectangle. Relation entre le sinus et le cosinus d'un angle.
Relations métriques relatives à deux droites concourantes, sécantes à un même cercle. Application à la construction d'une quatrième proportionnelle, d'une moyenne géométrique, d'un segment dont la longueur est une racine carrée.
Relations entre le côté, les rayons des cercles inscrit et circonscrit, pour le carré, l'octogone, l'hexagone, le triangle régulier (ou équilatéral).
Unités d'aire et aire du rectangle. Aires du triangle, du trapèze. Aire des polygones. Rapport des aires de deux triangles semblables.
Longueur d'un arc de circonférence et aire d'un secteur de cercle. (On admettra que la longueur de la circonférence est $2\pi R$ et que l'aire du cercle est πR^2.)

2° Géométrie dans l'espace.

(Les démonstrations ne sont pas exigées, le maître étant juge de la possibilité de les établir suivant le niveau de sa classe.)
Détermination d'un plan.
Notions sur les droites et les plans parallèles.
Définition d'un dièdre, d'une surface prismatique, d'un prisme, d'un parallélépipède, d'une surface cylindrique, d'un cylindre.
Droites et plans perpendiculaires.
Section droite d'un dièdre, d'une surface prismatique ou cylindrique.
Principes de la représentation des figures de l'espace par la méthode des projections orthogonales; application à des exemples simples : cube, parallélépipède droit.
Génération des surfaces coniques et des corps de révolution.
Sphère (notions succinctes en vue d'applications usuelles et d'applications à la sphère terrestre).
Pratique du calcul de quelques aires et volumes (parallélépipède, prisme, cylindre de révolution, pyramide, cône de révolution, sphère). Exercices de changements d'unités concernant les volumes.

Si nous feuilletons ce livre, nous trouvons ce qu'illustre cet extrait de la table des matières.

GÉOMÉTRIE

PREMIÈRE PARTIE — RÉVISION ET COMPLÉMENTS

DEUXIÈME PARTIE. — **PROGRAMME PARTICULIER A LA CLASSE**

I. — GÉOMÉTRIE PLANE (SIMILITUDE. AIRES).

En examinant de plus près, le contenu consacré au cours sur la trigonométrie, nous pouvons remarquer le développement suivant :

" CHAPITRE III premiers éléments de trigonométrie

§ 1. rapport trigonométriques d'un angle aigu ou obtus

- angle aigu : définitions posées dans le triangle rectangle
angles complémentaires : sinus, cosinus, tangente,
cotangente d'angles complémentaires

- angle obtus :

on se ramène au cas des angles aigus au moyen des angles supplémentaires
on pose par définition :

106. **définitions**.- 1° *Le sinus d'un angle obtus est égal au sinus de son supplément ;*
2° Le cosinus, la tangente et la cotangente d'un angle obtus sont respectivement égaux aux opposés du cosinus, de la tangente et de la cotangente de son supplément.

- variation des rapports trigonométriques (étude des fonctions sinus, cosinus - courbe sur 0 , 180°)

- un paragraphe est consacré au lien entre "tangente et pente des axes pareillement gradués"

§ 2. Usage

§ 2. Usage des tables de trigonométrie

§ 3. Application au triangle rectangle et aux projections orthogonales

Ensuite viennent 64 exercices qui suivent le cours. On peut noter à la fin, une batterie de 5 exercices lebéllés "exercices litteraux".

Voici l'extrait :

181. Un mât vertical de 10 m. de long donne une ombre de 15 m. de long. Chercher l'angle de la direction du soleil avec le sol supposé horizontal.

182. Deux observateurs placés en A et B sur une route rectiligne horizontale à 650 m. l'un de l'autre voient un avion M passer juste au dessus de cette route. Le rayon visuel du premier fait un angle de 37° avec AB; le rayon visuel du second fait un angle de 54° avec BA. A quelle hauteur se trouve l'avion? (Étant donné la précision réduite des mesures, on néglige la distance au sol de l'œil de l'observateur.)

Exercices littéraux.

183. Dans un cercle de rayon R, on trace deux rayons OA et OB faisant un angle $2x$ et on joint AB. Exprimer la longueur de la corde AB en fonction du diamètre 2R et de $\sin x$.

184. Soit un demi-cercle de diamètre AB = 2R et la tangente au point B; une sécante issue de A coupe en C le cercle et en D la tangente.
1° Calculer en fonction de R et de l'angle BAD = x les longueurs AD et AC.
2° Déterminer x pour que l'on ait AD = 4 AC.

185. Soit un cercle de diamètre AB, de centre O et de rayon R. Une sécante issue de B faisant avec AB un angle x, coupe en M le cercle et en P la tangente au point A. Les tangentes en M et A se coupent en un point N. Évaluer en fonction de R et de x : 1° les segments MA, MB; 2° les segments AP, BP, MP; 3° les segments ON, NM, NA, NP.

186. Soit un triangle ABC. Connaissant les angles B, C et les côtés opposés b, c:
1° Évaluer la hauteur AD. (Deux cas suivant que les angles B et C sont tous deux aigus, ou que l'un est obtus);
2° Établir la formule $a = b \cos C + c \cos B$.

187. Soit un segment BC = a et l'arc capable de l'angle x décrit sur BC comme corde. Calculer le rayon R de cet arc et la distance de son centre à AB en fonction de a et x. (Deux cas de figure : x aigu, x obtus.)

"Trigonométrie - Algèbre" avec 158 exercices et problèmes
R. MAILLARD & A. MILLET, classe de Philosophie, 1953.

Programme du 24 juin 1948

PROGRAMME

CLASSE DE PHILOSOPHIE

Trigonométrie et Algèbre

Extension de la notion d'arc et de la notion d'angle. Fonctions circulaires (sinus, cosinus, tangente): périodicité.
Variation des fonctions circulaires; représentation graphique.

Définition et signification géométrique de la dérivée d'une fonction. Dérivée d'une constante. Dérivée par rapport à la variable d'une somme, d'un produit, d'une puissance, d'un quotient.
Utilisation de la dérivée pour l'étude de la variation et de la représentation graphique de fonctions de la forme :

$$ax^2 + bx + c; \quad \frac{ax+b}{a'x+b'}; \quad x^3 + px + q; \quad ax + b + \frac{c}{x}$$

à coefficients numériques. (On admettra, sans démonstration, les théorèmes qui permettent de déduire le sens de variation d'une fonction du signe de sa dérivée.)

Valeur algébrique de la vitesse à un instant quelconque d'un mobile animé d'un mouvement rectiligne défini par son équation horaire.

Dérivée de l'aire limitée par la courbe représentative d'une fonction positive, l'axe des abscisses, une ordonnée fixe et une ordonnée variable. Notion de fonction primitive. Applications simples.

« PRÉFACE

LE PRÉSENT OUVRAGE est conforme au programme de la classe de Philosophie.

Les élèves de la classe de Philosophie doivent avoir une idée précise des notions inscrites à leur programme de Mathématiques, même s'ils ne sont pas entraînés à la technique opératoire. C'est pourquoi nous avons développé les explications, surtout pour ce qui est des définitions et des propriétés fondamentales, et donné de nombreux exemples, toujours simples. Au contraire, nous avons allégé les calculs au maximum.

L'étude des *fonctions circulaires* est conduite aussi loin que le permet une interprétation large du programme. Nous avons voulu ainsi faciliter les applications des phénomènes oscillatoires qui figurent au programme de Physique. L'usage des *tables de valeurs numériques* est expliqué; pour éviter des erreurs fréquentes dans la détermination du sens de la différence tabulaire, nous avons limité les valeurs de la table aux seules fonctions : sinus et tangente. La cotangente ne figure d'ailleurs pas au programme. L'inconvénient des tables à double entrée est, ainsi, évité. ... »

IV.1.1.13. "l'après-guerre...

Une série d'ouvrages nous apportent un témoignage sur les programmes élaborés entre 1945 et 1950. Citons ces documents afin de permettre qu lecteur de retourner aux sources.

- "Eléments de géométrie" BRACHET, 1946. classes de 5ème, 4ème, 3ème.

Il contient le programme officiel de 1945.

PROGRAMME OFFICIEL

Classe de Cinquième.

Ligne droite. Demi-droite. Segment de droite. Mesure d'un segment.

Figures planes. Cercle ou circonférence. Arcs. Angles. Angle droit. Mesure des angles en degrés.

Angles formes par deux droites. Droites perpendiculaires.

Les deux premiers cas d'égalité des triangles. Triangle rectangle. Triangle isocèle (la définition et l'utilisation de la symétrie par rapport à une droite sont facultatives).

Troisième cas d'egalité des triangles. Cas d'égalité des triangles rectangles.

Constructions graphiques. Usage de la règle, du compas, de l'équerre, du double-décimètre, des calques.

Classe de Quatrième.

I. — Triangle. Triangle isocèle. Cas d'égalité des triangles. Cas d'égalité des triangles rectangles.

Inegalités dans le triangle. Comparaison des longueurs de la perpendiculaire et des obliques menées par un point a une droite. Regions séparées par la mediatrice d'un segment.

II. — Droites parallèles (la notion de bande, la définition et l'utilisation de la symétrie par rapport à un point sont facultatives). Perpendiculaires communes. Angles avec une secante. Tracé des parallèles. Angles a côtés parallèles.

Angles exterieurs d'un triangle. Somme des angles d'un triangle.

Definition de polygones : quadrilatère, trapèze, parallelogramme, rectangle, losange, carré.

Proprietes du parallélogramme, du rectangle, du triangle rectangle (médiane relative a l'hypoténuse), du losange; théorèmes réciproques.

Somme des angles d'un polygone convexe (angles intérieurs, angles extérieurs).

III. — Comparaison, dans un cercle, des arcs, des cordes, des distances du centre à ces cordes.

Intersection d'une droite et d'un cercle: tangente. Positions relatives de deux cercles.

Constructions élémentaires sur la droite et le cercle. Construction de triangles.

Comparaison de l'angle inscrit et de l'angle au centre interceptant le même arc. Propriétés des angles d'un quadrilatère inscriptible (convexe ou non convexe)

Classe de Troisième.

I. — Notion, d'après des exemples, de théorèmes réciproques, de conditions nécessaires, de conditions suffisantes, de proprietes caracteristiques.

Methode de resolution des problèmes d'après des exemples (recherche de propriétés, lieux géométriques, constructions) : analyse, synthèse, discussion; problèmes équivalents.

Étude de quelques lieux geometriques : points équidistants de deux points donnes ou de deux droites donnees; points situes à une distance donnée d'une droite donnee; points d'où l'on voit un segment donne sous un angle donné.

Étude de quelques problèmes de construction : cercle circonscrit à un triangle, cercle inscrit dans un triangle, tangentes menées d'un point à un cercle, tangentes communes à deux cercles.

II. — Rapport de deux segments. Point divisant un segment dans un rapport donné.

Triangles semblables. Cas de similitude.

Relations métriques dans le triangle rectangle. Application à la construction d'une moyenne géometrique, d'un segment dont la longueur est une racine carrée.

III. — Projections orthogonales. Sinus, cosinus et tangente d'un angle compris entre zéro et deux droits. Relation entre le sinus et le cosinus d'un angle. Usage des tables de valeurs naturelles.

IV. — Polygones réguliers : carré, octogone, triangle équilatéral. Valeur des angles; construction; relations entre le côte et les rayons des cercles inscrit et circonscrit.

Longueur d'un arc de circonférence (on admettra que la longueur de la circonférence est $2\pi R$).

V. — Aires. Unités. Aires du rectangle, du parallelogramme, du triangle, du trapèze. Aire d'un polygone. Rapport des aires de deux triangles semblables.

Aire du secteur de cercle (on admettra que l'aire du cercle est πR^2).

Le chapitre IV est consacré à la trigonométrie sous le libellé "éléments de trigonométrie". On peut voir que "le sinus et le cosinus d'un angle saillant" sont définis à partir du "cercle trigonométrique".

La table des matières illustre la place de la trigonométrie dans le développement du cours qui suit scrupuleusement l'ordre du programme.

En voici un extrait :

TABLE DES MATIÈRES

- "géométrie" par une réunion de professeurs, 1950. classes de 5ème, 4ème, 3ème. Cet ouvrage contient le programme du 18 avril 1947. La rédaction est la même que celle du programme précedent, seul cet extrait varie :

> *" II. Rapport de deux segments. Points divisant un segment dans un rapport donné. Théorème de Thalès.*
> *Application à la construction du produit d'un segment par une fraction, d'une quatrième proportionnelle, des points divisant un segment dans un rapport donné. Triangles semblables. Cas de similitude.*
> *Relations métriques dans le triangle rectangle. Relation entre les segments déterminés par un cercle sur deux droites qui se coupent.*
> *Construction d'une moyenne géométrique, d'un segment dont la longueur est une racine carrée."*

Le chapitre XXXIX de ce livre est intitulé :

Notions de trigonométrie <u>pratique</u>

Une partie de ce chapitre est consacrée aux "applications des rapports trigonométriques"
Voici maintenant un extrait du sommaire situant la place du chapitre trigonmétrie.

- "mathématiques" BENOIT et CANAPALE, 1948
  classe de troisième classique et moderne.

La table des matières nous indique :

Deuxième partie : Géométrie
Chapitre III : Révision. lieux géométriques. constructions
Chapitre IV : Théorème de Thalès
Chapitre V : Triangles semblables

CHAPITRE VI. — **Relations métriques et trigonométriques dans le triangle rectangle.**

I. Relations métriques.

II. Relations trigonométriques.

Chapitre VII : Polygones réguliers

Aires des surfaces planes

- "Arithmétique - algèbre - géométrie". MONGE et GUINCHAN, 1952

  classe de 3ème (enseignement long)

La table des matières pour la partie "géométrie" situe le cours de trigonométrie.

GÉOMÉTRIE

- "Algèbre et trigonométrie" ROUX, 1950

  classe de première (sections C et moderne)

Ici nous trouvons les programmes du 18 avril 1947 pour cette classe.

Il stipule :

Trigonométrie

Extension de la notion d'arc et de la notion d'angle.

Fonctions circulaires (sinus, cosinus, tangente, cotangente). Périodicité. Relations entre les fonctions circulaires d'un même arc.

Fonctions circulaires correspondant à des arcs opposés, à des arcs supplémentaires, à des arcs complémentaires. Valeurs des fonctions circulaires pour quelques arcs remarquables.

Equations : $\sin x = \sin a$, $\cos x = \cos a$, $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$.

Somme géométrique de vecteurs ; projection d'une somme géométrique sur un axe.

Formules donnant le cosinus, le sinus, la tangente de la somme et de la différence de deux arcs.

Expressions de $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{tg} a$ en fonction de $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$.

Usage des tables de sinus, cosinus, tangentes.

Problèmes simples, d'origine géométrique, conduisant à une équation du premier ou du second degré quand on prend comme inconnue un sinus, un cosinus ou une tangente.

Quant à l'ouvrage, il place la trigonométrie à la fin comme nous pouvons le constater :

336 TRIGONOMÉTRIE

- "Algèbre et trigonométrie" LEBOSSE et HEMERY
  classe de première des lycées et des collèges, 1951.

Cet ouvrage contient les programmes de 1er mai 1947, identiques en tout point, à ceux cités plus haut (18 avril 1947)

Nous apprenons toutefois que les classes de première classique A et B ont un horaire hebdomadaire de 1 h 30 obligatoire et 1 h 30 facultative ; la trigonométrie n'est pas une partie obligatoire.

Les classes de première classique C et moderne, elles, ont un horaire hebdomadaire de quatre heures. La trigonométrie constitue une partie obligatoire.

En consultant l'ouvrage nous repèrons qu'un paragraphe est consacré à :"résolution trigonométrique d'un problème". Il contient plusieurs exemples dont un est donné ici :

278. Résolution trigonométrique d'un problème.

La résolution d'un problème d'origine géométrique peut souvent être obtenue par la détermination d'un angle ou d'un arc de la figure. En prenant cet angle, ou cet arc comme inconnue, on est conduit à une équation trigonométrique, qu'il faut résoudre et discuter en adoptant les mêmes principes que pour la résolution algébrique des problèmes.

279. Exemple I. — *Trois points B, O, A sont alignés dans cet ordre et tels que $OA = 3a$ et $OB = a$. Les demi-droites AX et BY sont respectivement perpendiculaires à AB en A et B, d'un même côté de AB. Un angle droit, de sommet O, tourne autour de O et ses côtés coupent AX en P et BY en Q. Déterminer l'angle aigu AOP de façon que $AP + BQ = 4a$* (fig. 125).

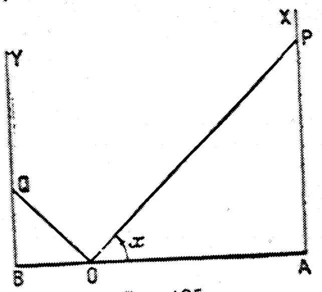


Fig. 125.

Soit $AOP = x$. On a : $AP = 3a \operatorname{tg} x$; $BQ = a \operatorname{cotg} x$.

Donc : $3a \operatorname{tg} x + a \operatorname{cotg} x = 4a$

ou $3 \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 4$

et tout angle aigu x solution de (1) fournira une solution du problème. En posant $\operatorname{tg} x = t$, on trouve :

$$3t^2 - 4t + 1 = 0 \quad \text{avec} \quad t > 0$$

soit $\qquad t' = 1 \quad$ et $\quad t'' = \frac{1}{3}$

et deux valeurs acceptables pour x : $x' = 45°$ et $x'' = 18°26'$.

- "mathématiques" MAILLARD et MILLET, 1954

. arithmétique - algèbre et trigonométrie - mécanique.

classe de sciences expérimentales

Nous découvrons ici, le programme du 24 juin 1948.

Nous en donnons l'extrait pour ce qui nous préoccupe.

PROGRAMMES DU 24 JUIN 1948

Classe de Sciences Expérimentales.

(Horaire hebdomadaire : quatre heures)

L'enseignement des Mathématiques, dans cette classe, a pour objet, non d'établir que l'ensemble des définitions et des théories qui le composent est cohérent et logique, mais d'apprendre aux élèves à appliquer correctement les résultats à l'étude de problèmes concrets. Par conséquent, le professeur devra souligner la nécessité de certaines démonstrations sans s'astreindre à les exposer : il est préférable d'admettre certains résultats plutôt que de donner des démonstrations incomplètes ou approximatives.

Le programme et les commentaires qui l'accompagnent ont été détaillés de manière à limiter aussi nettement que possible les matières à enseigner et les développements à donner pour chacune d'elles. Ces indications sont impératives et l'enseignement magistral doit être très bref, réduit à l'essentiel. Les exercices seront multipliés. On écartera les problèmes d'un intérêt théorique; par contre, il sera fait un constant usage des applications numériques et des représentations graphiques à une échelle donnée sur papier millimétrique ou logarithmique.

ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE

Le programme d'Algèbre et de Trigonométrie est strictement limitatif. L'enseignement magistral de cette partie du programme a pour premier objet de préciser la nature des problèmes à résoudre et de faire nettement la part de ce qui est admis et de ce qui sera démontré. Les instructions qui suivent précisent l'esprit dans lequel il doit être donné.

Programme.

I. — Exercices de calcul algébrique. Rappel des propriétés des opérations, des égalités et des inégalités. Identités.

II. — Progressions arithmétiques et géométriques.

III. — Vecteurs. Rapports de deux vecteurs de même support ou de supports parallèles. Mesure algébrique d'un vecteur sur un axe. Abscisse d'un point. Formule de Chasles.

Projection orthogonale. Somme géométrique. Coordonnées rectangulaires d'un vecteur.

IV. — Extension des notions d'arc et d'angle. Sinus, cosinus, tangente d'un angle. Relations entre les sinus, cosinus et tangente d'un même angle.

Relations entre les éléments d'un triangle rectangle. Aire du triangle quelconque : $S = \frac{1}{2} bc \sin A$. Relations : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ dans un triangle quelconque.

V. — Notion de fonction d'une variable, d'accroissement, de fonction monotone. Représentation graphique.

VI. — Fonctions circulaires. Périodicité. Fonctions circulaires de :

$$-x,\quad \pi - x,\quad \pi + x,\quad \frac{\pi}{2} - x,\quad \frac{\pi}{2} + x$$

Équations : $\sin x = \sin a$; $\cos x = \cos a$; $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$.

Résolution, au moyen des tables, des équations :

$$\sin x = A;\quad \cos x = A;\quad \operatorname{tg} x = A.$$

VII. — Formules donnant le cosinus ou le sinus de la différence ou de la somme de deux arcs. Expressions de $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg} 2x$.

Instructions.

I. — *La définition des nombres algébriques et des opérations sur ces nombres, la démonstration de l'existence des solutions des équations du premier et du second degré et des systèmes d'équations du premier ont été données dans les classes antérieures. Elles seront admises. Les règles qui s'en déduisent seront énoncées avec netteté et appliquées à des exemples numériques. La discussion d'équations sera faite sur des exemples simples.*

II. — *Les progressions seront étudiées comme suites monotones. Leur terme général servira à donner les premiers exemples concrets de fonctions de nombres qui augmentent indéfiniment et de grandeur relative de ces nombres. La recherche de la somme sera faite en exercice. Les problèmes théoriques tels que l'insertion des moyens sont en dehors du programme.*

IV. — *Le calcul des médianes, bissectrices, hauteurs, des rayons des cercles inscrits et exinscrits, la résolution des triangles ne sont pas au programme.*

V. — *Les définitions seront précises, illustrées d'exemples. L'étude est naturellement limitée aux fonctions définies et continues dans un intervalle.*

VI. — *Les élèves seront entraînés à utiliser les tables de valeurs naturelles et les tables de logarithmes à cinq décimales ; en particulier, ils seront entraînés à représenter graphiquement la fonction $y = \sin(ax + b)$, pour des valeurs numériques de a et de b.*

La résolution des équations trigonométriques n'est pas au programme.

IV.1.1.14. "autour des années 60..."

Un ouvrage de 1955 :

"géométrie" BREARD

classe de 5ème, 4ème, 3ème

donne la place de trigonométrie :

- "arithmétique - algèbre - géométrie" THIBERGE et GILET, 1960

classe de 3ème (328 p)

Ce livre se réfère aux programmes de 1958.

l'examen de la table des matières montre que la trigonométrie se place en fin de parcours : - arithmétique

- algèbre
- géométrie

- "trigonométrie" THOVERT, 1963 [T-2]
  classe de première A', C, M, M'

Reproduisons ici la préface de Paul DUBREIL qui apporte une opinion sur la trigonométrie.

Préface

L'étude de la Trigonométrie doit apporter à nos élèves ***un ensemble de connaissances****, en particulier* ***un stock de formules****, dont l'importance* ***a été maintes*** *fois soulignée.* ***Avec le livre de M. THOVERT****, cette étude ne risquera* ***pas d'être aride*** *: les résultats* ***et les formules*** *s'obtiennent naturellement à partir d'idées* ***générales dégagées*** *avec une grande netteté. Ainsi, la distinction entre formules de* ***développement*** *(ou d'addition) et formules de factorisation est utilisée d'une* ***façon très heureuse****.*

Mais je crois qu'il y ***a plus*** *et que la véritable* ***originalité de ce livre est*** *de révéler si bien l'intérêt mathématique de la trigonométrie. C'est en trigonométrie que sont rencontrés pour la première fois des êtres multiformes, des* ***équations ayant*** *une infinité de solutions, des fonctions périodiques. C'est ici également que la Géométrie des éléments orientés se développe par la théorie des angles orientés, incontestablement plus difficile que celle des vecteurs.*

Aujourd'hui, cette difficulté ne peut plus être esquivée. Il n'est plus permis, me semble-t-il, d'orienter le plan en dessinant quelque part une flèche courbe. Le programme ne paraît d'ailleurs pas autoriser un tel escamotage (indigne des élèves aussi bien que des professeurs). Les méthodes ensemblistes qui, de plus en plus, régénèrent l'enseignement des Mathématiques, permettent, on le verra, de construire une théorie sérieuse, élégante... et simple. C'est un grand plaisir de voir apparaître ainsi les traits d'une Géométrie ensembliste *qui complète et rénove la Géométrie d'Euclide.*

Le chapitre sur les Inéquations immédiates *(du type* cos $x > m$ *par exemple) ne correspond pas à la lettre du programme. Cependant, presque toujours, le programme d'Algèbre mentionne, aussitôt après les équations d'un certain type, les inéquations du type correspondant ; s'agirait-il ici d'un oubli ? Quoi qu'il en soit, nous avons pensé que cette question facile devait figurer dans ce manuel, au moins à titre de complément. Cela permettra aux élèves de mieux s'entraîner à passer d'une relation formelle à la situation géométrique correspondante sur le cercle trigonométrique : c'est une gymnastique intellectuelle à laquelle ils doivent être rompus le plus vite et le mieux possible.*

Je remercie très vivement ***M***^me^ ***Jacques LEVY-BRUHL qui a relu une première rédaction*** *(conforme aux anciens programmes) et nous a communiqué d'intéressantes suggestions.*

Paul DUBREIL,
Professeur à la Sorbonne.

- "trigonométrie" LESPINARD et PERNET
  classe de mathématique (L-5)

Ce livre s'appuie sur le programme de 1962, la préface des auteurs en donne la teneur.

Le programme de Mathématiques Elémentaires de Mars 1962 prévoit la révision du programme de Trigonométrie de la classe de PREMIÈRE avec divers compléments.

Nous avons rappelé, dans la Première Partie, les éléments indispensables sur les angles orientés, l'étude complète étant faite dans la Deuxième Partie de l'ouvrage de Géométrie.

La Deuxième Partie de l'ouvrage développe le programme de la classe. La démonstration de la formule donnant cos (a + b) a été faite à l'aide du produit scalaire, et nous avons donné, conformément au programme, des applications trigonométriques en utilisant les nombres complexes, dont la théorie est développée en Arithmétique. Nous avons terminé l'étude des systèmes linéaires en indiquant les systèmes fondamentaux caractéristiques pour un triangle d'où on peut déduire de nombreux problèmes de trigonométrie.

Dans la Troisième Partie, non au programme de la classe de Mathématiques élémentaires, *nous avons développé la résolution des triangles qui est utile dans d'autres études, et où un bon élève pourra toujours puiser des exemples de problèmes formateurs.*

IV.1.1.15. Aujourd'hui...

Nous avons ici le programme de la classe de 3ème, arrêté le 22 juillet 1971 et les commentaires du 22 février 1973.

PROGRAMME POUR LA CLASSE DE TROISIÈME

(Arrêté du 22 juillet 1971)

Il est rappelé que les professeurs ont toute liberté pour choisir l'ordre dans lequel les différentes parties du programme sont étudiées.

L'importance de chacune d'elles et le temps à y consacrer ne sont pas proportionnels à la longueur de leur libellé : les questions qui ne figuraient pas dans les programmes antérieurs, ou qui n'y figuraient pas sous la même forme, ont fait, en général, l'objet d'une rédaction plus détaillée.

Les élèves ont déjà appris, en Quatrième, ce qu'est une démonstration. Cet effort sera poursuivi, à propos des questions d'algèbre et de géométrie propres à cette classe, dans le même esprit qu'en Quatrième.

On pourra adopter comme axiomes pour la géométrie ceux qui sont indiqués dans les commentaires; mais d'autres choix demeurent légitimes.

I. NOMBRES RÉELS, CALCULS ALGÉBRIQUES, FONCTIONS NUMÉRIQUES

1. Rappel des propriétés de l'addition, de la multiplication et de l'ordre définissant R comme corps totalement ordonné.

Somme, produit, quotient de nombres réels exprimés sous la forme $\frac{b}{a}$ (où a et b sont des nombres réels et $a \neq 0$).

Un nombre réel r est dit rationnel s'il existe deux entiers $a \neq 0$ et b tels que $ar = b$. Corps des nombres rationnels. Exercices de calcul dans ce corps.

2. On admettra que l'application $x \longrightarrow x^2$ de R dans R+ est surjective. Étant donné un nombre réel positif ou nul a, le symbole $\sqrt{a}$ ou $a^{\frac{1}{2}}$ désigne le nombre réel positif ou nul b, appelé racine carrée de a, tel que $b^2 = a$.

Utilisation de tables pour le calcul de valeurs approchées de $a^{\frac{1}{2}}$

Racine carrée d'un produit de nombres réels, de l'inverse d'un nombre réel strictement positif.

3. Exemples de fonctions polynomes. Exercices de calcul sur des fonctions rationnelles.

Fonction linéaire et fonction affine. Exemples de fonctions en escalier et de fonctions affines par intervalles; représentation graphique.

4. Mise en équations de problèmes variés, mathématiques ou non.

Exemples conduisant à une ou deux équations ou inéquations du premier degré à une ou deux inconnues, à coefficients numériques. Représentation graphique des solutions d'une équation ou d'une inéquation du premier degré à deux inconnues.

II. PLAN EUCLIDIEN

1. Introduction de la notion d'orthogonalité de droites, de directions de droites. Projection orthogonale sur une droite. Rapport de projection orthogonale d'un axe sur un axe. Symétrie de ce rapport.

2. Distance d (M, N) de deux points du plan. Norme d'un vecteur. Inégalité triangulaire. Deux points distincts M, N étant donnés, étude de l'ensemble des points O tels que :

$$d(M, N) = d(M, O) + d(O, N).$$

Pour tout triangle (ABC), la condition $d(A, C)^2 = d(A, B)^2 + d(B, C)^2$ équivaut à l'orthogonalité des droites AB et BC (Pythagore).

Repères orthonormés. Expression de la distance de deux points.

Structure du plan euclidien sur R^2 (on pourra l'admettre partiellement ou totalement).

III. GÉOMÉTRIE PLANE EUCLIDIENNE

1. Ensemble des points équidistants de deux points distincts donnés (médiatrice)

Distance d'un point à une droite.

2. Cercle et disque. Intersection d'un cercle et d'une droite, d'un disque et d'une droite, tangente à un cercle. Par trois points non alignés passe un cercle et un seul.

3. Isométries du plan euclidien : ce sont, par définition, les bijections du plan euclidien sur lui-même qui conservent la distance. Exemples : translations, symétries centrales, symétries orthogonales.

Image d'une droite par une isométrie. Toute isométrie conserve l'orthogonalité et le parallélisme des droites.

Groupe des isométries. Exemples simples de composées d'isométries. Détermination d'une isométrie par l'image d'un repère orthonormé donné, par l'image d'un triangle donné.

Toute isométrie conserve le rapport de projection orthogonale de deux axes; réciproque. Angle géométrique, défini comme classe d'équivalence de couples isométriques de demi-droites de même origine.

4. Symétries d'un cercle. Arcs isométriques d'un cercle. Repérage d'un point M d'un demi-cercle de diamètre AB par la mesure de l'arc AM (on admettra l'existence et l'unicité de la mesure des arcs de cercle, la mesure du demi-cercle étant fixée). Emploi de cette mesure pour définir l'écart angulaire de deux directions orientées ou de deux demi-droites.

Usage des tables trigonométriques en degrés et en grades; cosinus, sinus, tangente d'un écart angulaire.

5. Isométries laissant globalement invariante la réunion de deux demi-droites de même origine (bissectrice), la réunion de deux droites.

Exercices sur le triangle isocèle, le losange, le rectangle, le carré.

les commentaires du 22 février 1973 :

Trigonométrie. — Il est permis, et peut-être inévitable, de reporter tard dans l'année de Troisième le chapitre des isométries ; or on a observé ci-dessus que la trigonométrie en est tributaire, du moins dans la présentation prévue par le programme et par le commentaire initial ; aussi, en reconnaissant à la trigonométrie le caractère d'une technique que rend seule efficace une familiarisation prolongée, a-t-il paru opportun d'en présenter ici un mode d'exposition possible, qui se limite à ce seul objet et peut, de ce fait, être introduit et utilisé notablement plus tôt dans l'année : on ne manquera pas de faire en fin d'année le raccord nécessaire.

A une paire d'axes concourants (ou de demi-droites de même origine), il peut être associé son rapport de projection ; avant donc d'introduire les isométries, une théorie bien construite permet de définir l'angle géométrique, puis l'écart angulaire.

Soient Ax, Ay, A'x', A'y' des demi-droites du plan euclidien et $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}'_1$, $\mathcal{A}'_2$ les axes associés. La relation $\mathcal{R}$ dans l'ensemble des couples de demi-droites de même origine du plan euclidien, définie par

$$(Ax, Ay)\ \mathcal{R}\ (A'x', A'y') \iff c\,(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1) = (\mathcal{A}'_2, \mathcal{A}'_1)$$

permet de définir l'angle géométrique comme classe d'équivalence correspondant à cette relation. On définira ensuite, pour tout angle géométrique, son écart angulaire.

Les situations pratiques qui relèvent de ce modèle mathématique permettent, par des manipulations (calques, rapporteurs...), par des dessins, d'acquérir cette notion d'angle géométrique. Le rapporteur, illustrant certaines bijections d'un intervalle de réels vers l'ensemble des angles géométriques, donnera lieu à des observations qui introduisent de façon naturelle l'écart angulaire et ses usages.

De même le physicien repère habituellement l'écart angulaire grâce à un rapporteur, une alidade, un goniomètre ; ces instruments livrent un « angle » exprimé en degrés ou en grades ; le lien avec le rapport de projection se lit dans la colonne des cosinus d'une table trigonométrique.

Soit (Ax, Ay) le représentant d'un angle géométrique $\widehat{xAy}$ tel que $E_k\,(\widehat{xAy}) = \alpha$; $\cos_k \alpha$ sera par définition le rapport de projection orthogonale des axes associés à Ax et Ay ; il est aisé de passer plus tard de cette définition à celle que donnent le programme et son commentaire initial.

(B.O.E.N. n° 8 du 22 février 1973.)

- Le programme du 16 novembre 1978 stipule pour la classe de 3ème : nous ne donnons ici que ce qui concerne la "géométrie".

CLASSE DE TROISIÈME

(Arrêté du 16 novembre 1978)

Les notions et les propriétés que les élèves doivent connaître et savoir utiliser sont énumérées ci-dessous ; leur groupement en alinéas ne vise qu'à la commodité de la présentation.

En algèbre comme en géométrie, certaines propriétés, au choix du professeur, seront admises : elles permettront d'obtenir les autres par voie déductive.

PROGRAMME OFFICIEL

Arrêté du 16 novembre 1978 (suite)

II. — GÉOMÉTRIE

Notions et propriétés fondamentales

Propriété de Thalès. Multiplication d'un vecteur par un réel. Coordonnées d'un vecteur dans un repère. Equations d'une droite dans un repère.

Rapport de projection orthogonale ; symétrie de ce rapport.

Propriété de Pythagore et sa réciproque.

Orthogonalité de deux vecteurs rapportés à un repère orthonormé.

Notions pratiques de trigonométrie

On admettra l'existence et l'unicité de la mesure des arcs de cercle, la mesure du demi-cercle étant fixée.

Angle de deux demi-droites de même origine : sa mesure. Bissectrice.

Somme des mesures des angles d'un triangle.

Cosinus, sinus d'un angle ; tangente. Usage des tables trigonométriques en degrés décimaux et en radians.

Relations trigonométriques dans le triangle rectangle.

Applications

Expression analytique de la distance de deux points dans un repère orthonormé.

Symétries laissant globalement invariant : un cercle, la réunion de deux demi-droites de même origine, la réunion de deux droites.

Exercices (distances et angles) sur le triangle isocèle, le triangle équilatéral, le losange, le rectangle, le carré, les polygones réguliers...

Exercices de géométrie dans l'espace, par exemple : sphère (intersection avec un plan) ; cube (calcul de la diagonale) ; pyramide régulière (calcul d'éléments métriques).

En consultant quelques ouvrages actuels, correspondant à ces programmes, nous en retirons les informations suivantes :

MAUGUIN classe de 3ème mathématique Istra, 1972	Chap 30 : Trigonométrie - fonctions sinus, cosinus, tangente 14 pages ; 2 pages d'exercices
MONGE math. 3ème Belin, 1972	Chap. 23 : notions simples de Trigonométrie 18 pages de cours
POLLE-CLOPEAU Math. 3ème Coll. Vissio Delagrave, 1972	Chap. 27:Trigonométrie 12 pages, 2 pages d'exercices
VOGT classe de 3ème Géométrie Vuibert, 1976	Chap. 22 : Trigonométrie 5 pages de cours, 5 pages d'exercices aucun usage de la Trigonométrie en dehors des mesures d'angle sinus, cosinus, tangente
GIRARD-COHEN- GERLL-GERL Math. en 3ème Coll. 65/43 Hachette, 1976	Chap. 9 : - angles géométriques - écarts angulaires - trigonométrie 17 pages, 6 pages d'exercices quelques applications : - solides soumis à des forces - profondeur d'une tailles avec pige - optique
GERU-VITART Math. en 3ème Coll. M Hachette, 1980	Chap. 10 : notions de Trigonométrie exemple d'application : - mesure d'objet incaccessible (hauteur d'un cerf volant) - mesure difficile : calculs professionnels avec une pige - applications mathématiques : polygones
IREM Grenoble Jeomatri Math. en 3ème Ophrys, 1980	26 pages à la fin du livre : chap : CA : ANGLES - mesure des angles et des arcs - cosinus - sinus et tangente - usage des tables de trigonométrie Il comporte des problèmes d'application : type "mesure de tour."

IV.1.2. L'apprentissage de la trigonométrie et son évolution

L'impression générale qui se dégage de l'exament des documents est la suivante :

- l'apprentissage de la trigonométrie a glissé au cours de ce siècle de la classe de Terminale à la classe de 3ème

- cette notion est devenue,de plus en plus, un appendice ne correspondant, à aucun moment, à un besoin de résolution d'un problème posé antérieurement.

Essayons de justifier ces propos.
Dans la préface de son ouvrage "Trigonométrie" (B-2) (cf. §IV.1.1.6.), Emile BOREL exprime le point de vue suivant (en 1922) :

" On a longtemps regardé la Trigonométrie comme une branche des Mathémathiques d'un ordre plus élevé que l'Arithmétique, l'Algèbre et la Géométrie; ... "

Cette opinion émise par un mathématicien illustre, nous montre bien à quel niveau on situait cette partie et l'incidence qui en cécoulait sur le moment d'apprentissage.
Jusqu'alors on enseignait la Trigonométrie en classes de 1ère et Terminale
En 1912, l'apprentissage, en classe de première, partait des fonctions circulaires, on y étudiait ces fonctions, les formules usuelles, les équations qui pouvaient même contenir un paramètre ; à la fin on appliquait les connaissances à la résolution des "triangles rectangles" !
En classe de Terminale, le programme est entré sur la résolution des triangles et l'application de la trigonométrie au levé des plans.
En 1922, Emile BOREL, toujours dans la préface citée plus haut, se réjouit du transfert de la Trigonométrie en classe de 2ème.

"...en réalité, il est dans ces sciences, peu de chapitres aussi simples et en même temps aussi féconds que les premiers éléments de la Trigonométrie. Aussi doit-on approuver, sans réserve, les auteurs des nouveaux programmes d'avoir prescrit l'étude de ces éléments dès la classe de seconde."*

Mais il ajoute, en insistant, que cet enseignement doit être *"véritablement élémentaire"* et *"résolument pratique"*.
Son ouvrage de "Géométrie" (B-9) (1921. §IV.1.1.3.), destiné aux classes de premier et second cycle, situe la place de la Trigonométrie. Ouvrage de 400 p., la trigonométrie est abordée à la page 242, entre les "notions générales sur la similitude", "les lignes proportionnelles" et les "aires et volumes".

Classes	1905 1909 1911	1912	1925 1931 1937	1938	1947 1948	1958 1962	1971 1973	1978
Terminale	29juil. 1911 math. A,B	trigonométrie	trigonométrie (résolution de triangle)	trigonométrie	classe de philosophie : trigonométrie classe de S.E trigonométrie	trigonométrie en math. élem. (révision & compléments) résolution de triangles non au programme.		
Première	4 mai 1912 : 1ère C,D trigonométrie	trigonométrie	trigonométrie disparition autour des années 1937		1ère C moderne trigonométrie 1ère A,B trigonométrie facultative	trigonométrie	trigonométrie à propos des isométries : ∘formules de trigonométrie ∘fonction trigonométrique	idem
Seconde	pas trigonométrie		trigonométrie	trigonométrie				
Troisième	pas de trigonométrie			trigonométrie 3e A et B 3e annéed'EPS	trigonométrie	trigonométrie	trigonométrie à propos des isométries	notions pratiques de trigo.

L'ouvrage de BRACHET, "Algèbre et notions de Trigonométrie". classes de seconde et première. 1937 [B-3] (cf. § IV.1.1.10.) nous confirme l'existence de l'enseignement de la trigonométrie en classe de seconde. On constate que cette notion est abordée en fin d'ouvrage et qu'elle est suivie de nombreux exercices. Une partie de ceux-ci sont destinés à la classe de seconde, l'autre à la classe de premêre. Le temps d'apprentissage s'étale, donc, sur deux classes. En classe de première, on insiste sur les applications (cf. §IV.1.1.10.)

Les propos recueillis dans l'avertissement rédigé par H. COMMISSAIRE pour son manuel "Leçons d'algèbre" classes de seconde et de première, 1939. (cf.IV.1.1.11.) nous apprennent la disparition de la Trigonométrie en classe de première. Ce qui laisse supposer qu'à cette époque, l'apprentissage de la Trigonométrie ne sera plus suivie en classe de première.

Vers cette époque, un peu avant la IIe guerre mondiale, la Trigonométrie ne figure pas explicitement dans le texte, mais sous la rubrique "géométrie". A la fin du paragraphe "I. Révision d'une partie du programme de la classe précédente et compléments" on peut lire

> *"... Projections orthogonales. Sinus, cosinus, tangente d'un angle dont la mesure est comprise entre 0 degré et 180 degrés. Usage des tables de valeurs natuerelles."* (cf. IV.1.1.12.)

La Trigonométrie arrive cette fois comme simple complément à ce qui a été vu en classe de 4ème. L'ouvrage "Algèbre et géométrie" de BRACHET et DUMARQUE (cf. §1.1.12.) classe de 3ème, 1940, qui se fonde sur le programme, illustre cette perspective didactique. En première partie, au chapitre III, (le dernier) on trouve les "Premiers éléments de Trigonométrie" après le chapitre II : similitude Une douzaine de pages y sont consacrées. Ensuite le programme "particulier à la classe" es traité : géométrie plane : similitude, aires.
Le souci d'application au travers d'exercices y est apparent comme le montre l'exament détaillé du chapitre (cf. §IV.1.1.12.). Ce que nous pouvons retenir

D'une science considérée comme "supérieure", la trigonométrie devient en classe de 3ème l'objet d'un simple apprentissage complémentaire aux acquisitions de la classe de 4e.

Dans la période d'après-guerre, l'enseignement de la trigonométrie se maintient en classe de 3ème.

Les programmes de 1945-1947 mentionnent au paragraphe II :

> " *Projections orthogonales. Sinus, cosinus et tangente d'un angle compris entre zéro et deux droites. Relation entre le sinus et le cosinus d'un angle. Usage des tables de valeurs naturelles*" (cf. IV.1.1.14.)

Le livre "Eléments de géométrie" BRACHET, 1946, classe de 5e, 4e, 3e (§IV.1.1.14.) aborde en seconde partie au chapitre VI les "éléments de trigonométrie" après avoir étudié au chapitre V "les relations métriques dans le triangle rectangle". Les deux chapitres suivants protent sur "les polygones réguliers" et "arcs de cercle". La troisième et dernière partie de l'ouvrage vise l'étude des aires de surfaces.

Un autre ouvrage "géométrie", 1950 [P-4] classe de 5e, 4e, 3e (§IV.1.1.14.) aborde les "notions de Trigonométrie" entre les "relations métriques dans les polygones réguliers inscrits" et la "mesure les aires".

D'autres manuels (§IV.1.1.14.) confirment cette description de l'environnement de la Trigonométrie.
Les programmes et les manuels destinés à la classe de Première témoignent de la réapparition de l'étude de la Trigonométrie à ce niveau.
Le livre "Algèbre et trigonométrie" , ROUX, 1950, classe de première (§IV.1.1.14.) aborde la trigonométrie à la fin. Un paragraphe de quatre pages est consacré "problèmes conduisant à des équations trigonométriques" après quoi, on trouve le chapitre XIV :"addition et multiplication des aires".
Le livre "Algèbre et Trigonométrie " Lebosse - HEMERY, 1951, [L-4] (§IV.1.1.14.) abonde dans le même sens.

La classe de Sciences Expérimentales (1948) comporte à son programme des notions trigonométriques , mais les commentaires stipulent que :

> " *le calcul des médianes, bisectrices, hauteurs, des rayons des cercles inscrits et exinscrits, la résolution des triangles, sont hors programme.*"

Si l'étude de $x \mapsto \sin(ax + b)$ est à faire, on peut remarquer par contre que les équations trigonométriques sont hors programmes

L'ouvrage "géométrie" de BREARD, classes de 5e, 4e, 3e, 1955 [B-8] (§IV.1.1.15.) aborde la Trigonométrie sur pusieurs chapitres.

- Similitude

- Relations dans le triangle rectangle
- Fonctiond trigonométriques
- Arcs associés
- Valeurs des fonctions circulaires

- Projections orthogonales
- Trigonométrie du triangle rectangle
- Les aires

Par contre, un ouvrage de 1960, "arithmétique - algèbre - géométrie" de THIBERGE et GILET, classe de 3e (§IV.1.1.15.), basé sur les programmes de 1958, fait l'approche de la Trigonométrie aux chapitres VIII et IX intitulés "rapports trigonométriques". Ce dernier étant consacré aux "tables" et au "calcul pratique des éléments d'un triangle rectangle". La totalité couvre dix pages.
Le chapitre X vise l'étude

A cette époque, 1963, la trigonométrie fait l'objet d'une étude approfondie en classe de première. L'accent est mis sur la maîtrise d'un "stock de formules" comme le souligne le Pr. Paul DUBREIL, dans la préface du livre de "Trigonométrie" de THOVERT (§IV.1.1.15.)

En classe Terminale de Mathématiques Elémentaires, le cours de Trigonométrie se limite à une révision du programme de première avec quelques compléments. La préface du livre de "Trigonométrie" LESPINARD et PERNET , 1962, (§IV.1.1.15.) mentionne qu'en troisième partie, les auteurs ont cru nécessaire de développer "la résolution des triangles" bien qu'elles ne fût pas au programme.

Aujourd'hui, c'est-à-dire depuis 1971, la trigonométrie est abordée en classe de 3e à propos des isométries. Quelques observations m'ont permis de remarquer que la trigonométrie était souvent abordée tardivement en fin de 3e durant le dernier trimestre, à un moment où les élèves sont assez démobilisés. Les traces de cet apprentissage s'estompent alors assez rapidement, car en classe de seconde, on ne revient pas sur cette notion considérée , à priori, comme acquise. Les élèves de classe de première voient à nouveau la trigonométrie, mais l'approche par les isométries ne semble pas provoquer, spontanément, la reconnaissance des concepts étudiés en classe de 3e. Ce lien ne se fait que difficilement et pour les élèves, il semble qu'il reste dans leur esprit, les vagues traces d'une trigonométrie avec des rapports dans un triangle rectangle, des définitions dans un demi-cercle et une étude très abstraite d'algèbre. linéaire. Ceci, je le fonde sur mon expérience personnelle en classe de première D, ces dernières années.

L'étude réalisée sur les manuels de classe de 3e en usage ces dernières années (cf.§IV.1.1.16.), met en évidence la tendance à reléguer la trigonométrie au

rang d'un enseignement à seule fin "l'étude pour l'étude".
Sur sept ouvrages consultés, quatre ne proposent pratiquement pas d'utilisation de la trigonométrie.
Un manuel de 1976 offre quelques applications. Notons toutefois que les deux livres parus en 1980, se soucient davantage du réinvestissement des notions trigonométriques visées.
Nous pouvons peut-être noter que depuis 1980, si la trigonométrie apparaît encore sous forme d'un appendice, le souci du réinvestissement se confirme dans deux ouvrages : E.GALION, Mathématique 3e. O.C.D.L. Hatier et IREM de Strasbourg, Université Louis Pasteur, Mathématique classe de 3e, Istra.
Toutefois, il est sans doute à faire remarquer que les équipes ayant élaborées ces manuels sont largement sensibilisées aux problèmes didactiques.
Une autre remarque que nous pouvons faire : la disparition des manuels exclusivement consacrés à la trigonométrie.
Enfin, pour conclure, nous complétons l'affirmations énoncée au début de cette analyse, en disant que :
La trigonométrie après avoir été considérée comme une science supérieure destinée à un public déjà formé est devenue objet d'enseignement en classe de 3e, puis peu à peu située en fin de programme pour terminer aujourd'hui en fin de cycle d'enseignement (avec la coupure collège-lycée), c'est-à-dire susceptible d'aucun réinvestissement, donc vouée à un oubli rapide.

IV.1.3. L'enseignement de la trigonométrie au collège de la Ricamarie

Les objectifs sont fixés à partir du programme de la classe de 3e (16.XI.78)
Au chapitre II, paragraphe II.3.4.3. page , nous avons déjà abordé la question de l'apprentissage de la trigonométrie et nous y avons décrit le déroulement de l'étude.
Il est peut-être intéressant de noter ici, que l'étude de la trigonométrie a été faite à la fin du premier trimestre et au début du second trimestre de l'année scolaire. Ceci constitue sans aucun doute une différence par rapport à la pratique usuelle de reporter cette étude en fin d'année.

- Les objectifs visés peuvent se décrire ainsi :
    - Les angles géométriques
    - Mesure des angles géométriques
    - Définition de Sinus, Cosinus, tangente à partir du triangle rectangle
    - Définition de Sinus, Cosinus, tangente à partir du cercle trigonométrique
    - Usage des tables de trigonométrie ou de calculatrices
    - Obtenir le sinus et le cosinus d'un angle par construction
    - Construire à la règle et au compas un angle dont on connait le sinus et le cosinus.
    - Résoudre quelques problèmes à partir de la trigonométrie

L'analyse des fiches de travail (annexes) nous permet de saisir comment on souhaite réaliser l'apprentissage :

Prenons par exemple la fiche T2 " Le savant ...cosinus"

° On fait constater expérimentalement l'invariance d'un rapport "côté adjacent" "hypoténuse" à partir d'un angle donné.
° On propose alors la définition du cosinus d'un angle
° On apprend ensuite l'usage de la table de trigonométrie pour le cosinus
° On propose un exercice de calcul sur un triangle rectangle puis
° Un petit problème avec une échelle contre un mur.

Si la définition du cosinus n'est pas motivée par la résolution d'un problème à résoudre mais du constat expérimental de l'existence d'un rapport invariant, on peut toutefois noter qu'un problème d'application est immédiatement proposé.
Les autres fiches confirment cette tendance.
Des problèmes d'application extraits du livre "Galion 3e"(1980) ont été ensuite proposés aux élèves.

IV.1.4. Ce que pourrait être l'enseignement de la Trigonométrie

Il semble évident qu'un savoir minimum en trigonométrie paraît nécessaire. L'observation quotidienne en classe de seconde tend à faire ressortir qu'il ne reste pas grand chose de cette notion abordée en classe de 3e (surtout en ce qui concerne son utilisation pour résoudre des problèmes).
Les résultats du test quant aux questions portant sur l'application de la trigonométrie, confirment les remarques précédentes.

Bien des situations nécessitent l'emploi de la trigonométrie : l'étude des phénomènes vibratoires en physique, la mesure d'objets inaccecibles (hauteur d'un arbre, aire d'une toiture, l'arpentage, l'astronomie, mesure à l'aide de pige en mécanique...etc..

Voici quelques propositions que l'on pourrait imaginer concernant la place de la trigonométrie :

- La trigonométrie est située comme appendice en classe de troisième.On renforce un peu l'apprentissage, toutefois, la situation reste inconfortable en raison du fait que l'enséignement est sans référence au reste des objectifs visés, d'où une efficience limitée.
- La trigonométrie est reportée en classe de seconde. Ceci aurait l'avantage de situer l'étude en début de cycle et donc d'offrir une plus grande possibilité de réinvestissement.L'inconvénient apparaît peut-être pour le cours de physique qui risque d'en faire usage tôt dans l'année.

- On peut aussi penser qu'un nombre important d'élèves issus de 3ème, ne n'accédant pas à la classe de seconde, se verraient privés de toute notion de trigonométrie alors que dans la vie professionnelle ils risquent d'en avoir besoin.
- La trigonométrie est maintenue en classe de 3ème mais on lui redonne une autre place.
  Par exemple : l'enseignement de la trigonométrie réalisé comme une réponse à un problème posé, ou comme investigation d'un domaine.
  (en ce sens, la démarche suivie au CES de la Ricamarie s'inscrit un peu dans ces directions).
- On s'efforce de mettre en rapport cet apprentissage avec le reste des objectifs visés. L'approche initialement proposée par l'étude des isométries avait sans doute en vue cet objectif. Toutefois, il me semble que cette démarche didactique ait bénéficié à l'apprentissage de la trigonométrie.

IV.1.5. Quelques notes plus particulières sur l'apprentissage de la trigonométrie en classe de 3ème

L'expérience menée, dont l'objet principal est centré sur l'auto-correction, nous a conduit à une réflexion sur le contenu qui servit de support à la pratique autocorrective. Dans les paragraphes précédents nous avons tenu des propos généraux sur la trigonométrie, ici nous exposerons quelques remarques issues de l'expérience et de l'analyse des résultats.

Quelles hypothèses pouvons-nous formuler sur l'enseignement ?

Deux types de prérequis sont considérés comme tels :

- ceux qui concernent le maniement de la proportionnalité,
- le repérage dans le plan en axes orthonormés.

Au contraire, l'apprentissage revient sur ce qui concerne le cercle et l'usage du rapporteur, puisque l'on apprend (ou réapprend) à tracer et à exploiter le demi-cercle trigonométrique.

En quoi consiste alors l'apprentissage ?

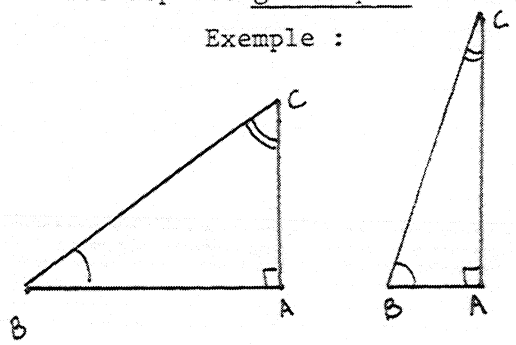
Nous pouvons noter d'une part que les acquisitions situées aux niveaux A et B de la classification N.L.S.M.A. * correspondent à la connaissance des faits spécifiques de la trigonométrie et aux savoirs-faire dans l'éxécution de tracés ou dans l'usage de la machine à calculer.

Exemples :

- définition de sinus, cosinus, tangente,
- formule : $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$,
- valeurs particulières,
- un couple de demi-droites étant donné, tracer le demi-cercle trigonométrique ad hoc ... etc

D'autre part nous remarquons que les acquisitions situées à partir du niveau C de la classification NLSMA * correspondent en outre à une démarche dialectique, en allers-retours entre des figures "qualitatives" et des calculs ou déductions. Cette démarche exige d'avoir observé certaines invariances , et d'avoir distingué les aspects génériques * des aspects singuliers *.

Exemple :



l'écriture $\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}$ ne dépend pas des angles en B et en C, mais exige un angle droit en A.
Autrement dit, la singularité * de l'angle A s'oppose à la généricité * des angles (aigus toutefois) en B et en C.

Dans les problèmes de construction, l'exploitation dans l'enseignement est introduite par une phrases du genre :

"Supposons le problème résolu et ..."

ou par un titre tel : "analyse".

Sur l'exemple précédent, on remarque que le demi-cercle trigonométrique placé ad libitum ne s'accompagne pas de la présence d'une singularité * (ici : l'angle droit en A). Pourtant, en pratique, une telle singularité * est parfois nécessaire : dans l'analyse pour un problème de construction, elle doit être respectée, alors que les éléments génériques* peuvent être choisis (presque) quelconques.
Si, pour terminer, nous examinons encore une fois l'exercice 410, situé au niveau D2 de la classification NLSMA *, qu'observons-nous ?

Un croquis "faux" mais "juste" est présenté.

En quel sens est-il "faux mais juste" ?

Ce qui est faux :

- tous les angles autres que l'angle nul et l'angle droit,
- toutes les longueurs.

Cela sans intervention d'idée de précision. De plus, ces éléments sont faux même à l'échelle.

Ce qui est juste :

- l'alignement des points A, B, H,
- la disposition relative des points A, B, H, sur la droite (ordre A, B puis H),
- l'angle droit OHA (cf : la boussole).

On est alors en droit de se demander si l'apprentissage prévoit l'exploitation d'un croquis de ce type comme outil de travail : à savoir exploiter systématiquement un croquis respectant certaines conditions seulement, pour effectuer un travail en feed-back * avec des croquis. Une observation précise de ce type d'activités peut être en particulier trouvé dans la thèse de G. Audibert : "Démarche de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie euclidienne plane" [A-2] .

IV.2. ANALYSE DES ERREURS . ESSAIS D'ELABORATION D'UNE TYPOLOGIE

Cette analyse part d'un inventaire méthodique des erreurs commises par chaque individu aux differents items. Cette information qualitative vient donc compléter l'information quantitative donnée par la fréquence.

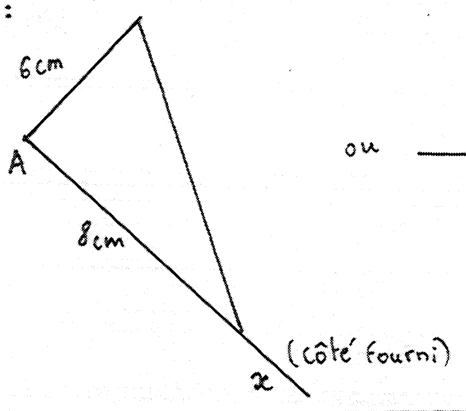
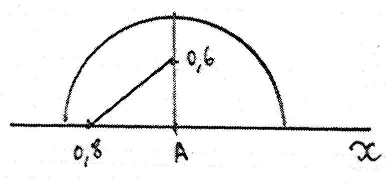
La tentative de réalisation d'une typologie des erreurs va nous permettre d'adapter au mieux le document autocorrectif en nous fournissant un modèle des erreurs types auquel nous allons nous référer.

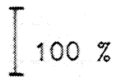
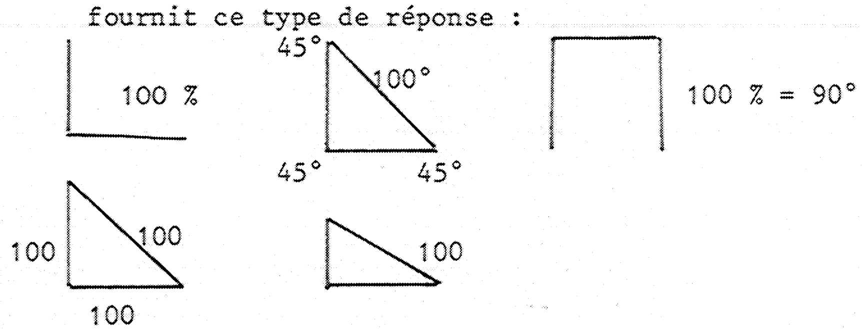
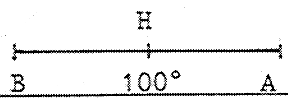
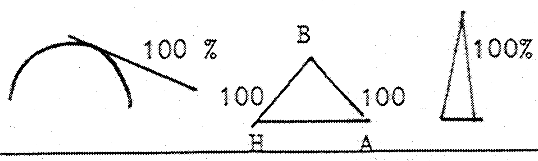
Cette approche nous paraît mieux fondée qu'une démarche a priori, et même, presque indispensable malgré l'énorme quantité de travail que cela nécessite. (annexe D)

IV.2.1. La typologie

Analyse des erreurs - essai d'élaboration d'une typologie des erreurs observées, en vue de son utilisation dans la partie autocorrective.
Un travail de dépouillement minutieux des erreurs commises par les individus dans le test préliminaire et dans le test final de trigonométrie a été effectué. Je ne rapporterai pas ici, le détail (voir annexe) : pour chaque item et pour chaque élève ayant échoué à cet item par cause d'erreur, un relevé de l'erreur commise et une description ont été réalisés. C'est sur ces données que je m'appuie pour construire des classes d'erreurs.
Nous procèderons item par item. Nous ne retenons que les erreurs les plus fréquentes ou les plus significatives. Le codage correspond à la première apparition dans le test. Cette erreur peut se retrouver dans les autres items.

Codage type d'erreur N°E (item) ordre	Description
E.101.01	Echange "sinus" et "cosinus
E.101.02	Manque de précision (erreur faible). construction d'un cercle de rayon 9,9 cm ou 10,1 cm, erreur de mesure.
E.101.03.	Rapport du résultat en "cm"
E.101.04.	Mauvais report (à l'aide d'un papier calque) sur le demi-cercle trigonométrique, mauvais placement du sommet O ou erreur de construction.

Codage	Description	
E.101. 05.	erreur de signe	
E.101. 06.	non respect de la consigne	
E.103. 01.	réponse donnée : cos $\gamma = 1$; sin $\gamma = 1$ ou : cos $\gamma = -1$; sin $\gamma = 1$ correspond à une erreur de construction	
E.102.01.	fourni la réponse en °	
E.104.01.	réponse : cos $\delta = 0$; sin $\delta = 0$ cos $\delta = -1$; sin $\delta = 1$ cos $\delta = -1$; sin $\delta = 0$ cos $\delta = 1$; sin $\delta = 1$ cos $\delta = 0$; sin $\delta = 1$	
E.201.01	erreur dans la construction du demi-cercle trigonométrique sur l'angle.	
E.202.01.	Confusion entre l'angle et le repère, placement d'un point quelconque. s'apparente au type E.103.01.	
E.203.01.	s'apparente aux types E.103.01 - E.104.01 - E.202.01.	
E.301.01.	Fournit l'angle supplémentaire comme réponse	
E.301.02.	la construction est effectuée correctement mais avec usage de données qui ne conviennent pas : ex : trace un cercle de rayon 7 cm représente le sinus par 6 cm trace l'angle déduit le cosinus par 3,9	
E.211.01.	essai de construction par usage de la trigonométrie du triangle rectangle, s'apparente à un mauvais respect des consignes. Ex :  ou 	
E.501.01.	Utilise la valeur donnée pour le sinus (=0,3) comme longueur du côté AB ou AC en prenant 3 cm ou 0,3 cm	

Codage	Description	
E.501.02.	ne respecte pas la donnée ; BC = hypotènuse	
E.601.01.	mauvais usage de l'outil (calculatrice)	
E.603.01.	mauvaise connaissance des unités utilisées : degré - minute - seconde/degré - dixième de degré - centième de degrés	
E.311.01.	erreur d'origine algébrique ex : $\frac{LM}{MN} = tg\ \hat{N} = 0,35$ d'où $LM \times tg\ \hat{N} = MN$	
E.315.01.	malgré la vérification sollicitée, les réponses fournies ne correspondent pas du tout à la réalité d'un triangle rectangle : exemple : mesure en degré de $\hat{L}$: $135° < mes\ \hat{L}° < 140°$	
E.701.01.	utilise le schéma directement : - fournit la mesure de l'angle du schéma comme réponse mesure $\hat{A}° = 30°$	
E.702.01.	fournit cette réponse 	
E.702.02.	fournit ce type de réponse : 	
E.704.01.	fournit ce type de réponse  , horizontale	
E.704.02.	fournit un type de réponse s'apparentant à E.702.02. ou en plus  avec les traces de la difficulté à effectuer le dessin	
E.704.03.	ce n'est pas possible, sinon le talus serait vertical ou ne ne peut dessiner un talus à 100 % car quant on le trace les deux droites sont parallèles	
E.411.01.	mauvaise "mise en équation" du problème.	

Nous obtenons ainsi 28 classes d'erreurs à partir desquelles nous pouvons mieux interprêter les résultats. Ces données nous permetrons aussi d'améliorer le contenu de la partie autocorrective à la manière de ce qui a été réalisé dans le DEA .

IV.2.2. Apport d'une confrontation d'une analyse de contenu avec une analyse de résultats

Il convient de noter que le cadre de l'expérience est entièrement plongé dans le domaine de l'évaluation. Ainsi placé dans une situation de contrôle, on ne se met pas dans les conditions les plus favorables de repérage de variables didactiques. Toutefois la nature des résultats relevés conduit à soupçonner l'existence de quelques-unes. Notamment, il est possible d'identifier ce qui est mis en jeu dans l'apprentissage de la trigonométrie.

On peut pour plus de facilité, examiner les tests de trigonométrie (préliminaire, final) en fonction de la grille d'activités schématisées :

- act(a) : repérage dans le plan avec usage des coordonnées ou celui du rapporteur
- act(b) : manipulation de rapports
- act(c) : identification des objets géométriques mis en jeu (droites, cercles, triangles ...)
- act(d) : manipulation numérique : usage de mesure en degrés, de tables de trigonométrie, calculatrice

classe d'activités	questions n° du test préliminaire de trigonométrie
act(a)	101 - 102 - 103 - 104 - 201 - 202 - 203 - 204 - 301 - 302 608 - 609
act(b)	401 à 406 / 501 701 - 702 - 703 - 704
act(c)	101 - 102 - 103 - 104 - 201 - 202 - 203 - 204 - 301 - 302 501 - 701 - 702 - 703 - 704
act(d)	601 à 607 / 701 - 702 - 703 - 704

classe d'activités	test final
act(a)	111 - 112 - 113 - 114 - 211 - 212 - 314
act(b)	311 - 312 - 411
act(c)	111 - 112 - 113 - 114 - 211 - 212 - 311 411
act(d)	312 - 319 411

Test préliminaire		Test final				
n° des items	an 80-81 cl. 3e	n° des items	année 80-81 classe 3e	année 80-81 classe 2e	année 81-82 classe 3e	année 81-82 classe 2e
101	▨	111	▨	■	▨	■
102	⊡	112	▨	■	⊡	▩
103	⊡	113	▨	■	▩	▩
104	□	114	▨	▩	▨	▩
201	▨					
202	⊡					
203	⊡					
204	⊡					
301	▨	211	⊡	▨	▩	▩
302	▨	212	▨	▨	▩	■
401	▨					
402	▩					
403	▨					
404	▨					
405	▨	311	⊡	▨	⊡	▨
406	▨	312	□	⊡	⊡	⊡
		313	□	▨	□	⊡
501	□	314	⊡	▨	⊡	▨
601	▨					
602	□					
603	⊡					
604	▨					
605	▨					
606	□					
607	□					
608	⊡					
609	□					
701	□	411	□	▨	□	⊡
702	□	412	□	▩	□	□
70:	□					
704	□					

□ 0-20 ⊡ 20-40 ▨ 40-60 ▩ 60-80 ■ 80-100 : indication du taux de réussite (%)

Les exercices 100, 200, 110 où il est demandé de déterminer le sinus et le cosinus d'un angle à l'aide du compas et de la règle graduée (demi-cercle trigonométrique) incitent à la remarque suivante :

Quant l'activité de "repérage" nécessite un choix préalable, on observe une chute en début d'apprentissage mais pas par la suite.

L'incertitude quant au placement des éléments caractéristiques semble s'accroître lorsque l'on passe de l'angle aigu à l'angle droit puis à l'angle obtus enfin à l'angle plat.

80-81 3e	80-81 2e	81-82 3e	81-82 2e
111, 113 — 59,8	112 — 90,6	113 — 66	111 — 85
114 — 55,6	111, 113 — 87,5	111 — 56	112, 113 — 75
112 — 54,2	114 — 68,7	114 — 42	114 — 68
		112 — 36	

Quand l'apprentissage est plus avancé, le rôle particulier de l'angle droit et de l'angle plat conduit à une certaine supériorité de réussite sur l'angle aigu et l'angle obtus, cas génériques.

On peut attribuer cela au fait que les élèves de 2e ont mémorisé les résultats pour ces deux angles "remarquables" et tendent ainsi à fournir le bon résultat d'emblée.

D'un point de vue didactique, on peut être sûr que le placement et les angles jouent un rôle mais les données recueillies ne permettent pas de le préciser. D'autres études seraient alors à envisager pour complèter cette information fondée sur la variation de ces deux facteurs.

L'exercice (210) demande de "construire un angle connaissant le cosinus et le sinus, à la règle et au compas - un côté est fixe".

Cet exercice est pratiquement centré sur l'activité de "repérage". On remarque alors que dès la classe de troisième, ces activités sont assez bien réussies par environ les 2/3 des élèves, à quelques erreurs faibles près dues à des maladresses de mise en pratique.

L'exercice (310), par ses items 311 et 312 fait appel à des activités de "manipulation de rapports".

Il apparaît alors ici un obstacle dans la prise en compte des rapports et des calculs les concernant. L'item 312, en apparence simple, conduit toutefois à une réussite inférieure à 40 % tant en classe de 3e qu'en classe de 2e. Si donc l'activité de "repérage" est doublée d'une activité de "manipulation de rapports", on dresse un obstacle important dont il convient de tenir compte.

Si l'apprentissage de la Trigonométrie se restreint à une superposition de quelques définitions aux acquisitions antérieures, il ne faut peut-être pas s'étonner de la faiblesse des résultats notamment à propos de la résolution de problème du type de l'exercice (410). Pour espérer une progression, on peut imaginer quelques situations didactiques :

- par exemple : exploiter un croquis du type proposé à l'exercice (410), comme outil de travail, c'est-à-dire prévoir un travail en feed-back - avec des croquis respectant certaines conditions seulement dont on fait une exploitation systématique suivant le schéma :

croquis - étude - croquis ou même carte à l'échelle...

IV.3. ANALYSE DU TEST DES PREREQUIS DANS UNE PERSPECTIVE DIDACTIQUE

Rappelons que ce test a été proposé afin de constituer deux sous-populations homogènes. Il se devait donc de se rapporter à la trigonométrie sans toutefois contenir des items trop voisins de ceux des tests proprement dits. Au chapitre III (§ III.3.3.1) nous avons décrit et justifié le contenu.

Ici nous allons examiner ce que nous ont apporté les résultats à ce test.

L'analyse des résultats dans la modalité, élaborée en premier lieu pour la classe de 2e, a fait ressortir une cause d'échec : la mauvaise maîtrise de la notion d'"inverse".

Pour mieux cerner la situation, nous avons alors proposé un test "à chaud" à ces classes de seconde :

Question A : Quel est l'inverse de 0,5 ?

Voici les réponses fournies avec leur nombre d'apparition :

réponses	effectifs
$\frac{1}{0,5}$	21 ①
$\frac{1}{0,5}$ car l'inverse de x est $\frac{1}{x}$	4 ①
inv $\frac{1}{2} = 2$	1
inv $\frac{1}{2} = \frac{2}{1} = 2$	1
inv = $\frac{1}{2}$	1 ④
2 car $0,5 = \frac{1}{2}$ donc l'inverse est 2	2 ③
$\frac{1}{0,5} = 2 \Rightarrow$ $2 \times 0,5 = 1$	2 ②
1 : 0,5 = 2	6
$\frac{1}{0,5}$ ou 2	1
$-\frac{1}{0,5}$	2 ④
$0,5 = \frac{1}{2}$ inverse = $1 : \frac{1}{2} = 1 \times \frac{2}{1}$	1 ③

réponses	effectifs
2 : car l'inverse de 2 est $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} = 0,5$	3 ③
$\frac{2}{1}$ ou 2 car $0,5 = \frac{1}{2}$	1 ③
l'inverse de $\frac{1}{0,5} = \frac{10}{5}$	1 ③
$\frac{1}{0,5} = 0,2$ car $0,2 \times 0,5 = 1$	1 ④
$\frac{1}{2}$	1 ④
2 car 2 x 0,5 = 1. Deux nombres sont inverses si leur produit est 1	1 ②
si l'on met 0,5 en fraction on trouve $\frac{1}{2}$ donc l'inverse est $\frac{2}{1}$	1 ③

réponses	effectifs
$0,5 = \frac{5}{10}$ inv = $\frac{10}{5}$ sous forme de fraction 0,5 est égal à $\frac{5}{10} \Rightarrow$ inverse de $\frac{5}{10}$ c'est $\frac{10}{5}$	1

L'effectif total est de 52 élèves (5 seulement fournissent une réponse complètement erronée).

Le numero (...) renvoit à la typologie de réponses utilisée à la question B

Question B : Trouver x tel que $\frac{4}{2}$ et $\frac{8}{x}$ soient inverses l'un de l'autre

question A / question B	① $\frac{1}{0,5}$	② procèdure se rapprochant de a x b = 1 et réponse : 2	③ réponse : 2 mais procédure : x devient $\frac{1}{x}$	④ faux	effectif
item B juste	11	3	8	2	24
item B faux	9	0	10	3	22
item B "je ne sais pas"	6	0	0	0	6
effectif	26	3	18	5	52

Nous pouvons condenser ce tableau :

Question B \ Question A	R	E
R	22	2
E	19	3
N	6	0

Le 1er tableau met en évidence que la procédure ②, reposant sur "b est l'inverse de a si et seulement si a x b = 1" assure la réussite à la question B alors que la procédure ③ "l'inverse de x est $\frac{1}{x}$" ne semble pas efficace sur les 44 qui l'utilisent 19 seulement réussissent à la question B.

Question C : "les mots non compris"

réponse	effectif
"inverse"	4
valeur du "rapport" dans l'item IV	19
mesurer les angles	1
"$\frac{a}{b}$" rapport de deux décimaux	1

La procédure de calcul de l'inverse d'un nombre x, reposant sur inv(x) = $\frac{1}{x}$ si elle s'avère pratique à bien des égards n'en reste pas moins inopérante quand les individus ne dépassent pas ce seuil pour aboutir à la définition :

$x \cdot \mathrm{inv}(x) = 1.$

Nous avons là détecté une variable didactique, sur laquelle nous avons agi en modifiant le test des prérequis destinés aux classes de 3e. Nous avons ajouté deux exercices destinés à faire manipuler la notion "d'inverse" d'un nombre :

exercice n° III (forme 3e)

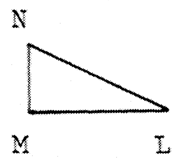
exercice n° IV (forme 3e).

Essayons maintenant de dégager dans ce test de "prérequis" (forme 3e)

- les items qui relèvent effectivement de l'apprentissage de la trigonométrie,
- les items qui sont à mettre hors champ didactique.

Classe d'activités	n° des exercices du test de prérequis
géométrie et repérage avec exécution éventuelle d'un calcul	VI. VIII. X
rapports : - mise en jeu de l'écriture - manipulation de rapports de nombres positifs - manipulation de rapports de nombres quelconques	I. II. III. IV. V
les deux classes d'activités	VII. IX (problème d'échelle)

Les exercices n° I, II, III, IV, V ne relèvent pas de l'apprentissage de la trigonométrie. Il s'agit d'exercices portant sur la manipulation de rapports, la notion d'inverse y est mise en jeu. L'analyse des résultats aux tests de trigonométrie montre qu'un certain nombre d'individus échouent à des exercices tels que "construire un triangle dont on connaît un côté et la valeur de la tangente d'un angle" parce qu'ils maîtrisent mal ces transformations algébriques. Par exemple : exercice 310 (test final de trigonométrie). R% : 52 E% : 35 N% : 13



LM = 2,8

tg $\hat{N}$ = 0,35

On écrit bien tg $\hat{N} = \frac{LM}{MN} = \frac{2,8}{MN} = 0,35$

mais on en déduit que

MN = LM x tg $\hat{N}$

Aussi pour une bonne approche de la trigonométrie dans l'application à la résolution est-il indispensable de bien maîtriser ces opérations algébriques. On pourrait résumer par une bonne maîtrise de la notion d'inverse et de la résolution des équations du premier degré à une inconnue, l'écriture étant l'une des trois :

$x = \frac{b}{c}$; $a = \frac{x}{c}$; $a = \frac{b}{x}$

Dans ces items, lorsque la demande se limite à une mise en jeu de l'écriture, cela conduit à un taux de réussite voisin de 3/4, s'il s'agit de recourir à des manipulations de rapports faisant intervenir des nombres positifs, le taux est voisin de 1/2 et si les nombres sont quelconques (présence de négatif) le taux est voisin de 1/3.

Dans l'exercice n° VI on demande de placer un point sur une demi-droite repérée, ce point étant déterminé par son abscisse.

En quoi cette activité est-elle prérequise pour un bon apprentissage de la trigonométrie ? Il resterait à le vérifier.

Nous pouvons ajouter que l'exercice aurait pu recevoir une autre formulation $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{5}{4}$ Ceci constitue une variable didactique qui pourrait être étudiée.

L'exercice n° VII est de toute évidence une manipulation dont la connaissance est prérequise pour l'apprentissage de la trigonométrie du triangle rectangle et son application pratique. Curieusement, cet item est faiblement réussi (R = 17 %) et surtout près de la moitié des individus n'y répondent pas et trop incomplèteemnt. Elle ne relève pas du domaine de la trigonométrie mais en constitue un outil.
L'exercice n° VIII apparaît comme un prérequis dans la présentation de l'enseignement qui relève du champ de la trigonométrie.
L'apprentissage s'effectue avant l'étude de la trigonométrie proprement dite.
On peut imaginer que la mesure d'un angle avec un rapporteur soit réinsérée dans l'apprentissage de la trigonométrie ; ce prérequis peut donc ne pas être placé hors champ didactique. Cette question est une activité pure de "repérage".

L'ordre de réussite est le suivant : angle droit : 85 %
angle aigu : 63 %
angle obtus : 54 %.

L'exercice IX est à considérer comme un prerequis absolu pour la définition de la trigonométrie à partir du cercle trigonométrique. On y retrouve des activités de repérage et un problème d'échelle.

Le taux de réussite est inférieur à 50 %. Toutefois il apparaît comme à peu près évident que si on avait fait figurer les graduations sur les axes, la réussite serait la même que sur les questions de pur repérage.

L'exercice X est une activité de construction géométrique à placer dans les prérequis hors champ didactique. La formulation n'est sans doute pas intégrable directement dans l'apprentissage de la trigonométrie mais le tracé d'un cercle avec certaines contraintes est une pratique qu'il convient de dominer.

Après examen du test de prérequis, il est permis d'affirmer que le "repérage" donne certainement lieu à des réussites de plus de 50 % (de l'ordre des 2/3). En effet, les questions VI et X comportant plus que du "repérage" sont réussies toutes les deux à 52 % et la question VIII en "repérage pur" donne lieu à une réussite de 54 % à 85 %.

Par contre, les questions mettant en jeu "repérage et rapport" peuvent tomber jusqu'à moins de 20 % de réussite.

---

(111)	VI : R	VI : $\overline{R}$
R	18	10
$\overline{R}$	8	14

(111)	VII : R	VII : $\overline{R}$
R	8	20
$\overline{R}$	0	22

(111)	IX : R	IX : $\overline{R}$
R	8	20
$\overline{R}$	1	21

(314)	VIII : R	VIII : $\overline{R}$
R	11	3
$\overline{R}$	14	22

Ces tableaux fournissent la liaison entre les items du test des prérequis et les 2 items (111) et (314) du test final de trigonométrie. Nous ne sommes pas allés plus loin dans l'étude de cette liaison.

Prer. / (111)	VI		VII		IX		
	R	$\overline{R}$	R	$\overline{R}$	R	$\overline{R}$	
R	18	10	8	20	8	20	28
E	7	14	0	21	1	20	21
N	1	0	0	1	0	1	1

(314)	VIII		
	R	$\overline{R}$	
R	11	3	
E	7	12	
N	7	10	
			50

IV.4. SINGULARITES * DE TRAITEMENT

En gros, nous identifions une singularité, comme un obstacle exceptionnel au traitement général, amenant à mettre en oeuvre des méthodes d'investigations spéciales. Cette notion ne peut être vue comme absolue.

Ainsi, afin d'illustrer ce propos, considérons l'équation suivante :

$$(m - 2)x^2 + x + 1 = 0.$$

Pour un mathématicien, elle comporte une singularité de traitement par rapport au traitement général des équations du second degré pour la valeur 2 de m.

Considérons maintenant le polynôme $P(x) = 1 - x^2$ pour lequel on demande de calculer le discriminant. Ce calcul ne constitue pas une singularité de traitement pour un mathématicien alors que pour un élève en cours d'apprentissage, cette expression apparaît comme un cas singulier par rapport à la perception de la forme générale $P(x) = ax^2 + bx + c$ (inversion de l'ordre et disparition du terme en x).

Nous allons mettre en évidence en trigonométrie quelques singularités de traitement pour en montrer l'intérêt sur le plan didactique.

La détection d'une singularité de traitement conduit à s'intéresser à l'étude de cas génériques appartenant à un voisinage. Dans la résolution de problèmes il y a nécessité de savoir distinguer les cas génériques des cas singuliers.

- les items 111 et 202 offrent un tel exemple de singularité :
  . On demande de déterminer par construction avec le demi-cercle trigonométrique le sinus et le cosinus d'un angle qui n'est autre qu'un angle droit.

Il y a là une confusion qui apparaît chez l'élève, et qui provient de la superposition de cet angle et du repère.

<u>en 3e - 1981</u>

<u>test initial</u>	<u>test final</u>
Le cas générique : angle aigu est réussi à près de 43 %	angle aigu : 59,8 %
angle obtus " " " " " 34 %	angle obtus: 55,6 %
Le cas de l'angle droit est réussi à 23 %	angle droit: 59,8 %
Le cas de l'angle plat est réussi à 24 %	angle plat : 54,2 %

<u>en 2e</u>

Résultats comparables à angle aigu et angle obtus
mais nette remontée à angle droit (62,5)
à angle plat (65,6)
car les résultats sont fournis de mémoire et non par construction remarquable.

Il serait alors intéressant d'effectuer quelques observations à propos d'une question analogue portant sur des angles voisins de l'angle droit.

Par exemple :
angle de 80°, de 85°, 95°, 100°
et de resituer la place de ces items au cours de l'apprentissage.

Dans les problèmes relevant de la trigonométrie du triangle :
les définitions dé sinus, cosinus, tangente à partir d'un triangle rectangle, ABC, ne dépendent pas des angles aigus en B et en C mais exigent un angle droit A.

Ainsi la singularité de l'angle en A s'oppose à la généralité des angles en B et en C (restreint au cas "aigu").

On peut remarquer que le demi-cercle trigonométrique placé ad libitum ne s'accompagne pas de la présence d'une singularité de ce genre (angle droit en A).

Il y a donc intérêt au cours de l'apprentissage à pointer cette singularité.

Les items 410, 311, 501, 700 la mettent en jeu.