

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

en

INFORMATIQUE

présentée et soutenue publiquement par

David COEURJOLLY

le 18 DÉCEMBRE 2002

**Algorithmique et géométrie
discrète pour la caractérisation des
courbes et des surfaces**

préparée au sein du laboratoire ERIC

sous la direction de

Serge Miguet et Laure Tougne

COMPOSITION DU JURY

M.	Jean-Pierre Braquelaire	Rapporteur	(Professeur)
M.	Jean-Marc Chassery	Rapporteur	(Directeur de Recherche CNRS)
M.	Jean-Michel Jolion	Examineur	(Professeur)
M.	Jean-Pierre Reveillès	Examineur	(Professeur)
M.	Serge Miguet	Directeur de thèse	(Professeur)
Mme.	Laure Tougne	Directeur de thèse	(Maître de conférences)

Table des matières

Introduction	1
I Géométrie discrète et objets discrets	5
1 Notions de base	7
1.1 Introduction	8
1.2 Espace discret et connexité	8
1.3 Objets, courbes, surfaces et hyper-surfaces	10
1.4 Codage et propriétés du codage des courbes discrètes	13
1.5 Processus de discrétisation	15
1.6 Conclusion	17
2 Droites et Plans discrets	19
2.1 Introduction	20
2.2 Droites discrètes 2D	20
2.3 Droites discrètes 3D	44
2.4 Plans Discrets	54
2.5 Statistique pour la reconnaissance de droites et plans discrets	73
2.6 Conclusion	77
3 Le cercle discret	79
3.1 Introduction	80
3.2 Synthèse et analyse du cercle discret	80
3.3 Reconnaissance et segmentation	83
3.4 Conclusion	101
II Analyse d'objets et mesures	103
4 Métriques discrètes	105
4.1 Introduction	107
4.2 Transformée en distance	107
4.3 Squelette de forme et axe médian	133
4.4 Visibilité et géodésiques discrètes	142

4.5	Conclusion sur ce chapitre	157
5	Mesures sur des objets discrets	159
5.1	Introduction	161
5.2	Contexte théorique : la convergence asymptotique	161
5.3	Tangentes et normales	163
5.4	Longueur et aire	176
5.5	Courbures d'objets discrets	197
5.6	Conclusion	218
	Conclusions et perspectives	221
III	Annexes	225
A	Applications	229
A.1	Introduction	230
A.2	Extraction de primitives pour la classification de profils de stèles funéraires	230
A.3	Analyse microscopique d'échantillon de neige	234
A.4	Modèle déformable discret	237
A.5	Conclusion	238
B	Preuves de convergence asymptotique	239
B.1	Introduction	240
B.2	Courbes en dimension d : approche par <i>tube</i>	240
B.3	Surfaces : aire et normales	245
C	Programmation linéaire : algorithme de PREPARATA et SHAMOS	251
D	Index des auteurs cités	255

Introduction

Tous les systèmes d'acquisition de données images fournissent des données organisées sur une grille régulière, appelées *données discrètes*. Que ce soit pour une visualisation ou pour l'extraction de mesures sur ces objets discrets (paramètres de formes), les axiomes et théorèmes de la géométrie euclidienne ne sont pas directement applicables. Deux solutions s'offrent à nous. La première consiste à plonger les données discrètes dans un espace continu où ces théorèmes et mesures sont définis (par exemple en utilisant des processus d'interpolation). Une seconde alternative se base sur une transposition de ces théorèmes et mesures dans l'espace discret. Ces différentes re-définitions donnent lieu à un paradigme mathématique et informatique appelé *géométrie discrète*.

Un premier intérêt d'une telle définition est que nous évitons ainsi un changement de modèle coûteux en temps et potentiellement source d'imprécisions. Dans le cadre de la géométrie algorithmique, les erreurs d'arrondi engendrées par de tels processus peuvent affecter non seulement les résultats mais aussi la terminaison même de l'algorithme. Dans l'introduction de la thèse d'état de JEAN-PIERRE REVEILLÈS (1991), nous pouvons lire :

De façon générale, dès que des données ont été tronquées plus aucun théorème géométrique n'est vrai. On peut dire alors que la géométrie, qui, sur le papier, était déjà l'art de raisonner juste sur des figures fausses, devient, sur machine, l'art de raisonner juste à partir de calculs faux produisant des figures fausses, si toutefois les calculs terminent.

D'un point de vue algorithmique, l'analyse de ces objets sur une grille régulière à l'aide d'une méthodologie en nombres entiers permet, non seulement une gestion de ces incertitudes, mais aussi l'écriture d'algorithmes très efficaces. En effet, comme nous le verrons par la suite, la manipulation de nombres entiers et les liens très forts entre les objets discrets et des théorèmes de la théorie des nombres ou d'arithmétique offrent des possibilités d'implémentations d'outils géométriques très efficaces.

Derrière ces considérations d'ordre théorique se cache un intérêt pratique très important. En effet, une théorie géométrique et une algorithmique adaptée aux images nous permettent d'accélérer les processus mais surtout de proposer des outils d'analyse de formes cohérents avec la modalité des objets analysés.

Cet intérêt pratique a été illustré depuis très longtemps. Ainsi, en 1771, en présentant un principe d'interpolation linéaire basé sur des entiers et sur des modulus (ce qui correspond exactement aux fondements des droites discrètes), JEAN BERNOUILLI conclut son article avec la certitude d'avoir présenté une technique qui allait être un outil de base de la géométrie discrète contemporaine :

[...] je me flatte de mettre sous les yeux des astronomes différentes méthodes d'abrégé considérablement leurs calculs, qu'ils ne connaissaient

pas encore, ou que, par des raisons qui cesseront, ils ont négligé de saisir lorsqu'elles leur ont été présentées pour la première fois ; [...]

Les recherches présentées dans ce manuscrit s'inscrivent dans ce cadre de la géométrie discrète et concernent plus particulièrement l'étude des courbes et des surfaces discrètes.

Organisation du manuscrit

Ce manuscrit est décomposé en trois parties : la première concerne les notions de base et les différents objets du modèle discret. La seconde s'intéresse à l'analyse de formes et aux mesures sur ces objets discrets. Enfin, la troisième partie correspond aux annexes.

Plus précisément, après avoir présenté quelques notions de base en géométrie utiles pour la suite, nous analysons les objets de base que sont les droites, les plans et les cercles discrets, et présentons les algorithmes qui permettent de les caractériser. En particulier, nous proposons une synthèse des différentes approches et algorithmes associés aux droites discrètes en dimension 2 et 3. Nous reprenons ce travail bibliographique sur les plans discrets en proposant une première caractérisation de la pré-image d'un morceau de plan discret. Nous concluons ce chapitre sur les droites et les plans par une analyse statistique de ces objets.

Nous nous intéressons par la suite aux notions de cercles discrets et aux différents algorithmes de reconnaissance associés. Nous proposons dans ce chapitre un algorithme de reconnaissance de cercle discret et de segmentation d'une courbe discrète en arcs de cercle basé sur une résolution arithmétique du problème.

Dans la seconde partie, nous utilisons cette analyse des objets de base pour caractériser des formes ou des contours de formes. Ainsi, nous présentons un algorithme de calcul de transformée en distance euclidienne sans erreur basé sur la notion de diagramme de Voronoi discret. En utilisant ce diagramme particulier, nous présentons des premières pistes vers une extraction de squelette de forme. Dans ce même chapitre, nous proposons une définition de la visibilité discrète dans des domaines discrets non-convexes basée sur la notion de droite discrète. Cette définition de la visibilité nous permet par la suite de proposer un calcul de chemins géodésiques discrets.

Ensuite, nous nous intéressons aux re-définitions, dans le modèle discret, de mesures euclidiennes. En utilisant le cadre théorique de la convergence asymptotique, nous présentons différents algorithmes permettant d'estimer la longueur d'une courbe discrète, les normales en tout point de cette courbe et la courbure associée à chaque pixel. Dans le cas des surfaces discrètes, nous proposons différents estimateurs permettant d'estimer l'aire de la surface, les vecteurs normaux en tout point et une estimation de différentes courbures (moyenne et gaussienne).

Finalement, la dernière partie correspond aux annexes et contient un premier chapitre présentant les différentes applications qui ont inspiré ces développements théoriques, un second contenant les différentes preuves de convergence asymptotique ainsi qu'un troisième détaillant un algorithme de programmation linéaire que nous utilisons dans les parties précédentes.

La figure 1 présente les différentes dépendances entre ces chapitres et parties. Par exemple, les notions introduites dans le chapitre sur les droites et plans discrets seront utilisées pour construire des estimateurs de mesures euclidiennes et nous permettent de définir la notion de visibilité discrète.

Une lecture linéaire des chapitres de ce manuscrit est possible, cependant nous pouvons conseiller au lecteur de commencer par le chapitre relatant les différentes applications (annexe A) afin de débiter par ce qui a motivé nos recherches.

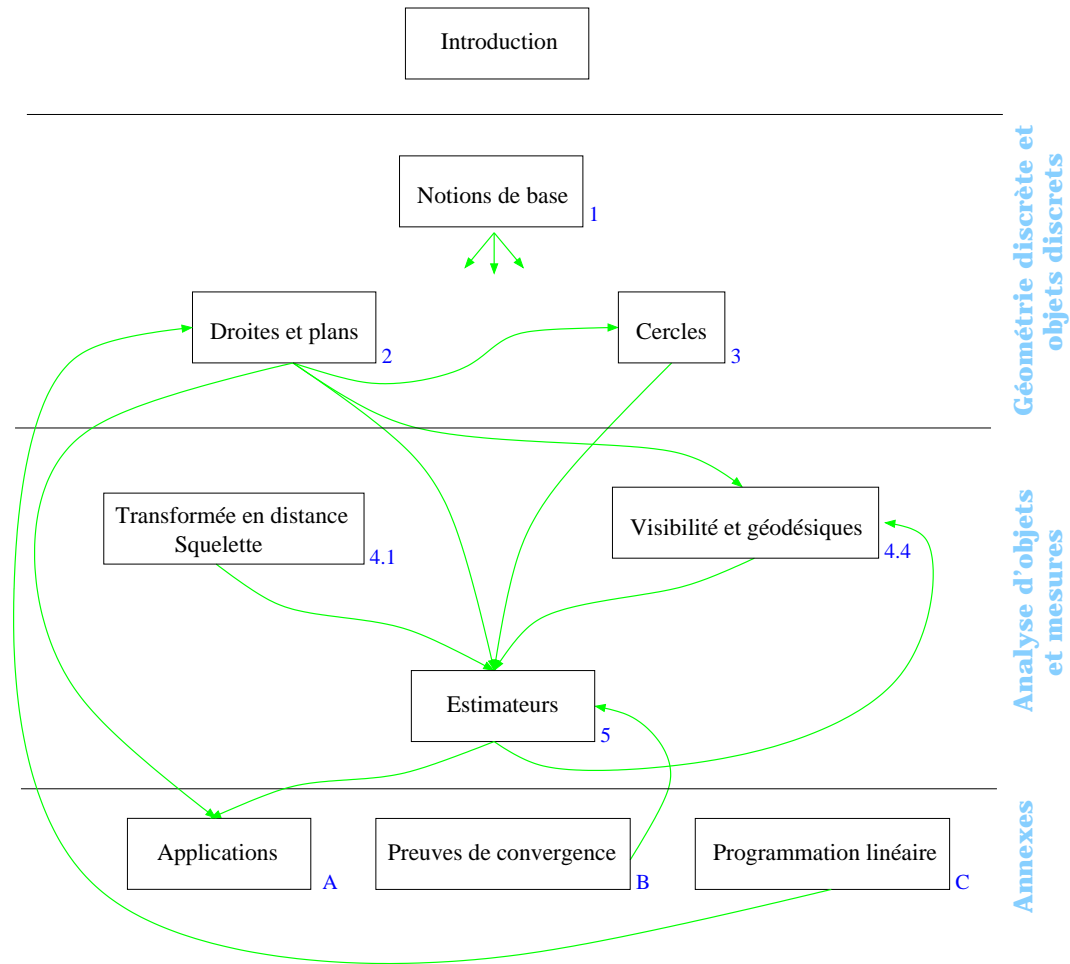


FIG. 1 – Organisation du manuscrit, les flèches indiquent les dépendances entre chapitres.