

**THÈSE**

pour obtenir le grade de  
DOCTEUR  
en  
INFORMATIQUE

présentée et soutenue publiquement par

**David COEURJOLLY**

le 18 DÉCEMBRE 2002

**Algorithmique et géométrie  
discrète pour la caractérisation des  
courbes et des surfaces**

préparée au sein du laboratoire ERIC  
sous la direction de  
Serge Miguet et Laure Tougne

**COMPOSITION DU JURY**

M.	Jean-Pierre Braquelaire	Rapporteur	(Professeur)
M.	Jean-Marc Chassery	Rapporteur	(Directeur de Recherche CNRS)
M.	Jean-Michel Jolion	Examineur	(Professeur)
M.	Jean-Pierre Reveillès	Examineur	(Professeur)
M.	Serge Miguet	Directeur de thèse	(Professeur)
Mme.	Laure Tougne	Directeur de thèse	(Maître de conférences)

# Table des matières

---

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Géométrie discrète et objets discrets</b>	<b>5</b>
<b>1 Notions de base</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction . . . . .	8
1.2 Espace discret et connexité . . . . .	8
1.3 Objets, courbes, surfaces et hyper-surfaces . . . . .	10
1.4 Codage et propriétés du codage des courbes discrètes . . . . .	13
1.5 Processus de discrétisation . . . . .	15
1.6 Conclusion . . . . .	17
<b>2 Droites et Plans discrets</b>	<b>19</b>
2.1 Introduction . . . . .	20
2.2 Droites discrètes 2D . . . . .	20
2.3 Droites discrètes 3D . . . . .	44
2.4 Plans Discrets . . . . .	54
2.5 Statistique pour la reconnaissance de droites et plans discrets . . . . .	73
2.6 Conclusion . . . . .	77
<b>3 Le cercle discret</b>	<b>79</b>
3.1 Introduction . . . . .	80
3.2 Synthèse et analyse du cercle discret . . . . .	80
3.3 Reconnaissance et segmentation . . . . .	83
3.4 Conclusion . . . . .	101
<b>II Analyse d'objets et mesures</b>	<b>103</b>
<b>4 Métriques discrètes</b>	<b>105</b>
4.1 Introduction . . . . .	107
4.2 Transformée en distance . . . . .	107
4.3 Squelette de forme et axe médian . . . . .	133
4.4 Visibilité et géodésiques discrètes . . . . .	142

4.5	Conclusion sur ce chapitre . . . . .	157
<b>5</b>	<b>Mesures sur des objets discrets</b>	<b>159</b>
5.1	Introduction . . . . .	161
5.2	Contexte théorique : la convergence asymptotique . . . . .	161
5.3	Tangentes et normales . . . . .	163
5.4	Longueur et aire . . . . .	176
5.5	Courbures d'objets discrets . . . . .	197
5.6	Conclusion . . . . .	218
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>221</b>
<b>III</b>	<b>Annexes</b>	<b>225</b>
<b>A</b>	<b>Applications</b>	<b>229</b>
A.1	Introduction . . . . .	230
A.2	Extraction de primitives pour la classification de profils de stèles funéraires . . . . .	230
A.3	Analyse microscopique d'échantillon de neige . . . . .	234
A.4	Modèle déformable discret . . . . .	237
A.5	Conclusion . . . . .	238
<b>B</b>	<b>Preuves de convergence asymptotique</b>	<b>239</b>
B.1	Introduction . . . . .	240
B.2	Courbes en dimension $d$ : approche par <i>tube</i> . . . . .	240
B.3	Surfaces : aire et normales . . . . .	245
<b>C</b>	<b>Programmation linéaire : algorithme de PREPARATA et SHAMOS</b>	<b>251</b>
<b>D</b>	<b>Index des auteurs cités</b>	<b>255</b>

# Conclusions et perspectives

---

---

Durant cette thèse, différents problèmes de la géométrie discrète ont été abordés. Ainsi, plutôt que de présenter une conclusion et des perspectives générales sur ce travail, nous préférons détailler notre contribution par thème abordé.

## Objets discrets

### Résumé

Dans cette partie, nous avons tout d'abord présenté les différentes définitions des droites, plans et cercles discrets de la littérature.

Dans le cas des droites discrètes, nous nous sommes surtout intéressés à une analyse bibliographique avec une comparaison des différentes définitions et des algorithmes permettant la reconnaissance. Nous avons aussi présenté les différents outils permettant de segmenter une courbe discrète 2D ou 3D en morceaux de droites discrètes. Concernant les plans discrets, après une analyse bibliographique similaire, nous avons montré un résultat original sur la structure la pré-image associée à un morceau de plan discret. En conclusion de ces travaux sur les droites et plans discrets, nous avons proposé l'utilisation de la statistique pour la reconnaissance de ces objets. Pour cela, nous avons tout d'abord illustré les liens entre les droites et les plans discrets, et des lois classiques en statistique (loi de BERNOULLI, loi empirique...). Nous avons ensuite présenté quelques pistes d'utilisation de ces outils statistiques pour l'estimation de plans tangents discrets.

Enfin, nous nous sommes intéressés aux cercles discrets et nous avons présenté un algorithme original de reconnaissance de cercles discrets basé sur une analyse arithmétique du problème. Cet algorithme utilise des procédés très simples de la géométrie algorithmique et permet une segmentation incrémentale d'une courbe discrète en arcs de cercles.

### Perspectives

Concernant les plans discrets, à la suite de notre théorème de structure de la pré-image d'un morceau de plan vérifiant certaines hypothèses, nous avons conjecturé que ce résultat est vrai en relâchant les hypothèses sur le morceau de plan considéré. La preuve de cette conjecture est donc une perspective importante à ce travail. De plus, le point de vue statistique que nous avons présenté pour caractériser des droites ou plans discrets nous semble très prometteur dans de nombreuses applications.

En ce qui concerne les cercles discrets, nous avons présenté quelques pistes pour l'utilisation de l'algorithme de reconnaissance pour calculer le cercle osculateur discret (plus long arc de cercle qu'il est possible de reconnaître centré sur le pixel

considéré) en un point de la courbe discrète. Un problème intéressant consiste en une analyse incrémentale de ce calcul de cercle osculateur en tout point d'une courbe discrète.

## Transformée en distance et squelette de formes

### Résumé

Nous avons tout d'abord décrit un algorithme de calcul de la transformée en distance euclidienne sans erreur. Cet algorithme est optimal en temps quelle que soit la dimension de l'image. Il utilise, en fait, une structure géométrique appelée diagramme de Voronoi discret. Nous avons proposé l'utilisation directe de ce diagramme pour le calcul du squelette d'une forme. Des premières analyses ont été faites dans le cas de formes en dimension 2. Elles nous ont permis de proposer un algorithme d'extraction de squelette linéaire en le nombre de pixels de la forme. Celui-ci se base sur le calcul du diagramme et sur un processus de filtrage des sommets et des arêtes de ce dernier.

### Perspectives

Une première perspective à ce travail consiste en une comparaison de la méthode d'extraction de squelette basée sur le diagramme de Voronoi discret en dimension 2 avec les approches construisant l'axe médian sur la transformée en distance.

L'algorithme d'extraction du diagramme de Voronoi discret étant optimal en temps quelle que soit la dimension, il est normal de s'intéresser à des constructions de squelettes, basés sur celui-ci, en dimension quelconque.

## Visibilité et chemin géodésique discrets

### Résumé

Nous avons proposé une définition de la visibilité, entre deux pixels dans un domaine discret non-convexe, basée sur la notion de droites discrètes. Nous avons présenté un algorithme efficace permettant de trouver tous les points visibles d'un pixel donné dans un tel domaine. Nous avons, par la suite, utilisé ce calcul de visibilité pour la construction de chemins géodésiques discrets, ce qui permet de définir une métrique géodésique dans des domaines discrets.

Nous avons ensuite discuté d'une généralisation de ces définitions aux objets tridimensionnels et avons donc proposé un premier algorithme de calcul de chemins géodésiques dans des domaines 3D non-convexes et sur des surfaces discrètes.

### Perspectives

Du point de vue algorithmique, une perspective consiste en une réduction de la complexité du calcul de visibilité dans des domaines 3D. Nous avons présenté quelques pistes vers un algorithme efficace mais des recherches plus approfondies sont nécessaires.

Enfin, que ce soit en dimension 2 ou 3, il nous semble très intéressant de comparer ces calculs de fronts de propagation discrets aux algorithmes classiques se basant sur une résolution numérique d'un système d'équations aux dérivées partielles.

## Estimateurs de mesures euclidiennes

### Résumé

Nous nous sommes intéressés aux algorithmes permettant d'estimer des mesures euclidiennes (longueur, aire, courbure...) sur des contours 2D ou 3D d'objets discrets. Ces différents algorithmes ont été analysés, à chaque fois que cela a été possible, dans un cadre pratique et théorique basé sur la notion de convergence asymptotique. Nous présentons dans le tableau 5.3 les différents estimateurs proposés dans le chapitre 5. Pour chacun de ces estimateurs, nous indiquons leur complexité et si la mesure converge asymptotiquement ou pas ( $n$  représente la taille des objets considérés et  $d$  un paramètre fixe de l'algorithme).

	Estimateur	Complexité	Convergence	paragraphe
Courbes discrètes 2D	Longueur	$O(n)$	oui	5.4.1
	Normales/Tangentes	$O(n)$	oui	5.3.1
	Courbure	$O(n)$	oui	5.5.2.3
Courbes discrètes 3D	Longueur	$O(n)$	oui	5.4.2
	Tangentes	$O(n)$	oui	5.3.1
	Courbure	$O(n)$	oui	5.5.2.4
Surfaces discrètes	Aire	$O(n)$	oui	5.4.3.2
	Normales	$O(n)$	oui	5.3.2.3
	Courbure Moyenne	$O(dn)$	non	5.5.3.1
	Courbure Gaussienne	$O(dn)$	non	5.5.3.2

TAB. 5.3 –: *Estimateurs discrets de mesures euclidiennes.*

### Perspectives

Lors de l'analyse du chapitre 5, seuls les estimateurs de longueur de courbes discrètes 2D ont bénéficié d'une plate-forme de tests suffisamment stable et complète pour qu'elle soit diffusée à la communauté. Une perspective importante est de construire une telle plate-forme pour toutes les autres mesures. Un travail préalable consiste à mettre en œuvre, pour la mesure étudiée, un jeu de tests significatifs et multi-grilles (pour une évaluation asymptotique).

D'un point de vue théorique, seules les estimations des courbures surfaciques ne possèdent pas encore d'algorithme ayant la propriété de convergence asymptotique. La poursuite de l'analyse de ces estimateurs est donc aussi une perspective à courte échéance.

### Applications

Nous avons présenté, dans l'annexe A, différentes applications dans lesquelles nous avons utilisé nos algorithmes. Pour l'application "Neige", la poursuite de cette collaboration avec les glaciologues du Centre d'étude de la Neige de Météo-France nous semble particulièrement intéressante. En effet, il est assez rare, en géométrie discrète, d'avoir des données binaires autres que celles provenant de segmentations d'images médicales. De plus, les estimateurs proposés dans le chapitre 5 trouvent des utilisations concrètes.

Enfin, l'application des estimateurs aux modèles déformables discrets nous semble très prometteuse.

## **Le mot de la fin**

Ces différentes recherches ont souvent nécessité de mettre les mains dans le  *cambouis*  informatique ou encore de faire l'ermite avec un papier et un crayon. Cependant, ce sont toujours des contacts humains avec d'autres personnes (chercheurs ou non) qui ont initié, ou fait avancer, ces recherches. Mes derniers mots vont à ces personnes.