

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

en

INFORMATIQUE

présentée et soutenue publiquement par

David COEURJOLLY

le 18 DÉCEMBRE 2002

**Algorithmique et géométrie
discrète pour la caractérisation des
courbes et des surfaces**

préparée au sein du laboratoire ERIC

sous la direction de

Serge Miguet et Laure Tougne

COMPOSITION DU JURY

M.	Jean-Pierre Braquelaire	Rapporteur	(Professeur)
M.	Jean-Marc Chassery	Rapporteur	(Directeur de Recherche CNRS)
M.	Jean-Michel Jolion	Examineur	(Professeur)
M.	Jean-Pierre Reveillès	Examineur	(Professeur)
M.	Serge Miguet	Directeur de thèse	(Professeur)
Mme.	Laure Tougne	Directeur de thèse	(Maître de conférences)

Table des matières

Introduction	1
I Géométrie discrète et objets discrets	5
1 Notions de base	7
1.1 Introduction	8
1.2 Espace discret et connexité	8
1.3 Objets, courbes, surfaces et hyper-surfaces	10
1.4 Codage et propriétés du codage des courbes discrètes	13
1.5 Processus de discrétisation	15
1.6 Conclusion	17
2 Droites et Plans discrets	19
2.1 Introduction	20
2.2 Droites discrètes 2D	20
2.3 Droites discrètes 3D	44
2.4 Plans Discrets	54
2.5 Statistique pour la reconnaissance de droites et plans discrets	73
2.6 Conclusion	77
3 Le cercle discret	79
3.1 Introduction	80
3.2 Synthèse et analyse du cercle discret	80
3.3 Reconnaissance et segmentation	83
3.4 Conclusion	101
II Analyse d'objets et mesures	103
4 Métriques discrètes	105
4.1 Introduction	107
4.2 Transformée en distance	107
4.3 Squelette de forme et axe médian	133
4.4 Visibilité et géodésiques discrètes	142

4.5	Conclusion sur ce chapitre	157
5	Mesures sur des objets discrets	159
5.1	Introduction	161
5.2	Contexte théorique : la convergence asymptotique	161
5.3	Tangentes et normales	163
5.4	Longueur et aire	176
5.5	Courbures d'objets discrets	197
5.6	Conclusion	218
	Conclusions et perspectives	221
III	Annexes	225
A	Applications	229
A.1	Introduction	230
A.2	Extraction de primitives pour la classification de profils de stèles funéraires	230
A.3	Analyse microscopique d'échantillon de neige	234
A.4	Modèle déformable discret	237
A.5	Conclusion	238
B	Preuves de convergence asymptotique	239
B.1	Introduction	240
B.2	Courbes en dimension d : approche par <i>tube</i>	240
B.3	Surfaces : aire et normales	245
C	Programmation linéaire : algorithme de PREPARATA et SHAMOS	251
D	Index des auteurs cités	255

Troisième partie

Annexes

Contenu des annexes

A Applications	229
A.1 Introduction	230
A.2 Extraction de primitives pour la classification de profils de stèles funéraires	230
A.3 Analyse microscopique d'échantillon de neige	234
A.4 Modèle déformable discret	237
A.5 Conclusion	238
B Preuves de convergence asymptotique	239
B.1 Introduction	240
B.2 Courbes en dimension d : approche par <i>tube</i>	240
B.2.1 Estimation de longueur	240
B.2.2 Estimation de normales	244
B.2.3 Estimation de la courbure	245
B.3 Surfaces : aire et normales	245
B.3.1 Estimation de normales surfaciques	246
B.3.2 Estimation d'aire de surfaces discrètes	246
C Programmation linéaire : algorithme de PREPARATA et SHAMOS	251
D Index des auteurs cités	255

Annexe A

Applications

Sommaire

A.1	Introduction	230
A.2	Extraction de primitives pour la classification de profils de stèles funéraires	230
A.3	Analyse microscopique d'échantillon de neige	234
A.4	Modèle déformable discret	237
A.5	Conclusion	238

A.1 Introduction

Dans cette annexe, nous présentons succinctement les différentes applications dans lesquelles nous avons utilisé les différents outils présentés dans les paragraphes précédents. Plus précisément, nous nous intéressons, dans un premier temps, à un processus de *vectorisation* de courbes 2D en utilisant la notion de points caractéristiques dans le graphe de courbure. Ensuite, nous présentons une application utilisant les estimateurs d’aire et de courbure sur des surfaces discrètes. Enfin nous voyons comment les estimateurs des estimateurs du chapitre 5 peuvent être utilisés dans un processus de segmentation par un modèle déformable discret.

A.2 Extraction de primitives pour la classification de profils de stèles funéraires

Ce travail s’inscrit dans le cadre du projet “Stèles” qui est une collaboration entre le laboratoire ERIC et la Maison de l’Orient Méditerranéen de l’université Lumière Lyon 2. Ce projet a pour but d’aider les archéologues à construire une classification d’un ensemble de profils de stèles funéraires.

Des images de profils ont été recueillies par les archéologues sur le terrain et obtenues par l’utilisation de peignes à dents rétractiles (ou conformètres) qui, en suivant le bord d’une stèle, épousent le bord de celle-ci. Ensuite, ce contour peut être reproduit et numérisé (voir figure A.1). Outre ces profils, nous possédons des textes écrits résumant pour chacun d’eux certaines de leurs caractéristiques géographiques ou historiques telles que le lieu, la date, le type de population.

L’étude classique des profils par les archéologues s’effectue par l’extraction de moulures et de moulurations (ensemble de moulures) caractéristiques des styles. L’objectif de ce projet est donc de proposer une extraction automatique de primitives géométriques de ces contours 2D qui seront ensuite utilisées dans un processus plus général d’extraction de connaissance.

Ce projet a démarré par une élaboration d’un ensemble de pré-traitements permettant de passer des images de la figure A.1 à des courbes discrètes strictement 8-connexes.

Ensuite, nous nous sommes attachés à extraire des points caractéristiques (points de forte courbure) de ces courbes discrètes en utilisant les techniques proposées par TEH et CHIN (1989) : étant donné le graphe de courbure de la courbe discrète, les points caractéristiques sont des extrema locaux de ce graphe dans un voisinage adaptatif. Nous avons pour cela utilisé le calcul de courbure issu de l’algorithme 25 (voir figure A.2). Par la suite, nous utilisons des processus de reconnaissance de formes pour permettre d’associer, à chaque morceau de courbe entre deux points dominants, les différentes formes suivantes :

- segment de droite avec comme information sa longueur et sa pente ;
- arc de cercle avec comme information son rayon, son centre et son orientation.

Le profil de stèle est représenté par un vecteur dans lequel ne sont codés que les points caractéristiques et les formes associées entre ces points (voir figure A.3-(c)). L’évaluation grossière des formes entre deux points caractéristiques nous permet d’avoir de bons résultats dans un processus de création d’une stèle synthétique à partir d’un vecteur (voir figure A.3).

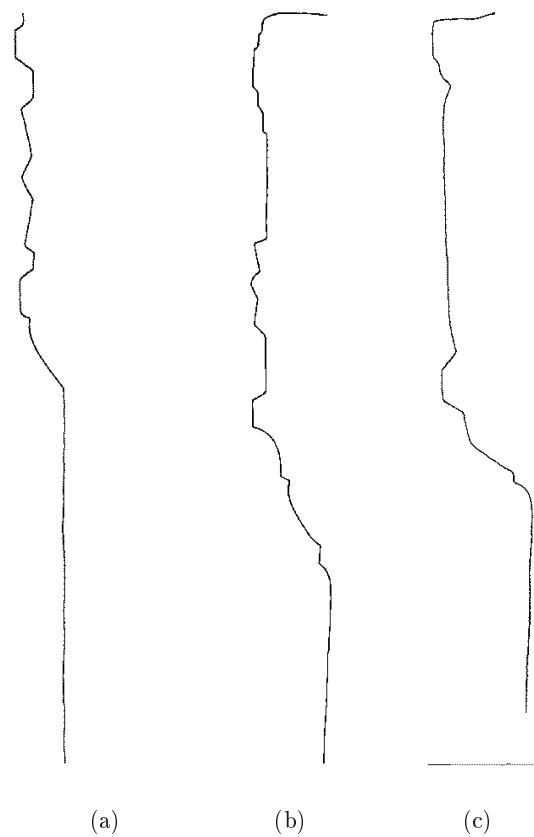
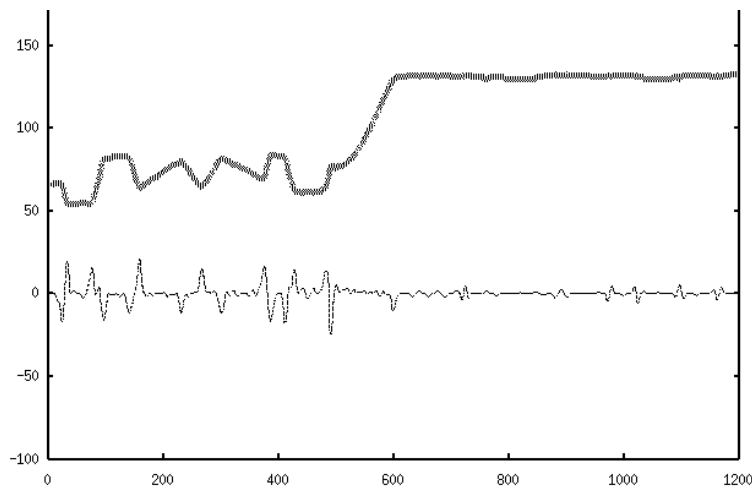


FIG. A.1 —: *Exemples de profils de stèles funéraires sans pré-traitement.*

FIG. A.2 –: *Exemple de graphe des courbures*

Pour avoir la possibilité d'utiliser des outils de *text mining* en plus des algorithmes classiques d'apprentissage automatique supervisé ou non supervisé, il est nécessaire de coder la description précédente sous forme de texte. Pour cela, nous construisons un alphabet dans lequel des lettres vont représenter les segments de droite selon leur orientation (lettres s_0 à s_8) et d'autres vont représenter les différentes orientations des arcs de cercles (lettres c_0 et c_1) ; la figure A.4 illustre ce codage. Il est clair que cette transformation supprime de nombreuses informations géométriques sur la stèle mais le mot obtenu est significatif de l'allure du profil.

La démarche partant d'une courbe bruitée et aboutissant à un mot est suffisamment générale pour trouver de nombreuses applications dans d'autres domaines. Une validation en apprentissage de ce codage sur les profils de stèles a débuté lors du stage de DEA de FATMA BAKLOUTI (2002) mais mérite d'être poursuivie.

Par ailleurs, dans COEURJOLLY ET AL. (2001b), le processus de reconnaissance reposait sur des approximations de segments et de cercles *épais*, et n'utilisaient pas les algorithmes décrits dans la première partie de ce manuscrit. Une perspective importante est donc d'intégrer des objets purement discrets dans ce processus.

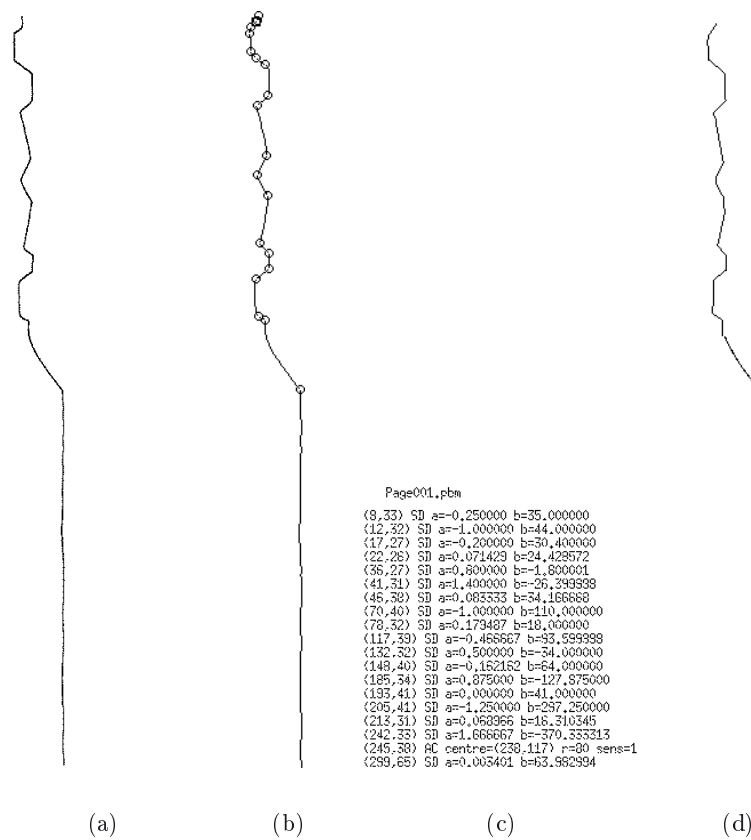
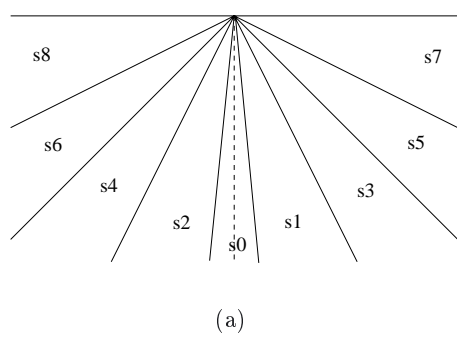


FIG. A.3 —: *Vectorisation et reconstruction de profils de stèles funéraires : (a) profil de stèle sans pré-traitement, (b) après les pré-traitements et avec localisation des points caractéristiques, (c) vecteur descriptif du profil (SD pour segment de droite et AC pour arc de cercle) et (d) reconstruction à partir du code généré.*



s9s5s0s6s0s3s2s3s4s9s6s0s5s0s6c1s0
s8c1s9s3s0s3s0s4s2s0s4s0s4s0s5s10s3s4s9s4s0s5s0c2s6c1s0s4s2s0
s0s5s0s2c1s1s3s0s4c1s1s4s1s6s0

(b)

FIG. A.4 —: *Codage d'une courbe discrète après segmentation par les points caractéristiques : (a) codage utilisé pour les segments de droite et (b) exemples de mots obtenus.*

A.3 Analyse microscopique d'échantillon de neige

Ce travail correspond à une collaboration avec le Centre d'Études de la Neige (CEN) de Météo-France à Grenoble. Le contexte général de ce projet est l'analyse des microstructures d'échantillons de neige afin de mieux comprendre et de modéliser le comportement du manteau neigeux. Les analyses classiques reposent sur des observations au microscope de l'échantillon de neige mais elles ne permettent pas d'observer les agencements des grains et d'étudier la répartition de l'air et de l'eau dans l'échantillon.

Pour cela, le CEN a développé un procédé permettant de maintenir en l'état un échantillon de neige fraîche jusqu'à un appareil de tomographie X afin d'acquérir une image volumique de cet échantillon (voir BRZOSKA ET AL. 1999a; FLIN 2000; COLÉOU ET AL. 2001; BRZOSKA 2001). Une fois les images acquises à l'Installation Européenne de Rayonnement Synchrotron (ESRF) à Grenoble, des traitements d'images sont effectués afin d'obtenir des volumes binaires séparant la neige de l'air. Les images de la figure A.5 présentent quelques uns de ces échantillons de neige (volumes de 300^3 voxels).

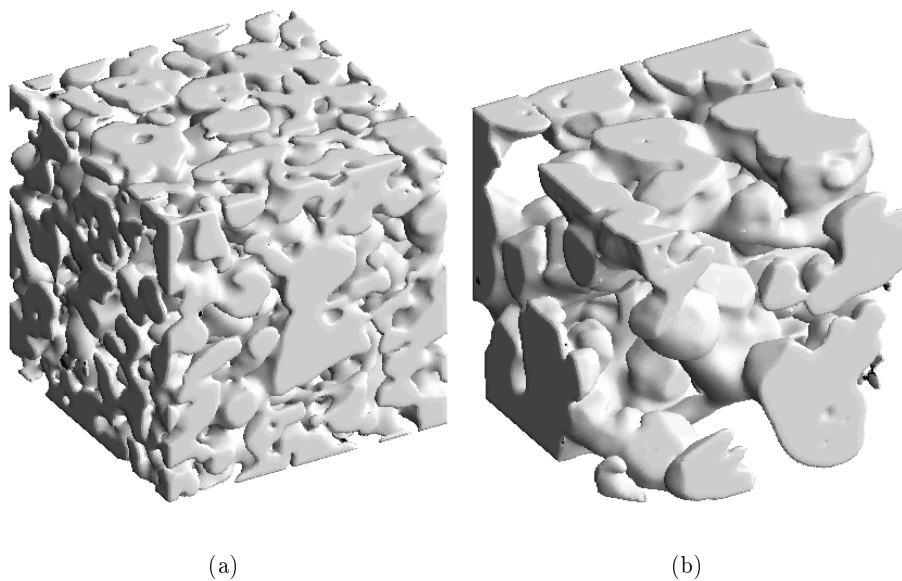


FIG. A.5 —: Exemples de volumes binaires d'échantillons de neige : (a) grains fins provenant de l'Alpe d'Huez et (b) croûte de regel provenant du Col de Porte. Les volumes sont visualisés avec un rendu intégrant les normales calculées par l'algorithme présenté dans le paragraphe 5.3.2.1 (Météo-France/ESRF).

Sur ces objets discrets 3D, les mesures proposées dans le chapitre 5 ont des implications physiques et thermodynamiques importantes. Plus précisément, les estimateurs d'aire de surface discrète permettent d'approcher la notion de *surface spécifique*. De plus, à la différence des glaces profondes et mis à part les cas de forts gradients thermiques, les métamorphoses de la neige sont essentiellement contrôlées par des phénomènes d'interfaces gouvernés par la courbure moyenne (voir figure A.6).

Ainsi, un calcul efficace de courbure moyenne en tout point de tels volumes discrets permet :

- de caractériser le volume en question par son histogramme de courbure. En effet, en l'absence de gradient de température dans le manteau neigeux, les

grains grossissent et s'arrondissent lentement. Par contre, en présence d'un gradient de température, les cristaux croissent suivant leurs axes cristallographiques privilégiés et forment des facettes. Les différences entre les volumes analysés apparaissent clairement dans de tels histogrammes (COLÉOU ET AL., 2001).

- de simuler certaines métamorphoses de neige (FLIN ET AL., 2002). En effet, les zones convexes ont tendance à se sublimer tandis que la vapeur se condense dans les zones concaves.

Par la dimension des volumes manipulés, cette application nécessite des algorithmes d'estimation très robustes. Un premier résultat de cette collaboration a été la publication de travaux sur l'estimation d'aire de surfaces COEURJOLLY ET AL. (2002a). Une première étude sur l'application d'un estimateur de courbure moyenne aux échantillons de neige a permis de se rendre compte de l'intérêt d'une telle mesure (voir BRZOSKA ET AL. 1999b et figure A.6). Cependant, elle a aussi montré les différents problèmes de stabilité et d'efficacité sur des volumes importants. Des études sont en cours pour rendre un tel estimateur plus robuste et plus efficace.

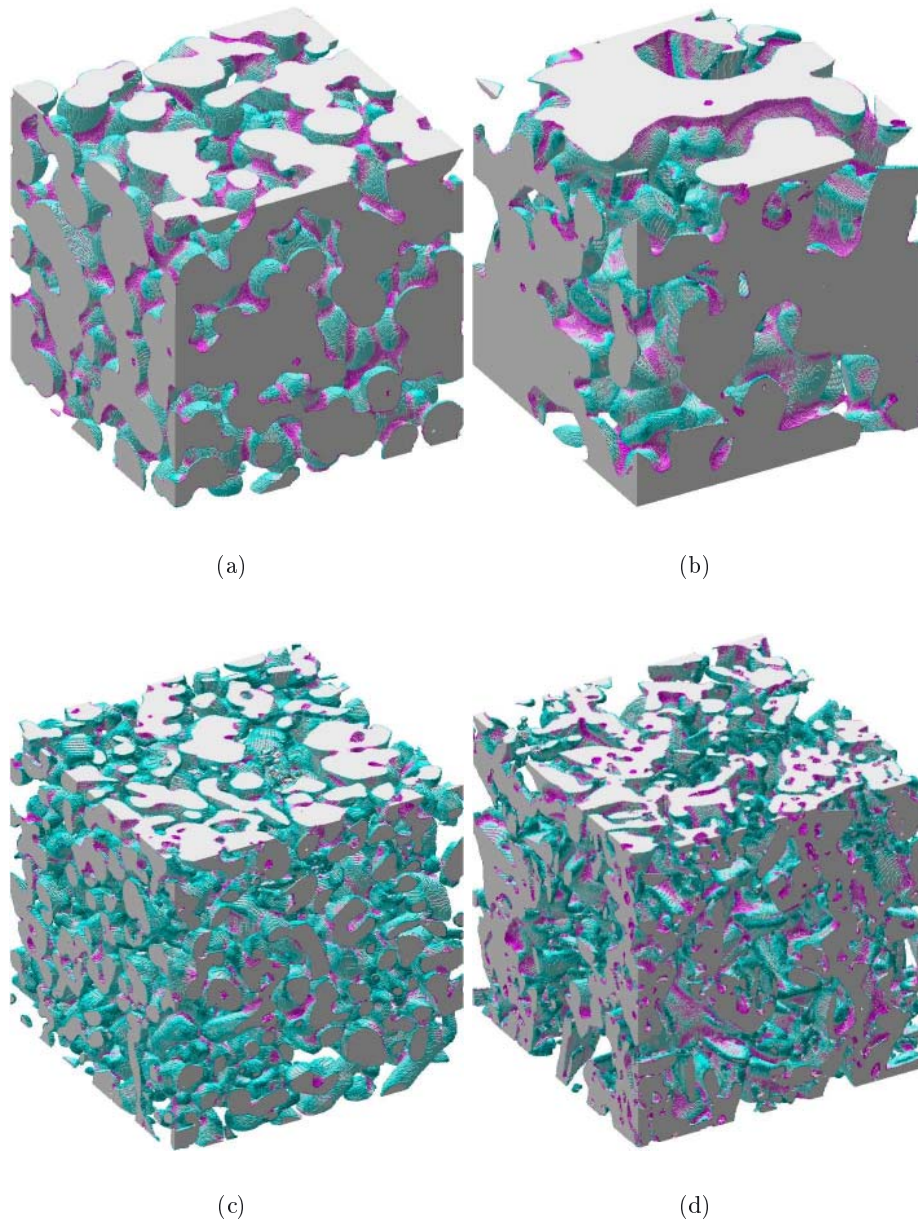


FIG. A.6 —: Exemples de coloriage des voxels à la surface d'échantillons de neige par une estimation de la courbure moyenne proposée par BRZOSKA ET AL. (1999b) (Météo-France/ESRF).

A.4 Modèle déformable discret

Ce projet est une collaboration entre le Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique (LaBRI) et le laboratoire ERIC soutenue par le GDR ISIS (projet jeunes chercheurs).

En segmentation d'images, un paradigme classique repose sur un processus de minimisation d'énergie. L'idée est de déformer une forme géométrique donnée a priori (un modèle) sur l'image analysée en minimisant une énergie, souvent dirigée par deux termes :

- le premier terme correspond à une *énergie image* dirigée par les données. Cette énergie est minimale quand la forme géométrique est localisée sur une zone de l'image *intéressante*. Habituellement, on souhaite que la forme s'adapte aux contours présents dans l'image et donc cette énergie est souvent donnée par l'opposé de la norme du gradient de l'image.
- Le second terme est une énergie liée à la forme de l'objet géométrique. L'idée est que, dans le cas où l'image présente du bruit ou de faibles contrastes, il nous faut *régulariser* cette forme. Classiquement, cette énergie correspond à des mesures de longueur et de courbure de la forme.

Dans la littérature, des courbes paramétriques (*snakes* par exemple) sont utilisées comme formes géométriques à déformer. Le processus de minimisation est itératif, et consiste à déformer cette forme mathématique afin de converger vers une courbe d'énergie localement minimale dans l'image (ce minimum est censé correspondre à la forme recherchée dans l'image).

Ce projet a démarré sur la définition d'un *modèle déformable discret* proposée par LACHAUD et VIALARD (2001). L'idée est de considérer non plus une déformation d'une courbe paramétrique mais directement une déformation d'une courbe ou d'une surface discrète (voir figure A.7). L'intérêt d'une telle approche est double. Dans un premier temps, la forme, dont l'énergie est à minimiser, est dans le même modèle *image* que l'objet à segmenter. De plus, l'ensemble des déformations possibles d'une forme discrète est finie. La recherche d'un minimum local de la fonction d'énergie devient donc un problème combinatoire sur l'image.

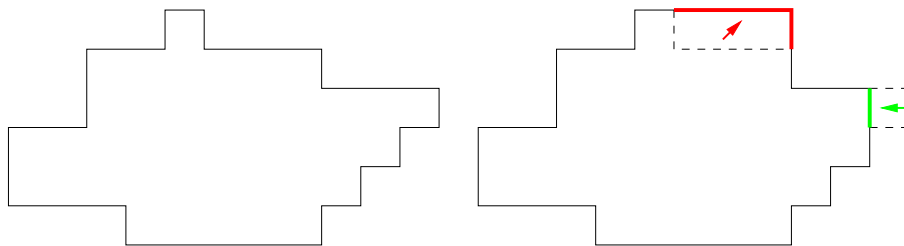


FIG. A.7 – Exemples de déformation d'un contour discret.

En nous basant sur cette définition de modèle déformable, il nous faut définir la fonction d'énergie associée à ce contour discret. Pour cela, des estimateurs très performants de longueur ou de courbure pour le cas 2D sont nécessaires. Cette collaboration avec le LaBRI a donc pour objectif principal l'intégration des différents estimateurs présentés dans le chapitre 5 dans le processus de calcul d'énergie. Sur le plan expérimental, l'objectif est d'offrir une stabilité et une bonne précision à ce calcul d'énergie tout en utilisant des algorithmes efficaces. Sur le plan théorique, la notion de convergence asymptotique de ces estimateurs s'interprètent directement

dans ce modèle : dans le cas bidimensionnel, si nous utilisons des estimateurs discrets de courbure et de longueur ayant cette propriété de convergence asymptotique, nous pouvons alors montrer que l'énergie d'une courbe discrète converge asymptotiquement vers l'énergie classique d'un *snake* sous-jacent à la courbe discrète, si celui-ci est paramétré par son abscisse curviligne. L'idée de ces recherches est de permettre une mise en correspondance entre modèles déformables discrets et modèles déformables continus.

A.5 Conclusion

Nous avons regroupé dans cette annexe l'ensemble des applications dans lesquelles nous avons utilisé les algorithmes proposés. Ces dernières nous ont servis, en amont, d'inspiration pour le développement des estimateurs du chapitre 5. En aval, ces applications nous ont permis de concrétiser un certain nombre d'avancées théoriques.

Annexe B

Preuves de convergence asymptotique

Sommaire

B.1	Introduction	240
B.2	Courbes en dimension d : approche par <i>tube</i>	240
B.2.1	Estimation de longueur	240
B.2.2	Estimation de normales	244
B.2.3	Estimation de la courbure	245
B.3	Surfaces : aire et normales	245
B.3.1	Estimation de normales surfaciques	246
B.3.2	Estimation d'aire de surfaces discrètes	246

B.1 Introduction

Les différentes preuves présentées dans cette annexe correspondent à une collaboration avec OLIVIER TEYTAUD¹. Ces preuves se basent essentiellement sur des propriétés de géométrie différentielle. Une réécriture de celles-ci dans un formalisme moins complexe est en cours.

B.2 Courbes en dimension d : approche par *tube*

Dans ce paragraphe, nous prouvons la convergence asymptotique des estimateurs de longueur de courbes discrètes 2D et 3D, par segmentation en droites discrètes. Nous prouvons aussi la convergence de l'estimateur de normales 2D basé sur les tangentes de VIALARD (1996a) ainsi que la convergence du calcul de courbure de l'algorithme 27.

Toutes ces preuves s'insèrent dans un même formalisme basé sur une décomposition en *tubes* d'une courbe continue. Dans un premier temps nous présentons la preuve complète des estimateurs de longueur, puis nous dérivons des variantes de ce formalisme pour prouver la convergence de l'estimateur de normales et de courbure.

B.2.1 Estimation de longueur

Par la suite, nous considérons :

1. $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ une courbe continue sans auto-intersection dont la courbure est bornée par $C = \frac{1}{R}$;
2. γ est contenue dans une séquence de tubes T_1, \dots, T_N de diamètre θ et de longueur $L(T_1), \dots, L(T_N)$. Chaque extrémité d'un tube est décomposé comme présenté dans la figure B.1-(a). On appelle ce tube auquel on a ajouté un bord, à chaque extrémité, de longueur $\theta/2$ un θ -*agrandissement* ;
3. T_1 contient $\gamma(0)$;
4. T_N contient $\gamma(1)$;
5. les tubes T_i et T_{i+1} sont adjacents par leur θ -agrandissement. Plus précisément, cette intersection se fait par l'axe principal du tube et les faces extrémités (voir figure B.1-(b)) ;
6. $L(T_i) \geq K\sqrt{\frac{\theta}{C}}$ pour tout i dans $\{1 \dots N\}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

L'hypothèse 6 sera discutée plus en détail plus loin. Ce formalisme de tubes correspond à une segmentation en droite discrète de la discrétisation de γ . Dans ce cas, le paramètre θ est lié à la résolution de la grille. Nous supposons θ suffisamment petit devant R pour éviter un certain nombre de cas pathologiques comme des demi-tours dans les tubes (on suppose dans ce cas $\theta/2 < R$) ou encore des cas où un tube T contient deux morceaux de γ (voir figure B.1-(c)).

Par la suite, nous supposerons, sans perte de généralité, que la courbe γ commence en 0 et en termine en 1 dans les parties de longueur $\theta/2$ aux extrémités des tubes T_1 et T_N (voir figure B.1-(b)).

1. ARTELYS, 215 rue Jean-Jacques Rousseau, 92136 Issy-les-Moulineaux Cedex France, olivier.teytaud@artelys.com

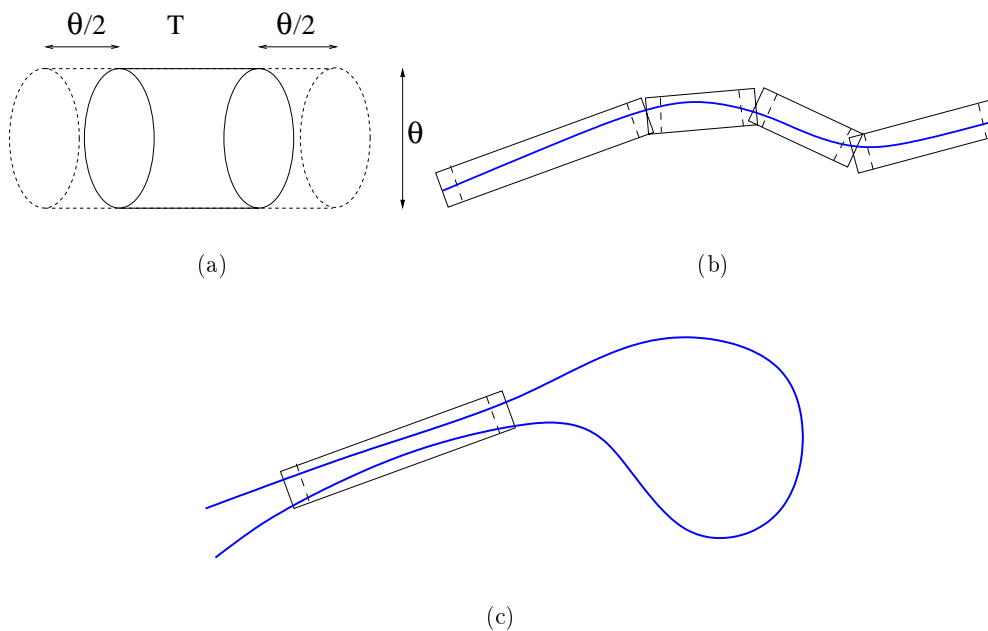


FIG. B.1 — Illustration du θ -agrandissement d'un tube T (a) et segmentation de γ en une séquence de tubes (b). Le paramètre θ doit être suffisamment petit pour éviter le cas (c).

Si nous notons $\mathcal{L}(\gamma)$ la longueur de γ , l'objectif est de montrer le théorème :

Théorème B.1 Soit γ une courbe vérifiant les hypothèses précédentes et une séquence de tubes $\{T_1, \dots, T_N\}$ (N dépend de θ) vérifiant aussi les propriétés ci-dessus. Nous avons alors :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N L(T_i) = \mathcal{L}(\gamma)$$

Dans ce qui suit, nous définissons un θ -rétrécissement de T comme étant une suppression des bords de longueurs $\theta/2$ à un tube T . Nous avons le lemme suivant :

Lemme B.1 L'angle maximal entre l'axe du tube T_i et la tangente en tout point de γ dans le θ -rétrécissement de T_i est inférieur à :

$$\Phi = \arcsin\left(\frac{\theta}{L - \theta}\right) + L(T_i)/R$$

De plus, si θ est suffisamment petit pour que $R \sin(\alpha) \leq L(T_i)$, avec $\alpha = \arctan\sqrt{\frac{\theta}{2R - \theta}}$, alors cet angle maximal Φ est borné par α .

Preuve : Dans le pire cas, nous devons considérer γ comme étant un arc de cercle dans le tube T_i de rayon R . Ainsi, nous avons (voir les notations dans la figure B.2):

$$\begin{aligned} \Omega &\leq L(T_i)/R \\ \sin \beta &\leq \frac{\theta}{L - \theta} \end{aligned}$$

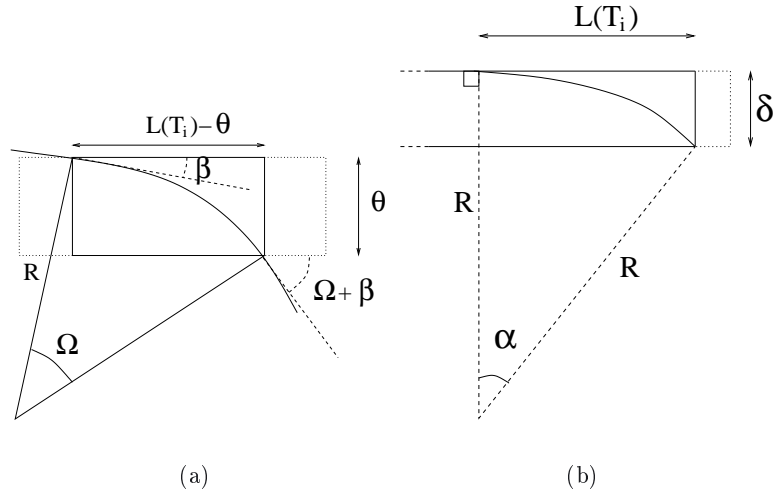


FIG. B.2 –: θ -rétrécissement d'un tube T et différentes notations pour la preuve du lemme B.1. La figure (b) correspond à la projection 2D du pire cas pour le lemme.

L'objectif étant de borner $\Phi = \Omega + \beta$, nous obtenons (voir figure B.2-(a)) :

$$\Phi = \arcsin\left(\frac{\theta}{L - \theta}\right) + L(T_i)/R$$

ce qui prouve le premier résultat.

Le cas particulier selon lequel $R \sin(\alpha) \leq L(T_i)$ pour $\tan \alpha \leq \sqrt{\frac{\theta}{2R-\theta}}$ est présenté figure B.2-(b). Dans ce cas, θ doit être suffisamment petit devant la dérivée de γ pour que γ reste dans le θ -rétrécissement. Finalement, nous obtenons le résultat selon lequel Φ est borné par $\arctan\left(\sqrt{\frac{\theta}{2R-\theta}}\right)$. \square

En corollaire à ce lemme, nous avons une borne en $O(\sqrt{\theta C})$ sur l'angle maximal entre l'axe du tube et la tangente en tout point de γ dans le tube.

De plus, si nous considérons une paramétrisation colinéaire à l'axe du tube de γ , la dérivée de γ dans le tube est bornée par $\sqrt{1 + (d-1)p^2}$ avec $p = \sin(\Phi)$ et $d : [0, 1]$. Nous obtenons ainsi le corollaire :

Corollaire B.1 La différence entre la longueur de γ dans le tube T_i et la longueur de ce tube est bornée par :

$$L(T_i)(\sqrt{1 + (d-1)p^2} - 1)$$

Cette erreur est linéaire en $L(T_i)$ et en θC (avec C constant par hypothèse). Ce corollaire prouve donc qu'à l'intérieur d'un tube, l'erreur de l'estimation de longueur converge vers 0 quand θ tend vers 0. Il nous faut maintenant montrer que l'erreur est linéaire en θC à la jonction entre deux tubes.

Nous introduisons le lemme suivant :

Lemme B.2 Si l'angle entre une tangente à γ et l'axe du tube dans le θ -rétrécissement de T_i est borné par Φ , alors cet angle est borné par $\Phi' = \arcsin(\sin(\Phi) + \theta C)$ dans le (θ) -agrandissement de T_i .

Preuve : La figure B.3 présente les différentes notations et la projection 2D du pire cas pour le lemme (arc de cercle de rayon R sortant du tube par une extrémité du θ -rétrécissement).

En utilisant les différentes relations trigonométriques des angles de cette figure, nous avons :

$$R \cos(\Phi') + A = R \cos(\Phi)$$

et

$$R \sin(\Phi') = R \sin(\Phi) + \theta$$

De cette dernière équation, nous trouvons :

$$\Phi' = \arcsin\left(\sin(\Phi) + \frac{\theta}{R}\right)$$

et comme $C = \frac{1}{R}$, nous prouvons le lemme. \square

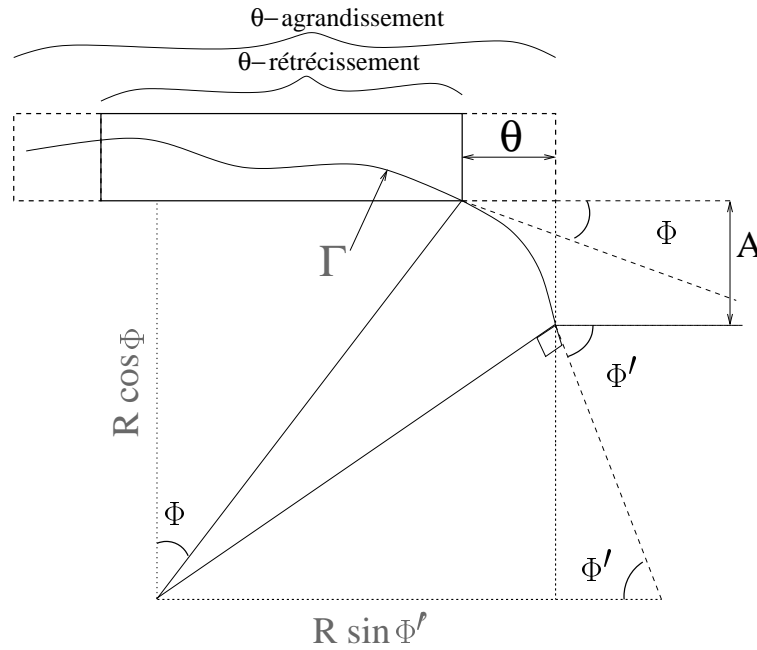


FIG. B.3 – Projection en 2D du pire cas et illustration des différentes notations pour la preuve du lemme B.2.

Ce lemme indique que γ a une variation d'angle de ses tangentes de Φ' dans le tube T_i , ainsi, l'angle entre deux tubes consécutifs, noté Ψ , est borné par $2\Phi'$. La longueur du morceau de γ entre les deux tubes est donc bornée par :

$$\sqrt{1 + (d-1)p^2} \frac{\Psi\theta}{2}$$

avec $p = \sin(\Phi')$ et $d : [0, 1]$.

Ceci implique le corollaire suivant :

Corollaire B.2 L'erreur de l'estimation de longueur lors de la jonction de deux tubes est bornée par $O(\theta\Psi) = O(\theta^{2/3}\sqrt{C})$. Étant donné que le nombre de jonctions est borné par $O(\sqrt{\frac{C}{\theta}})$, l'erreur sur l'estimation totale de longueur est bornée par $O(\theta C)$

Ce corollaire est obtenu en ajoutant le résultat du corollaire B.1 et du lemme précédent. Pour les extrémités de γ , l'erreur sur l'estimation de longueur en ces deux points est aussi bornée par $O(\theta C)$.

Nous avons donc une estimation de la longueur de γ par la somme des longueurs des tubes qui converge vers $\mathcal{L}(\gamma)$ quand θ tend vers 0. Or, cette structure en tube correspond à une segmentation en droites discrètes de la discrétisation de γ et θ correspond à l'inverse de la résolution de la grille. Nous exprimons ce résultat sous forme du théorème suivant :

Théorème B.2 *Si γ vérifie les hypothèses ci-dessus, l'estimation de longueur basée sur une segmentation de la courbe en segments de droites discrètes en dimension 2 ou en dimension 3 converge asymptotiquement vers la longueur de γ .*

Nous notons que les lemmes et corollaires précédents sont vrais quelle que soit la dimension et en particulier pour les dimensions 2 et 3.

Nous discutons maintenant l'hypothèse selon laquelle $L(T_i) \geq K\sqrt{\theta/C}$, pour tout $i < N$ et $K \in \mathbb{R}$. Dans le cas général, la segmentation en droites discrètes ne vérifie pas cette hypothèse. En effet, des cas pathologiques existent. Par exemple, une courbe γ dont la courbure serait bornée et qui oscillerait autour de l'axe des x avec un intervalle entre les passages par $y = 0$ tendant vers 0. Dans ce cas, l'algorithme de segmentation en droites discrètes ne vérifiera pas cette hypothèse quelle que soit la résolution de la grille. Cependant, la famille de courbes vérifiant cette propriété est très large. Dans le cas 2D par exemple, les courbes convexes vérifient cette propriété ainsi que celles comportant un nombre fini de points d'inflexion.

B.2.2 Estimation de normales

Nous reprenons un formalisme très similaire à ce qui est présenté ci-dessus. Nous considérons :

1. $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ une courbe continue dont la courbure est bornée par $C = \frac{1}{R}$;
2. en un point p de γ , on considère le tube T de longueur $L(T)$ et d'épaisseur θ , centré en p ;
3. $L(T) \geq K\sqrt{\frac{\theta}{C}}$ pour tout i dans $\{1 \dots N\}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

Nous conservons les mêmes définitions de θ -agrandissement de T que précédemment. Ce tube correspond à une tangente discrète calculée par l'algorithme de VIALARD (1996a) sur la discrétisation de γ en p , dans le cas 2D.

D'après le lemme B.1, nous savons que l'angle maximal entre la tangente à γ et l'axe du tube T est borné par $O(\sqrt{\theta C})$. Or, cette borne converge vers 0 quand la résolution de la grille augmente, c'est-à-dire quand θ tend vers 0. Ceci nous donne directement le théorème suivant :

Théorème B.3 *Soit une courbe γ dans \mathbb{R}^2 vérifiant les hypothèses ci-dessus, l'estimateur de normales discrètes 2D basé sur l'algorithme de VIALARD (1996a) converge asymptotiquement.*

La discussion sur les hypothèses de ce théorème est identique au cas précédent.

B.2.3 Estimation de la courbure

Nous reprenons le formalisme par tubes avec les définitions suivantes :

- $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ une courbe continue dont la courbure est bornée ;
- soit un point M d'une courbe γ , de courbure $k(M) = \frac{1}{R}$ non nulle. Soit D la droite dont le vecteur directeur est la tangente en M .
- Soient T_1 et T_2 les deux tubes partant de M le long de γ , de part et d'autre de M .
- Soient β_1 et β_2 les angles entre T_1 et D , T_2 et D .
- Nous supposons que $L(T_i) \geq K\sqrt{\frac{\theta}{C}}$ pour tout i dans $\{1, 2\}$ avec $K \in \mathbb{R}$. Nous supposons aussi que $L(T_i) \leq K'\sqrt{\frac{\theta}{C}}$ avec $K' \in \mathbb{R}$. Cette dernière hypothèse est vraie dans le cas des processus de discrétisations standards.

Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème B.4 *Soit une courbe γ dans \mathbb{R}^2 ou dans \mathbb{R}^3 vérifiant les hypothèses ci-dessus, l'estimateur de courbure basé sur les demi-tangentes discrètes (algorithme 27) converge asymptotiquement.*

Preuve : *Dans cette preuve, nous considérons le pire cas qui correspond à un arc de cercle de rayon R . Ainsi, d'après le lemme B.1, la longueur du tube T_1 est égale à $R\beta_1$ avec une erreur bornée par $O(\beta_1^2 + \theta)$. De même, la longueur T_2 est égale à $R\beta_2$ avec une erreur en $O(\beta_2^2 + \theta)$.*

En se basant sur ces longueurs, nous avons :

$$L(T_1) + L(T_2) = R\alpha + O(\alpha^2 + \theta)$$

avec $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ (voir figure B.4).

De plus, avec l'hypothèse selon laquelle $L(T_i) \leq K'\sqrt{\theta/C}$, α est borné par $O(\sqrt{\theta/R})$.

En d'autres termes, nous estimons la longueur de l'arc de cercle $R\alpha$ par la somme des longueurs des tubes avec une erreur qui tend vers 0 quand θ tend vers 0. Nous utilisons donc ce processus qui converge asymptotiquement pour estimer R en $L(T_1) + L(T_2)$ par $\beta_1 + \beta_2$. Cette estimation est similaire à celle de l'algorithme 27 ce qui prouve sa convergence asymptotique. \square

Cette preuve est valide quelle que soit la dimension de γ et notamment dans les cas 2D et 3D.

B.3 Surfaces : aire et normales

Dans ce paragraphe, nous prouvons la convergence asymptotique de l'estimateur de normales discrètes surfaciques basé sur un algorithme similaire à celui de TELLIER et DEBLED-RENNESON (1999). Nous prouvons ensuite la convergence de l'estimateur d'aire de surface discrète par intégration du champ de normales surfaciques selon le principe proposé par LENOIR (1999).

Nous considérons dans ce paragraphe une surface compacte de Jordan, notée \mathcal{S} , dans \mathbb{R}^3 . Nous considérons la discrétisation de cette surface sur une grille de résolution $r = 1/\theta$.

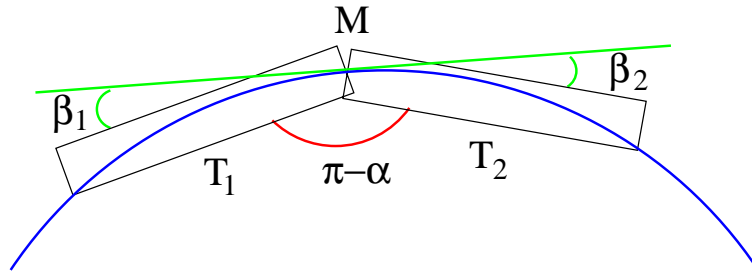


FIG. B.4 –: Illustration pour la preuve du théorème B.4 (projection 2D du pire cas).

B.3.1 Estimation de normales surfaciques

Nous reprenons l'approche de LENOIR (1999) et TELLIER et DEBLED-RENNESON (1999) qui consiste à estimer la normale en un point de la surface par produit vectoriel de deux tangentes calculées sur des coupes de l'objet (voir paragraphe 5.3.2.3).

Ainsi, si nous notons \vec{t}_1^* et \vec{t}_2^* les deux tangentes dans les deux coupes, calculées en un surfel s d'une surface discrète, nous avons :

$$\vec{n}^*(s) = \vec{t}_1^*(s) \times \vec{t}_2^*(s) \quad (\text{B.1})$$

où \times est le produit vectoriel usuel.

D'après les résultats du paragraphe précédent, nous avons le théorème :

Théorème B.5 *L'estimation des normales surfaciques basée sur une décomposition en coupes et basée sur l'algorithme de VIALARD (1996a) pour résoudre le calcul dans les coupes converge asymptotiquement.*

Preuve : Nous supposons que chacune des coupes de \mathcal{S} dans un plan d'axe de la grille donne une courbe γ vérifiant les hypothèses du paragraphe B.2.

Ainsi, nous avons une estimation de $\vec{t}_1^*(s)$ et $\vec{t}_2^*(s)$ qui converge asymptotiquement par le théorème B.3. En d'autres termes, $\vec{t}_1^*(s)$ converge vers la tangente exacte $\vec{t}_1(s)$ en s , de même pour $\vec{t}_2^*(s)$.

Finalement, le produit vectoriel $\vec{t}_1^*(s) \times \vec{t}_2^*(s)$ converge nécessairement vers $\vec{t}_1(s) \times \vec{t}_2(s)$, ce qui prouve le théorème. \square

Encore une fois, l'ensemble des surfaces de Jordan \mathcal{S} vérifiant les hypothèses de ce théorème est vaste. Une étude est en cours pour isoler les surfaces qui ne vérifient pas cet énoncé.

B.3.2 Estimation d'aire de surfaces discrètes

Dans ce paragraphe, nous montrons que l'estimation de l'aire d'une surface discrète basée sur l'intégration du champ des normales converge asymptotiquement si l'estimation des normales surfaciques a cette propriété.

Nous considérons donc une surface \mathcal{S} dans \mathbb{R}^3 avec des dérivées continues. Nous considérons un processus de discrétisation, noté f_r qui est une application de \mathcal{S} dans \mathbb{R}^3 et telle que df_r converge faiblement vers l'identité. En d'autres termes, pour toute fonction continue g , nous avons :

$$\int_{\mathcal{S}} g \cdot df_r(ds) \rightarrow \int_{\mathcal{S}} g ds$$

Nous supposons aussi que df_r et f_r sont bornées pour une résolution suffisamment grande et que f_r converge (sens usuel) vers l'identité. Plus précisément, f_r est une fonction de discrétisation telle que $f_r(\mathcal{S})$ converge vers \mathcal{S} quand r croît.

Ce formalisme n'est pas standard pour représenter un processus de discrétisation. Cependant, tous les processus de discrétisation classiques permettent de construire une telle fonction (non unique). Ce point sera discuté par la suite.

Rappelons que l'aire de la surface \mathcal{S} est donnée par :

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{n}(s) d\vec{s}$$

Une approximation discrète de cette formule est donnée par :

$$\int_{f_r(\mathcal{S})} \vec{n}^*(s')$$

avec \vec{n}^* une estimation de la normale surfacique. Pour simplifier les notations, le terme intégrale représente ici une somme finie.

Nous supposons que l'estimation $\vec{n}^*(s')$ converge uniformément vers $\vec{n}(s)$ quand $d(s, s') \rightarrow 0$. Plus précisément, nous avons :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{d(s, s') \leq \epsilon} |\vec{n}^*(s') - \vec{n}(s)| = 0 \tag{B.2}$$

Nous remarquons que cette hypothèse peut être réécrite comme une simple condition de convergence puisque nous travaillons uniquement sur des fonctions continues sur des ensembles compacts. Cette condition peut donc être vue comme une propriété de convergence asymptotique de l'estimateur de normale surfacique.

L'intégrale discrète est donc égale à :

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{n}^*(f_r(s)) df_r(\vec{d}s) \tag{B.3}$$

Si nous notons :

$$\Delta = \left| \int_{\mathcal{S}} \vec{n}^*(f_r(s)) df_r(\vec{d}s) - \int_{\mathcal{S}} \vec{n}(s) d\vec{s} \right| \tag{B.4}$$

et si $1/r$ est suffisamment petit pour que nous ayons $|\vec{n}^*(f_r(s)) - \vec{n}(s)| < \epsilon$, alors le fait que df_r soit borné nous donne :

$$\Delta = O(\epsilon) + \left| \int_{\mathcal{S}} \vec{n}(s) df_r(\vec{d}s) - \int_{\mathcal{S}} \vec{n}(s) d\vec{s} \right| \tag{B.5}$$

Par la propriété de convergence faible de df_r , le terme entre les valeurs absolues $|\cdot|$ converge vers 0 quand r croît. Nous obtenons donc le théorème suivant :

Théorème B.6 *Si df_r converge faiblement vers l'identité quand la résolution augmente, et si $\vec{n}^*(f_r(s))$ converge uniformément vers $\vec{n}(s)$, l'estimation de surface par intégration des normales converge vers l'aire de \mathcal{S} avec une vitesse de convergence en $O(\epsilon)$.*

Détaillons maintenant la construction de la fonction de discrétisation f_r .

Pour $1/r$ suffisamment petit, nous définissons $f_r(s) = s'$ une fonction de \mathcal{S} dans \mathbb{R}^3 telle que $s' = s + k\vec{n}(s)$ ($k \in \mathbb{R}$) et $d(s, s')$ est minimal (voir figure B.5).

L'existence, l'unicité, la continuité et le dérivabilité de f_r sont claires partout sauf aux endroits où \mathcal{S} est perpendiculaire à $f(\mathcal{S})$ (voir figure B.5-(droite)).

Deux approches sont possibles : soit nous ajoutons une hypothèse sur \mathcal{S} pour éviter ce cas (comme dans JONAS et KIRYATI (1997)), soit nous montrons que ce dernier n'arrive jamais avec les hypothèses que nous possédons.

Ce cas pathologique apparaît pour $\vec{n}(s) \in E$ avec E l'ensemble des normales aux normales à la discrétisation (normales élémentaires). E est de mesure nulle puisque E est une union finie d'ensembles de mesures nulles (il n'y qu'un nombre fini de normales à la discrétisation et donc un nombre fini d'hyperplans de normales à ces normales).

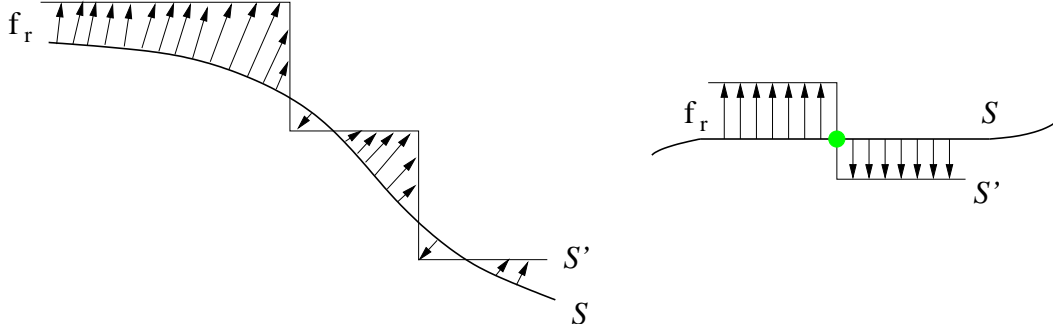


FIG. B.5 — Illustration de la construction de f_r dans le cas 2D : à gauche une courbe continue \mathcal{S} et sa discrétisation \mathcal{S}' avec la fonction f_r . A droite, présentation d'un cas pathologique : \mathcal{S} est orthogonale à \mathcal{S}' .

Nous avons donc montré que pour un point s donné, la probabilité d'avoir $\vec{n}(s) \in E$ est nulle. Il nous reste à montrer que ceci est vrai pour tout voisinage de $s \in \mathcal{S}$.

Considérons $d(s)$ pour $s \in \mathcal{S}$ la dimension de l'ensemble des normales $\vec{n}(s'')$ pour s'' dans le voisinage de s . Cette fonction d est une fonction à valeurs entières constante partout sauf pour un ensemble de mesure nulle. Nous définissons \mathcal{S}_i pour $i \in I$ les différents sous-ensembles connexes maximaux de \mathcal{S} sur lesquels d est différente de la dimension sous-jacente. Nécessairement, I est dénombrable, puisque chaque \mathcal{S}_i a une mesure positive, et une somme finie est nécessairement dénombrable.

Ainsi, la somme, pour $i \in I$, des probabilités telles que $\vec{n}(s) \in E$ pour $s \in \mathcal{S}_i$ (la variable aléatoire étant le choix des angles définissant la grille par rapport à \mathcal{S}) est une somme dénombrable de probabilités nulles. Finalement, cette probabilité est nulle.

La convergence de f_r vers l'identité étant claire, il nous reste à vérifier la convergence faible de df_r vers l'identité. Ceci est en fait une simple conséquence du fait que f_r converge presque partout vers l'identité : en effet, cette convergence implique une faible convergence de ses dérivées. Précisément, si f_r converge vers l'identité et si la dimension est d , considérons x_i une des variables et g_r (resp. g) la restriction de f_r (resp. l'identité) à une de ses dimensions (on a donc d^2 choix possibles de (x_i, g_r) , correspondant aux 9 cases de la matrice df_r et g est une projection de l'identité sur un axe), et H un hyper-rectangle sur lequel intégrer $\partial g_r / \partial x_i$. L'intégrale de $\partial g_r / \partial x_i$ sur un segment donné par :

$$[(x_1, \dots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots, x_d), (x_1, \dots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \dots, x_d)]$$

est égale à :

$$g_r(x_1, \dots, b_i, \dots, x_d) - g_r(x_1, \dots, a_i, \dots, x_d)$$

Ce dernière mesure tend vers $g(x_1, \dots, b_i, \dots, x_d) - g(x_1, \dots, a_i, \dots, x_d)$. Il suffit alors d'intégrer par rapport aux x_i (le signe intégral et le signe somme commutant pour une famille équicontinue, la famille étant équicontinue car de dérivées bornées) pour voir que l'on a convergence pour les intégrales sur les rectangles, et donc sur les familles continues qui sont limites de fonctions constantes sur des rectangles. Enfin, ceci montre la convergence faible des dérivées de f_r .

Finalement, d'après le théorème B.5, nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire B.3 *Soit \mathcal{S} une surface C^2 dans \mathbb{R}^3 à courbure bornée (plus quelques hypothèses techniques), l'estimateur d'aire de surface discrète basé sur l'intégration discrète des vecteurs normaux, et dont les normales sont données par l'algorithme décrit dans le paragraphe 5.3.2.3, converge asymptotiquement.*

Le théorème précédent est vrai dans le cas de l'estimation de longueur basée sur le même processus d'intégration de normales discrètes. Nous énonçons donc le corollaire :

Corollaire B.4 *Soit Γ la famille des courbes C^2 dans \mathbb{R}^2 à courbure bornée, l'estimateur de longueur basée sur l'intégration des normales discrètes construites par l'algorithme de VIALARD (1996a) converge asymptotiquement.*

Annexe C

Programmation linéaire : algorithme de PREPARATA et SHAMOS

Nous présentons l'algorithme de PREPARATA et SHAMOS (1985) pour le calcul de l'espace des solutions associé à un système d'inéquations linéaires en dimension deux. Cet algorithme, optimal en temps, a été utilisé à de nombreuses reprises pour sa simplicité et son efficacité dans les paragraphes 2.2.2.1, 2.4.2.2 et 3.3.5.

Nous considérons, par la suite, un ensemble \mathcal{E} de n contraintes linéaires (*i.e.* inéquations linéaires en dimension 2). Nous supposons que le domaine des solutions $S(\mathcal{E})$ de \mathcal{E} est un polygone fini et non-vide. Ces hypothèses seront traitées au cours de l'analyse.

Pour simplifier l'utilisation de la dualité point/droite, connue aussi sous le nom de *transformée de HOUGH* (version linéaire), nous supposons que \mathcal{E} ne contient aucune contrainte verticale. Si \mathcal{E} présente une telle contrainte, celle-ci pourra être considérée en post-traitement. Sous cette hypothèse, nous définissons le sommet R de $S(\mathcal{E})$ le plus à droite et L le sommet de $S(\mathcal{E})$ le plus à gauche.

Nous notons L^- la courbe polygonale joignant R à L et correspondant à la partie inférieure de $S(\mathcal{E})$. De même, nous notons L^+ la courbe polygonale joignant L à R qui correspond à la partie supérieure de $S(\mathcal{E})$ (voir figure C.1).

Nous représentons par $\{v_i^-\}_{i=0,\dots,m}$ les sommets de L^- , avec $v_0^- = R$ et $v_m^- = L$. De la même manière, nous notons $\{v_i^+\}_{i=0,\dots,m'}$, les sommets de L^+ avec $v_0^+ = L$ et $v_{m'}^+ = R$. Finalement, nous notons aussi les arêtes de L^- par $\{e_i^-\}_{i=1,\dots,m}$ et celles de L^+ par $\{e_i^+\}_{i=1,\dots,m'}$.

Sous notre hypothèse précédente, toutes les contraintes de \mathcal{E} sont données sous la forme :

$$\mathcal{E} = \{a_i x + b_i y + c_i \leq 0\}_{i=0,\dots,n}$$

avec $\{b_i \neq 0\}_{i=0,\dots,n}$.

Dans ce qui suit, nous nous intéressons à la construction de la partie L^+ du polygone des solutions, la partie inférieure L^- se calculant de manière symétrique. Nous remarquons que les arêtes $\{e_i^+\}$ sont construites par le sous-ensemble \mathcal{E}^+ d'inéquations de \mathcal{E} définies par $a_i x + b_i y + c_i \leq 0$ où $b_i > 0$. Plus précisément, si nous considérons l'ensemble des droites issues de \mathcal{E}^+ , les sommets de la courbe polygonale L^+ correspondent aux sommets de l'enveloppe inférieure de ces droites (voir figure C.3).

Pour calculer cette enveloppe inférieure d'un ensemble de droites, nous allons utiliser le passage dans l'espace dual. Si nous notons $y = \alpha x + \beta$, une droite d'une

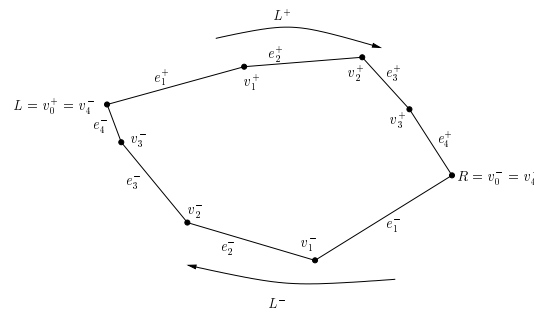


FIG. C.1 –: *Différentes notations pour l'illustration de l'algorithme de PREPARATA et SHAMOS (1985).*

contrainte de \mathcal{E}^+ (α et β sont donnés par a , b et c), la transformée duale de cette droite correspond au point $(a, -b)$ dans l'espace des paramètres. De la même manière, la transformée de la droite $y = ux - v$ dans l'espace dual est le point (u, v) dans l'espace primal. Nous notons par la suite D^* le point qui correspond à la transformée d'une droite D et P^* la droite correspondant à la transformée d'un point P . La figure C.2 illustre ces différentes définitions.

Nous avons la propriété suivante :

Proposition C.1 *Soit $M = (u, v)$ un point dans l'espace primal. M vérifie l'inéquation $ax + by + c \leq 0$, avec $b > 0$, si et seulement si le point $(-a/b, c/b)$ est sous la droite M^* d'équation $y = ux - v$ dans l'espace dual.*

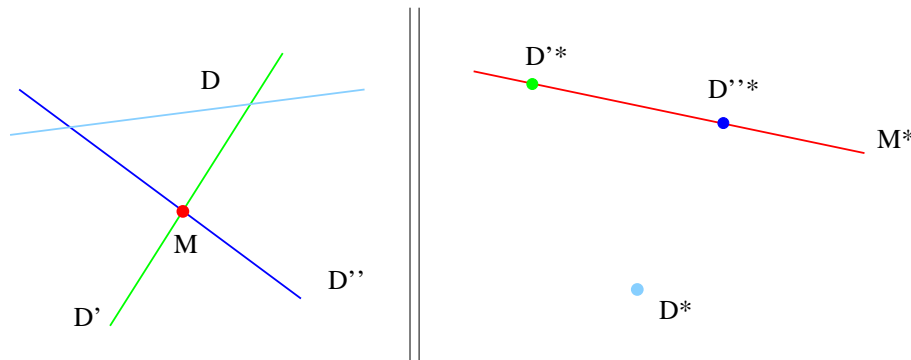


FIG. C.2 –: *Transformation dans l'espace dual et illustration de la proposition C.1.*

La preuve de cette proposition se base sur le fait que les deux termes de la double implication sont équivalents à l'inégalité $au + bv + c \leq 0$.

Nous pouvons immédiatement déduire de cette proposition que si D, D' et D'' représentent trois droites telles que le point d'intersection $M = D' \cap D''$ a pour coordonnées $M = (a, b)$, alors l'enveloppe inférieure des droites D, D' et D'' prend la valeur b pour $x = a$ si et seulement si D^* est situé sous la droite M^* (voir figure C.2).

En se basant sur cette observation, nous avons :

Proposition C.2 *Soit \mathcal{F} un ensemble de droites (dont aucune n'est verticale) et \mathcal{F}^* l'ensemble des points qui sont les transformées des droites de \mathcal{F} dans l'espace dual.*

La transformée duale transforme bijectivement les droites de l'enveloppe inférieure de \mathcal{F} en les sommets de la partie supérieure de l'enveloppe convexe de \mathcal{F}^* .

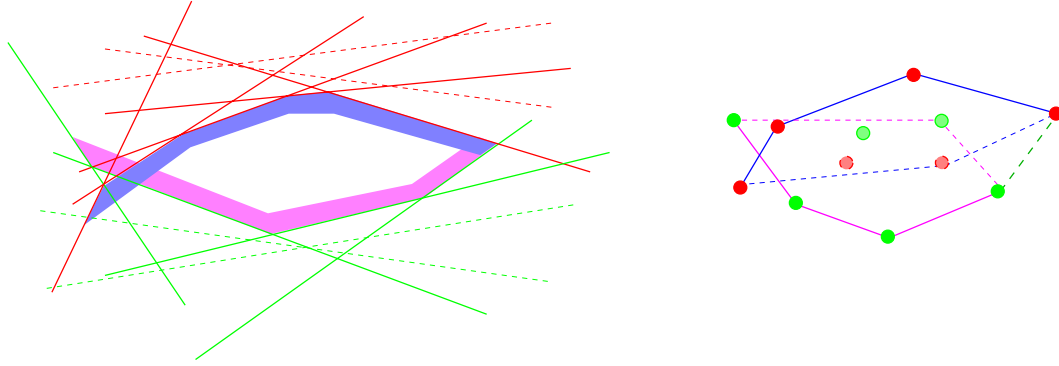


FIG. C.3 – L'enveloppe inférieure des droites issues de $\mathcal{E}^+ = \{e_i\}$ permettent de construire les sommets de la partie supérieure des points $\{e_i^*\}$. De même pour l'ensemble \mathcal{E}^- .

De plus, les arêtes de l'enveloppe convexe de \mathcal{F}^* correspondent dans le primal aux sommets de l'enveloppe inférieure des droites.

Ainsi, pour calculer L^+ à partir de \mathcal{E}^+ , nous calculons les transformées dans le dual des droites \mathcal{E}^+ , nous appliquons un algorithme classique d'enveloppe convexe des points obtenus et finalement, nous ramenons dans l'espace primal les sommets de la partie supérieure de cette enveloppe convexe.

Si nous avons $|\mathcal{E}^+| = O(n)$, ce calcul s'effectue en $O(n \log(n))$ puisque le calcul de l'enveloppe convexe s'effectue en $O(n \log(n))$.

De la même manière, nous pouvons construire la courbe L^- en considérant les équations $\mathcal{E}^- \subset \mathcal{E}$ données par $a_i x + b_i y + c_i \leq 0$ avec $b_i < 0$. Cette courbe polygonale est l'enveloppe supérieure de ces droites et nous considérons donc la partie inférieure de l'enveloppe convexe des points transformés de \mathcal{E}^- dans l'espace dual. Pour les mêmes raisons que ci-dessus, ce calcul s'effectue en $O(n \log(n))$. Enfin, $S(\mathcal{E})$ est calculé en considérant l'intersection des courbes polygonales L^+ et L^- dans l'espace dual. L'algorithme 31 présente l'algorithme complet.

Corollaire C.1 *Le domaine $S(\mathcal{E})$ des solutions d'un système d'inéquations linéaires en dimension 2 s'obtient en $O(n \log(n))$ en utilisant la transformée duale et le calcul d'enveloppe convexe 2D.*

Nous pouvons maintenant discuter des différents cas où le domaine $S(\mathcal{E})$ est vide ou non borné. Si l'un des deux sous-ensembles \mathcal{E}^+ ou \mathcal{E}^- est vide, l'espace des solutions devient non-borné. Si les deux sous-ensembles sont non vides, $S(\mathcal{E})$ sera non borné si ces deux ensembles contiennent des contraintes du type $b_i y + c_i \leq 0$. Enfin, $S(\mathcal{E})$ sera vide si l'intersection des lignes polygonales L^+ et L^- est vide, ce qui correspond intuitivement au fait que L^- soit *au dessus* de L^+ . Tous ces différents cas peuvent être détectés en pré-traitement de l'algorithme 31 ou au cours de celui-ci sans changer la complexité de l'algorithme.

Étant donné que le coeur de cet algorithme repose sur un calcul d'enveloppe convexe, nous pouvons utiliser des algorithmes classiques pour calculer celle-ci de manière incrémentale et donc rendre la construction de $S(\mathcal{E})$ incrémentale. Nous

Algorithme 31 Calcul de l'intersection de contraintes linéaires par l'algorithme de PREPARATA et SHAMOS (1985)

INTERSECTION_SHAMOS(\mathcal{E})

- 1: $\mathcal{E}^+ = \{a_i x + b_i y + c_i \leq 0 \in \mathcal{E} \mid b > 0\}$
 - 2: $\mathcal{E}^- = \{a_i x + b_i y + c_i \leq 0 \in \mathcal{E} \mid b < 0\}$
 - 3: $C^+ = \text{convexhull}(\text{dual}(\mathcal{E}^+))$
 - 4: $C^- = \text{convexhull}(\text{dual}(\mathcal{E}^-))$
 - 5: Soit L^+ la partie inférieure de C^+
 - 6: Soit L^- la partie supérieure de C^-
 - 7: **retourner intersection de L^+ et de L^-**
-

obtenons donc un coût de mis-à-jour en $O(\log(n))$ à chaque insertion d'une nouvelle contrainte dans la construction de $S(\mathcal{E})$.

Dans le cas d'un système linéaire en dimension 3, le même principe peut être utilisé avec la même complexité, c'est-à-dire $O(n \log(n))$ (pour n inéquations). Nous sommes cependant limités dans les dimensions supérieures par l'algorithme d'enveloppe convexe.

Annexe D

Index des auteurs cités

- Acketa, D. M. 68, 97
Aizawa, K. 80, 83, 84
Amanatides, J. 46
Anderson, T. A. 83, 84
Andrès, E. 16, 46, 57, 80, 81
Aronsson, M. 208
Artzy, E. 12
Asano, T. 179, 181, 184
Attali, D. 135–137, 140, 142
- Baklouti, F. 232
Baruchel, J. 234
Beckers, A. L. 184, 188
Bernoulli, J. 27
Bertrand, G. 12, 17, 135
Blankinship, W. A. 58
Blum, H. 107, 133
Boissonnat, J.-D. 32, 111
Boix, E. 213, 214
Boller, E. 234, 235
Borel, S. 234
Borgefors, G. 107, 130
Borienne, P. 72
Bresenham, J. E. 16, 29, 49, 80, 81, 142
Breu, H. 112–118, 120, 123
Bribiesca, E. 14
Brissaud, O. 234
Bruckstein, A. M. 37, 42, 44
Brzoska, J.-B. 168, 234–236
Bullard, J. W. 210–213
Bülow, T. 184, 188
Burguet, J. 72
- Buzer, L. 32, 44, 63, 65, 84
- Carter, W. C. 210–213
Chassery, J.-M. 38, 42, 60
Chen, L. S. 172
Chin, R. 230
Christoffel, E. B. 27
Cline, H. E. 71
Coeurjolly, D. 46, 47, 53, 71, 73, 80, 84, 86, 88, 96, 97, 143, 146, 168, 177, 179, 184, 189, 196, 201, 232, 235
Cohen, D. 46–49, 165, 166
Coléou, C. 168, 234–236
Cormen, T. 115, 142, 149, 150, 215
Couprie, M. 17
Cuisenaire, O. 108, 109, 151
- Damaschke, P. 83, 84
Danielsson, P. E. 108, 109
de Berg, M. 32, 87, 94, 111, 115, 142, 215
Debled-Rennesson, I. 19, 28–30, 39–41, 44–49, 51–53, 56, 57, 59, 60, 62, 72, 89, 93, 95, 164, 173, 176, 178, 179, 184, 189, 246
Dekker, S. T. 150, 152
Deriche, R. 166, 210
Dorst, L. 22–24, 27, 28, 31, 34, 35, 42, 44, 177, 184
- Ellis, T. J. 181, 184
Ezquerria, N. F. 71
- Ferianc, P. 179

- Feschet, F. 164, 165, 176, 182, 202, 204, 207, 232
- Figueiredo, O. 47
- Fisk, S. 83, 84
- Flin, F. 168, 196, 234, 235
- Françon, J. 63, 72, 172
- Freeman, H. 13, 21, 177
- Freider, G. 12
- Fullet, E. R. 210–213
- Garboczi, E. J. 210–213
- Gerard, Y. 80, 86, 88, 96, 97, 201
- Gil, J. 112–118, 120, 123
- Gordon, D. 166
- Gourdon, A. 210
- Grabiner, D. J. 38, 63
- Granum, E. 150
- Guan, W. 115
- Hardy, G. H. 27, 34, 40, 90, 94
- Harris, J. W. 206
- Herman, G. T. 12, 172
- Hesselink, W. H. 110, 130
- Hirata, T. 110, 130
- Hübler, A. 22, 28, 31
- Hung, S. H. Y. 22, 23, 28, 56
- Icking, C. 111
- Imiya, A. 71
- Jacob, M.-A. 81
- Jonas, A. 9, 15, 16, 184, 188, 248
- Jordan, C. 10
- Kaufman, A. 46–49, 165, 166
- Kawamura, Y. 179, 181, 184
- Kenmochi, Y. 17, 71
- Kim, C. 93
- Kim, C. E. 19, 46, 54–56, 60, 62, 80, 83, 84, 93
- Kirkpatrick, D. 112–118, 120, 123
- Kiryati, N. 9, 15, 16, 107, 154, 184, 188, 248
- Klein, R. 111
- Klette, R. 22, 28, 31, 163, 177–179, 181, 183, 184, 188, 192, 193
- Köllner, P. 111
- Koplowitz, J. 23
- Kovalevsky, V. A. 12, 13, 24, 79, 84, 101, 163, 178, 179, 183, 184
- Kubler, O. 107
- Lachaud, J.-O. 71, 237
- Lamboley, P. 168
- Leiserson, C. 115, 142, 149, 150, 215
- Lengagne, R. 166, 210
- Lenoir, A. 142, 173, 176, 181, 193, 211, 213, 246
- Lesaffre, B. 168, 234–236
- Lindblad, J. 192
- Lindenbaum, M. 23, 37, 42, 44
- Lohou, C. 135
- Lorensen, W. E. 71
- Ludwig, W. 234, 235
- Ma, L. 111
- Ma, S. 115
- Macq, B. 108
- Malgouyres, R. 12, 72, 173, 176
- Maurer Jr., C.R. 156
- McIlroy, M. D. 34–37
- Megiddo, N. 32, 44, 63, 83
- Meijster, A. 110, 130
- Mesmoudi, M. M. 63
- Miguet, S. 71, 143, 146, 201
- Monga, O. 166, 210
- Montanari, U. 135
- Montanvert, A. 8, 14, 16, 201, 206
- Moreau, P. 151, 152
- Morgenthaler, D. G. 12
- Mullikin, J. C. 109, 192
- Nakamura, A. 80, 83, 84
- Nehlig, P. 46
- Nicod, J.-M. 71
- Nyström, I. 192
- Obokata, K. 179, 181, 184
- O'Rourke, J. 33, 34, 44
- Overmars, M. 32, 87, 94, 111, 115, 142, 215

Papier, L. 72, 172, 173
 Perroton, L. 12, 13
 Pfaltz, J. L. 107, 133
 Pieritz, R. A. 235, 236
 Piper, J. 150
 Pitteway, M. L. V. 81, 82
 Preparata, F. P. 32, 38, 44, 63, 65, 84,
 87, 94, 96–98, 101, 111, 227, 251, 252,
 254
 Proffitt, D. 181, 184

 Qi, R. 156

 Raghavan, V. 156
 Ragnemalm, I. 108
 Remy, E. 107, 133, 135
 Rémy, J. L. 93, 95
 Reveillès, J.-P. 1, 23–25, 27, 29, 30, 39,
 45–47, 49, 50, 58, 68, 80, 86, 88, 96,
 97, 178, 184, 201
 Revenu, M. 173, 176
 Reynolds, R. A. 166, 172
 Rivest, R. 115, 142, 149, 150, 215
 Roerdink, J. B. T. M. 110, 130
 Rosen, D. 181, 184
 Rosenfeld, A. 10, 12, 21, 22, 28, 31, 93,
 107, 133
 Rouyer-Degli, J. 93, 95
 Rutkowski, W. 181, 184

 Saito, T. 105, 109, 110, 116, 123, 130
 Salam, I. 46
 Sanniti di Baja, G. 154
 Sarrut, D. 71
 Sauer, P. 83, 84
 Schramm, J. M. 63, 72
 Schwarzkopf, O. 32, 87, 94, 111, 115,
 142, 215
 Sethian, J. A. 157
 Shamos, M. I. 32, 38, 44, 63, 65, 84, 87,
 94, 96–98, 101, 111, 227, 251, 252, 254
 Shimony, E. 46
 Sintorn, I.-M. 107, 130
 Sivignon, I. 72, 73
 Sloboda, F. 179, 184, 192, 193

 Smeulders, A. W. M. 22–24, 27, 28, 31,
 34, 35, 42, 44, 83, 84, 177, 184, 188,
 201, 202
 Soille, P. 142, 151, 155, 156
 Srihari, S. N. 12
 Stocker, H. 206
 Stojmenović, I. 46, 62
 Sun, H. J. 192
 Svensson, S. 107, 154
 Székely, G. 154

 Tajine, M. 63, 72
 Teh, C.-H. 230
 Tellier, P. 173, 176, 246
 Teytaud, O. 46, 47, 53, 168, 179, 184,
 189, 196, 235
 Thiel, E. 107, 142
 Thirion, J. P. 210
 Thomassen, C. 73
 Thürmer, G. 166, 173
 Toriwaki, J. I. 105, 109, 110, 116, 123,
 130
 Tosić, R. 46
 Tougne, L. 71, 80, 82, 86, 88, 96, 97,
 143, 146, 164, 165, 168, 176, 182, 196,
 201, 202, 204, 207, 232, 235
 Troesch, A. 163

 Udupa, J. K. 12, 13, 172

 van der Waerden, B. L. 162
 van Kreveld, M. 32, 87, 94, 111, 115,
 142, 215
 Veelaert, P. 19, 56, 57, 60, 62
 Verbeek, P. W. 150, 152, 192
 Verwer, B. J. H. 150, 152
 Vialard, A. 21, 28, 39–42, 163, 164, 179,
 202, 204–206, 237, 240, 244, 246, 249
 Vidal, B. 46
 Vittone, J. 35, 38, 42, 44, 57, 60, 63, 72
 Voss, K. 22, 28, 31, 94, 95
 Vossepoel, A. M. 177

 Werman, M. 112–118, 120, 123
 West, D. B. 73
 Woo, A. 46

Worring, M. 83, 84, 201, 202

Wright, E. M. 27, 34, 40, 90, 94

Wu, L. D. 22, 28

Wüthrich, C. A. 166, 173

Xu, K. 235, 236

Yaacoub, G. 68

Yagel, R. 165, 166

Yamada, H. 108

Yip, B. 163, 179, 183, 184

Yu, D. 193

Yvinec, M. 32, 111

Zatko, B. 179, 184, 192, 193

Žunić, J. D. 68, 97, 178