

# Chapitre 12

## L'astrolabe

Ce chapitre permet de comprendre la construction de l'astrolabe tel qu'il a été tracé par les horlogers du XIV et XV<sup>e</sup> siècle sur les horloges monumentales étudiées<sup>1</sup>.

Une bibliographie succincte est donnée en fin de thèse [57, 58, 75, 68, 129, 162, 173].

### 12.1 Introduction

#### 12.1.1 La sphère armillaire et l'astrolabe

**La sphère armillaire** Pour comprendre l'astrolabe il faut d'abord comprendre le fonctionnement et l'intérêt de la sphère armillaire (Figure 12.1).

Le mot armille vient du latin armilla qui veut dire « bracelet » ou petit objet circulaire.

Au centre de la sphère armillaire, se trouve la Terre, représentée par une petite sphère.

Une partie fixe comprend l'horizon local, le méridien céleste local, le vertical céleste local et le support de l'instrument. Une partie mobile représente la sphère céleste.

**L'astrolabe** L'astrolabe est un instrument de calcul permettant d'établir les relations entre la position des étoiles et l'heure solaire. Son développement par les Arabes fut lié aux nécessités du culte pour connaître les heures de lever et coucher du Soleil, de son passage au méridien et à une hauteur donnée l'après midi (pour fixer les heures des prières).

Le plus ancien instrument date de l'an 315 de l'hégire (927-928 après J.C.) et se trouve au Musée National du Koweït. Des exemplaires du XVI<sup>e</sup> et du XVII<sup>e</sup> siècle se trouvent à Paris au Musée des Arts et Métiers et à l'Institut du Monde Arabe

Les premiers écrits donnant sa construction sont ceux de Jean Philiponos dit le Grammairien qui vécut à Alexandrie (490-570 après J.C.) qui précise :

« le sujet a été traité par mon maître Amonius mais il demande encore des éclaircissements »

---

<sup>1</sup>Depuis 1995 j'anime un stage de formation continue de trois à quatre jours sur l'astrolabe à l'intention des enseignants du second degré, dans le cadre du Plan de Formation de l'Académie de Lyon.

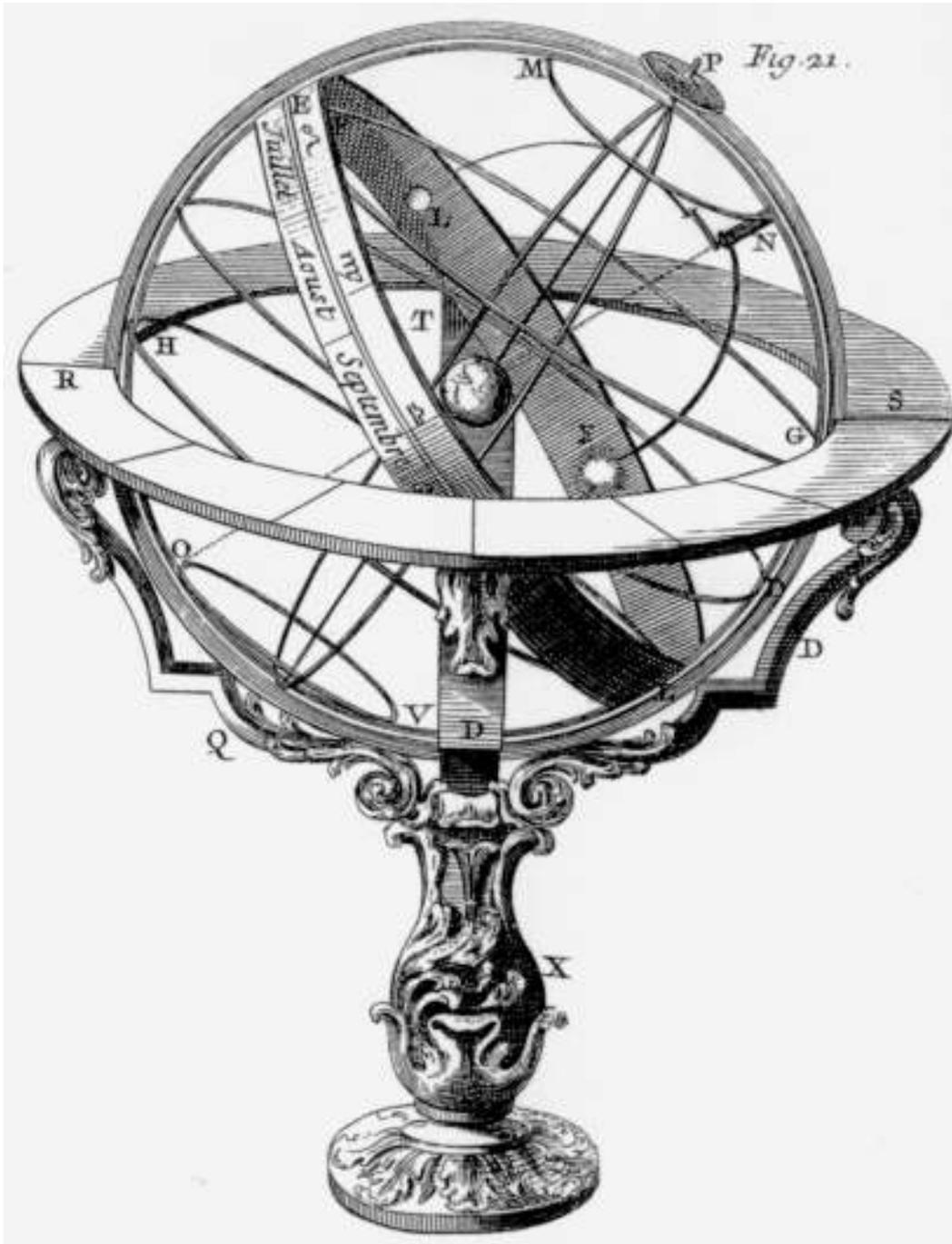


FIG. 12.1 – Sphère armillaire

Il existe différents types d'astrolabes (sphérique, plan équatorial, plan universel) mais le plus courant est l'astrolabe planisphérique qui est une projection plane équatoriale de pôle sud de la sphère céleste.

## 12.1.2 Histoire de l'astrolabe

### 12.1.2.1 L'École grecque et alexandrine

#### Eudoxe de Cnide (408-347) ou Appolonius de Perge (262-180)

« ...on dit que l'astrologue Eudoxe inventa l'arachne, d'autres disent que c'est Appolonius<sup>2</sup>. » Vitruve « de architectura » au livre IX-8 [185].

**Hipparque** Au V<sup>e</sup> siècle après J.C., Synésios décrit Hipparque comme l'inventeur de la projection stéréographique, donc d'une carte du ciel mais pas de l'astrolabe. Un traducteur maladroit aurait écrit « Lettre sur le don d'un astrolabe » alors que le mot astrolabe n'y figure pas.

**Ptolémée** Il décrit un « astralabon organon », proche de l'armille zodiacale de Tycho Brahe, mais sans rapport avec l'astrolabe planisphérique.

### 12.1.2.2 L'École syriaque

Jean Philiponos, dit le Grammairien, est né à Césarée et mort à Alexandrie vers 550. Il décrit dans son traité très exactement l'astrolabe et son usage, d'après son maître Amonios, un des derniers savants de l'École Alexandrine.

Severus Sebokht est né à Nisibis (à la frontière Syrie-Irak) vers 650 après J.C.. Il devint patriarche du couvent et évêque de Qenreché sur la rive de l'Euphrate où il enseigna la philosophie et les mathématiques. Son traité sur l'astrolabe, ouvrage de référence, dénote une longue pratique de cet instrument.

### 12.1.2.3 L'École arabe

Les Écoles d'Harran (au nord de la Mésopotamie), de Bagdad, de Damas.

Al-Farizi (1260-1320) vécut à Tabriz en Iran.

Abu'l-Ma'shar (Albumazar) (785-886 Bagdad) : auteur de traités d'astrologie. On lui attribue un traité de l'astrolabe. Il est parfois représenté sur les horloges astronomiques (Figure 1.22).

Al-Battani est né avant 858 à Harran et mort en 929 près de Samarâ. D'une famille sabienne convertie à l'islam, il est l'auteur de traités d'astronomie, de tables, de commentaires de Ptolémée, et est l'un des créateurs de la trigonométrie sphérique.

Al-Khwarizmi vécut de 780 à 850 à Bagdad. Astronome d'al-Ma'mûn, il traduisit les sidhântas en arabe. Il est le créateur de l'algèbre et écrivit des traités d'arithmétique, d'astronomie et deux traités sur l'astrolabe, l'un sur son tracé l'autre sur son utilisation.

<sup>2</sup>« ...dicitur invenisse arachnen Eudoxus astrologus ; nonnulli Appolonius »

#### 12.1.2.4 L'École hispano-mauresque

Al-Zarkali (Azarchel) vécut à Cordoue de 1029 à 1087.

#### 12.1.2.5 L'École chrétienne d'Occident

Gerbert d'Aurillac (945-1004), Raymond de Marseille (vers 1100-1150).  
Arsenius Gautier (Louvain vers 1567-1575) : artisan fabricant d'astrolabes.

#### 12.1.2.6 Les docteurs juifs du Moyen-Age

Rachi (1040-1105 à Troyes), Profatius (1236-1305)

### 12.1.3 L'astrolabe transmis des Grecs aux Arabes et à l'Occident latin

Au X<sup>e</sup> siècle l'Espagne arabe est à son apogée. Le calife Abd-Ar-rahman III et son fils Al-Hakam II, font de leur capitale Cordoue « l'ornement du monde où coulent les sept fleuves de la sagesse ». Les échanges culturels entre le califat de Cordoue et l'Espagne chrétienne sont nombreux. Au monastère de Ripoll en Catalogne on traduit à partir des travaux de Maslama<sup>3</sup> des traités sur l'astrolabe. Le manuscrit 225 conservé à la Bibliothèque de Barcelone a fait l'objet d'une étude attentive et contient les plus anciens textes connus sur l'astrolabe écrits en latin et établis à partir de textes arabes. Aucun astrolabe de cette période n'est parvenu jusqu'à nous [142].

Gerbert d'Aurillac (né en Aquitaine vers 934, élu pape sous le nom de Sylvestre II en 999, mort en 1003 à Rome) séjourna à Cordoue, Séville et Barcelone et fut instruit par l'évêque Hatton de Vich « très versé dans les mathématiques<sup>4</sup> ». Nommé écolâtre<sup>5</sup> à Reims (972-982) il fit construire une sphère terrestre en bois pour étudier les différentes zones de la Terre et deux sphères armillaires pour comprendre les révolutions des astres. Gerbert aurait donné des éléments de construction d'horloge astronomique et en aurait construit une pour Otton III à Magdebourg. L'enseignement de Gerbert est connu, d'une part par le témoignage de son élève Richer qui précise dans son Histoire le programme d'enseignement du futur pape, d'autre part par ses lettres où il réclame des livres à ses connaissances. Les échanges entre le Saint Empire et Cordoue auraient même précédé Gerbert avec des ambassades présidées par Jean de Gorze pour l'empereur Otton 1<sup>er</sup> en 950 et 956. Des voyageurs espagnols comme Ibn Yakoub auraient également visité l'Europe du Nord [154].

Après l'an 1000 des liens s'établissent entre la Catalogne et la France en particulier entre les monastères de Ripoll et de Fleury.

La science arabe, en particulier l'astronomie se répand en Occident à partir de la fin du X<sup>e</sup> siècle. Ainsi Radolf de Liège écrit à Ragimbald de Cologne [154] :

---

<sup>3</sup>Maslama ibn Ahmad, de Madrid, établi à Cordoue, astronome et mathématicien, fin X<sup>e</sup> siècle

<sup>4</sup>Boèce (Rome 470-525) avait montré que le quadrivium (géométrie, astronomie, musique, arithmétique) était la quadruple voie par la sagesse ; l'étude des mathématiques, abandonnée du VI au X<sup>e</sup> siècle, reprend au X<sup>e</sup> siècle.

<sup>5</sup>Dès le VIII<sup>e</sup> siècle, il y avait dans le chapitre de chaque église cathédrale, un chanoine nommé écolâtre (scholaster) chargé d'enseigner aux frères pauvres

« Je vous aurais volontiers envoyé un astrolabe à examiner, mais il s'agit pour nous d'un modèle pour en construire un autre. Si vous vous intéressez à la science de cet instrument, n'hésitez pas à venir à Saint Lambert de Liège, sans doute vous ne le regretterez pas. Mais si vous n'y connaissez rien, le fait de seulement voir un astrolabe ne vous sera pas plus utile que des tableaux peints pour un aveugle... »

Fulbert de Chartres traduit en latin les noms des principales constellations afin que ses élèves comprennent les inscriptions arabes des astrolabes.

Herman utilise à Reichenau des traductions arabes et un traité attribué à Gerbert d'Aurillac pour expliquer l'astrolabe.

### 12.1.4 Les traités anciens sur l'astrolabe

Van de Vyver, E. Poulle puis A. Tihon ont recensé les traités sur l'astrolabe [55, 142, 172]

1. Jean d'Alexandrie, dit Jean Philopon : Traité sur l'astrolabe (entre 510 et 529)
2. Jean Kamatéros : Introduction à l'astronomie (entre 1143 et 1180)
3. Chapitres sur l'astrolabe d'après un livre sarrazin (XII<sup>e</sup> siècle)
4. Seconde explication sur l'astrolabe (avant la fin du XIII<sup>e</sup> siècle)
5. Siamps le Persan : Traité sur l'astrolabe (début du XIV<sup>e</sup> siècle)
6. Traité sur l'astrolabe de l'Oxoniensis Cromwellianus 12 (après 1309)
7. Nicéphore Grégoras : Traités sur l'astrolabe A, B, C (autour de 1335)
8. Makarios le moine : Scholies au traité A de Nicéphore Grégoras (avant 1400)
9. Traité cypriot sur l'astrolabe du Vaticanus gr. 212 (entre 1337 et 1341)
10. Traité sur la construction de l'astrolabe (Rhodes XIV<sup>e</sup> siècle)
11. Théodore Méliténite : Tribiblos astronomique, Livre I (entre 1352 et 1368)
12. Isaac Argyre : Méthode de construction de l'astrolabe (XIV<sup>e</sup> siècle)
13. Sur la vérification des tracés de l'astrolabe (1368)
14. Matthieu Camariotès : Scholies au traité A de Nicéphore Grégoras (fin XV<sup>e</sup> siècle)
15. Sept chapitres relatifs à l'utilisation de l'astrolabe (avant la fin du XV<sup>e</sup> siècle)
16. Andronic Doucas Sgouros : Méthode sur l'astrolabe (XV<sup>e</sup> siècle)

## 12.2 L'astrolabe planisphérique

### 12.2.1 La représentation plane d'une sphère

#### 12.2.1.1 Le problème de la représentation

Le problème de réaliser une carte, c'est-à-dire de faire correspondre les points d'une sphère à ceux d'un plan, date de l'Antiquité. Aucune solution respectant partout à la fois surfaces et angles ne peut être trouvée à ce problème car la sphère est une surface non développable.

La méthode la plus ancienne consiste à projeter l'image de la sphère terrestre ou céleste sur une feuille plane (projection planisphérique), roulée en cylindre (projection cylindrique) ou en cône (projection conique).

**Le projecteur** Le point à partir duquel on projette, peut être au centre (projection centrale), à l'infini (projection orthographique), ou être un des points de la sphère (projection stéréographique ou projection d'Hipparque qui vécut vers 150 avant J.C.).

Certaines projections respectent les surfaces (projections équivalentes), d'autres conservent les angles (projections conformes). De nombreuses représentations modernes utilisant l'ordinateur ne sont ni équivalentes, ni conformes.

### 12.2.1.2 Mercator et l'intérêt d'une carte de la Terre respectant les angles

**Gerardus Mercator** Gerhard Kremer, dit Gerardus Mercator, est né en Flandres en 1512, mort à Duisbourg en 1594.

Il réalise une carte de Terre Sainte (1537), du monde (1538), des Flandres (1540), du globe (1540), de la sphère céleste (1551) puis la carte de « Mercator » en 1569 : il s'agit d'une projection cylindrique déformée afin d'obtenir une représentation conforme (respectant les angles).

**Principe de la carte de Mercator** Depuis l'introduction de la boussole dans la navigation on dirigeait les navires suivant une route, appelée loxodromie, coupant les méridiens à angle constant. Ainsi pour aller d'un point A à un point B, il suffit de déterminer le cap à prendre et de le suivre pendant tout le voyage à l'aide de la boussole.

Pour se rendre compte de la position du navire il faut pouvoir tracer simplement sur la carte le chemin parcouru : la carte la plus intéressante serait alors une carte dont la loxodromie serait représentée par le segment de droite AB.

Pour cela il faut que les angles soient conservés. Les angles sont conservés si un petit cercle de la sphère est transformé en un petit cercle du plan, c'est-à-dire si les dilatations de longueurs en un point sont les mêmes dans toutes les directions.

Pour comprendre le principe de la représentation de Mercator partons d'une projection cylindrique conservant les longueurs des méridiens (Figure 12.2).

Les méridiens sont représentés par des droites parallèles équidistantes et les parallèles sont représentés par des droites parallèles équidistantes et perpendiculaires aux premières.

Un méridien est représenté en vraie grandeur de longueur constante  $\pi R$ .

Le parallèle de latitude  $\lambda$  a pour longueur constante  $2\pi R$  au lieu de  $2\pi R \cos \lambda$ . Sa longueur a été multipliée par  $1/\cos \lambda$ .

On multiplie alors l'élément de longueur de méridien  $d\lambda$  par  $1/\cos \lambda$ . Ainsi un petit cercle de rayon  $r$  appartenant à la sphère à la latitude  $\lambda$  sera transformé sur la carte en cercle de rayon  $r/\cos \lambda$ . Par exemple à la latitude  $82^\circ$ , un petit cercle sera transformé en un autre cercle de rayon environ 7 fois plus grand et par suite d'une surface 50 fois plus grande. On observe une énorme dilatation des régions polaires.

La distance sur la carte, entre l'équateur et le parallèle  $\lambda$  sera  $d(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\cos \lambda} = \ln \tan \left| \left( \frac{\lambda}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$

Pour la latitude  $\lambda$ , la distance à l'équateur du parallèle et la dilatation du rayon d'un petit cercle de ce parallèle sont les suivantes :

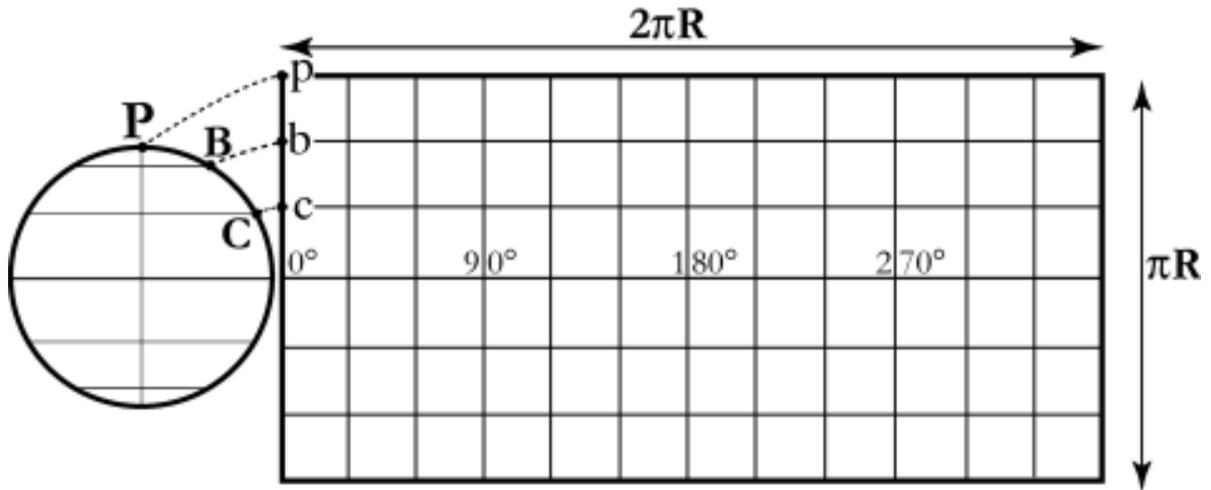


FIG. 12.2 – Projection cylindrique conservant la longueur des méridiens.

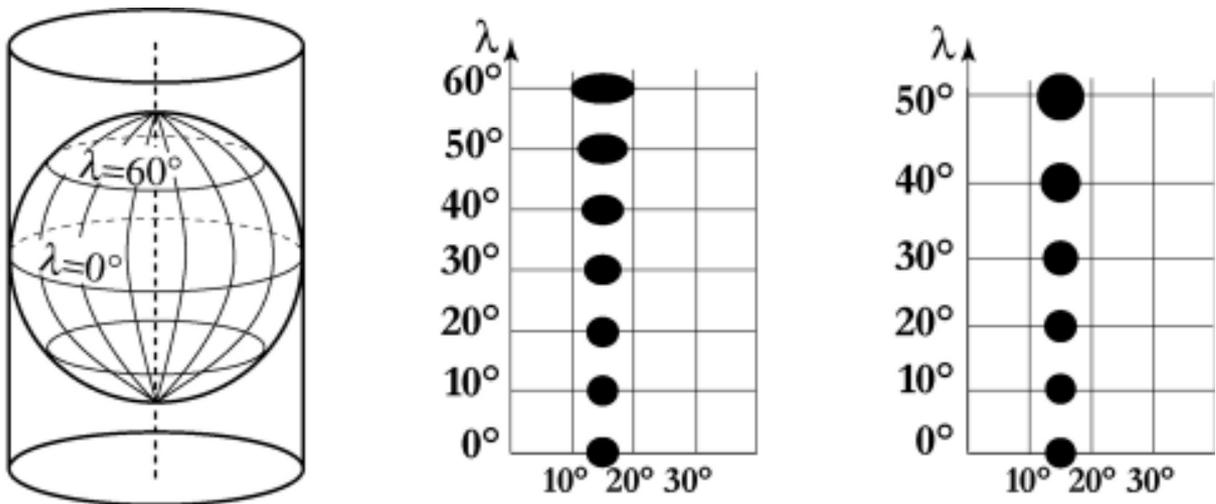


FIG. 12.3 – Cercle en projection cylindrique non conforme et en projection de Mercator.

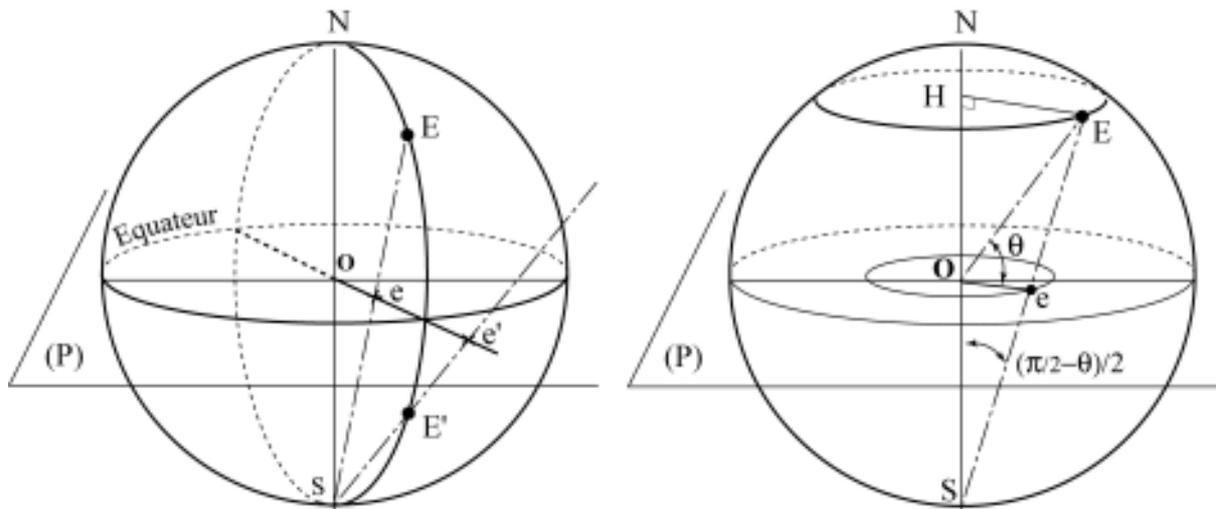


FIG. 12.4 – Projection stéréographique : projection d'un cercle méridien et d'un cercle parallèle.

|                  |       |       |      |      |      |      |      |       |       |       |          |
|------------------|-------|-------|------|------|------|------|------|-------|-------|-------|----------|
| $\lambda$        | 10°   | 20°   | 30°  | 40°  | 50°  | 60°  | 70°  | 80°   | 82    | 85    | 90°      |
| $d(\lambda)$     | 10,1  | 20,4  | 31,5 | 43,7 | 57,9 | 75,5 | 99,4 | 139,6 | 152,4 | 179,4 | $\infty$ |
| $1/\cos \lambda$ | 1,015 | 1,064 | 1,15 | 1,31 | 1,56 | 2,00 | 2,92 | 5,76  | 7,19  | 11,47 | $\infty$ |

## 12.2.2 La projection stéréographique plane équatoriale de pôle Sud

Soit la sphère céleste, N le pôle céleste Nord, S le pôle céleste Sud (Voir la figure 12.4, à gauche)

À une étoile E, on fait correspondre l'étoile e, point d'intersection de ES avec le plan équatorial.

La projection du cercle équatorial sera lui-même, la projection e d'un astre E de l'hémisphère nord sera située à l'intérieur du cercle équatorial, la projection e' d'un astre E' de l'hémisphère sud sera à l'extérieur.

### 12.2.2.1 Intérêt d'une carte du ciel respectant les angles

1. elle conserve les angles donc la forme des petites constellations.
2. la projection d'un cercle quelconque de la sphère est un cercle du plan (P) : tous les cercles de coordonnées sont transformés en cercles sur la carte. Cette carte est donc facile à tracer.

### 12.2.2.2 Les problèmes résolus par cet instrument analogique

#### Les problèmes du quotidien

- Trouver «la qibla» c'est-à-dire la direction de la Mecque.
- Déterminer l'heure de jour et de nuit.

- Prévoir l'échéance des couchers et levers du Soleil, de l'aube et du crépuscule.
- Déterminer les heures des prières.
- Trouver l'ascendant, les maisons en astrologie

**Les 12 problèmes fondamentaux**

|                     |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |
|---------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Connu               | $\lambda$ |
| Connu               | Az        | H         | H         | Az        | H         | H         | h         | H         | H         | h         | Az        | Az        |
| Connu               | h         | z         | Az        | $\delta$  | $\delta$  | Az        | $\delta$  | $\delta$  | h         | $\delta$  | $\delta$  | h         |
| <b>à déterminer</b> | <b>H</b>  | <b>Az</b> | <b>h</b>  | <b>H</b>  | <b>Az</b> | $\delta$  | <b>H</b>  | <b>h</b>  | $\delta$  | <b>Az</b> | <b>h</b>  | $\delta$  |

$\lambda$  latitude,  $\delta$  déclinaison, Az azimut, h hauteur, H angle horaire

**12.2.3 Projections des cercles dans la projection stéréographique**

**12.2.3.1 Projection des cercles passant par N et S**

Ce sont les cercles méridiens d'égale ascension droite : les images sont des droites passant par O (Figure 12.4, à gauche).

**12.2.3.2 Projection des cercles parallèles au plan de projection (P)**

Les cercles parallèles ont pour image des cercles concentriques de centre O (Figure 12.4, à droite).

Un point E se trouvant à l'intersection d'un cercle parallèle de déclinaison  $\delta$  et d'un demi-cercle méridien d'ascension droite  $\alpha$  se trouvera en projection à l'intersection d'une demi-droite et d'un cercle.

Soit a le rayon de la sphère céleste :  $OE = a$   
 $OH = a \sin \theta$  et  $HE = a \cos \theta$  et  $\frac{Oe}{HE} = \frac{SO}{SH}$  d'où  
 $Oe = a \cos \theta \times \frac{a}{a + a \sin \theta} = a \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)$

On peut aussi dire directement  $Oe = a \tan \left\{ \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) / 2 \right\}$  car l'angle inscrit en S dans le triangle HSE vaut la moitié de l'angle au centre en O dans le triangle HOE.

**12.2.3.3 Projection ( $\gamma$ ) d'un cercle quelconque ( $\Gamma$ )**

Soit le cercle ( $\Gamma$ ) de centre H et E un point du cercle. Soit ( $\gamma$ ) la projection de ( $\Gamma$ ) sur (P) (Voir la figure 12.5, à gauche).

Soit la droite perpendiculaire au cercle ( $\Gamma$ ) et tangente à la sphère. Elle coupe la droite OH en un point T, et TE se projettera en te sur le plan de projection. Pour un point E', la projection de TE' donnera te'.

Or la projection stéréographique conserve les angles, donc la projection d'une normale à ( $\Gamma$ ) est une normale à ( $\gamma$ ). La projection ( $\gamma$ ) de ( $\Gamma$ ) est donc une courbe dont toutes les normales passent par un point fixe t. Seul le cercle centré en t convient : ( $\gamma$ ) est donc ce cercle centré en t.

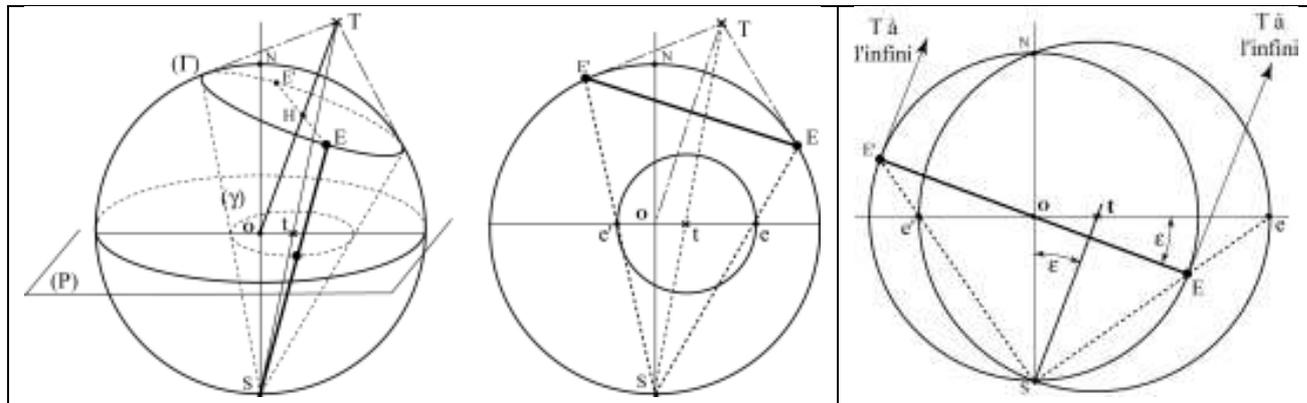


FIG. 12.5 – Projection stéréographique : projection des cercles quelconques

Pour construire ce cercle, on fait pivoter dans le plan de la feuille de tracé, le plan SET et le plan (P) de projection. Alors E se projette en e et E' se projette en e'.

**Cas particulier d'un cercle passant par O** Soit un cercle passant par O d'inclinaison  $\varepsilon$  par rapport au plan (P) (Voir la figure 12.5, à droite).

Le centre t du cercle projeté se trouve en traçant la droite passant par S parallèles aux tangentes en E et E'.

$$\text{Donc } Ot = a \tan \varepsilon \text{ et } r = St = a / \cos \varepsilon$$

## 12.2.4 Construction du tympan pour la latitude $\lambda$

### 12.2.4.1 Projection des cercles verticaux passant par Zénith et Nadir

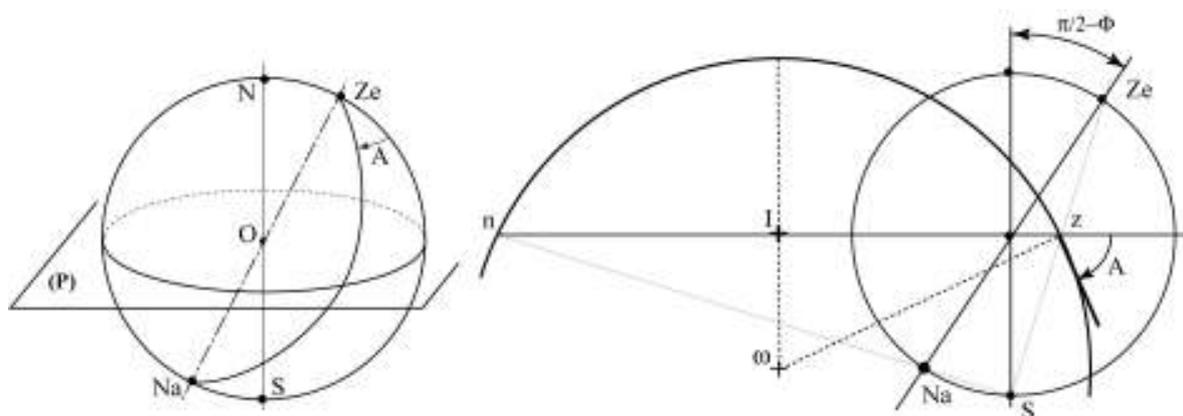


FIG. 12.6 – Projections de cercles verticaux passant par zénith et nadir.

**Projections déterminées graphiquement (Figure 12.6)** Un vertical est un demi-cercle passant par zénith et nadir du lieu, repéré par son azimut A par rapport au méridien céleste Sud NS.

Les projections de Ze et Na étant z et n, la projection du vertical est donc un cercle passant par n et z.

De plus la projection du méridien Nord Sud est Os.

En Ze le vertical Ze-Na fait l'angle A avec le méridien N-S ; en z projection de Ze les projections du vertical et du méridien font aussi l'angle A, ce qui permet de trouver le centre  $\omega$ .

**Projections déterminées par le calcul**  $Oz = a \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2}\right)$  et  $On = a \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2}\right)$

$$\text{donc } nz = a \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2}\right) + a / \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2}\right) = 2a / \cos \lambda$$

$$\tan A = Iz / \omega I \text{ donc } \omega I = Iz / \tan A = a / \cos \lambda \tan A \text{ et le rayon du cercle cherché vaut}$$

$$R(A) = \omega z = I\omega / \cos A = a / \cos \lambda \sin A$$

On peut ainsi tracer tous les verticaux à partir de leur centre  $\omega$  en faisant varier l'azimut A de 0° à 180°

**Pour la latitude  $\lambda = 45^\circ$**  Pour construire un astrolabe sur un format A4, on prend  $a=5$  cm

$$Oz = a \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2}\right) = 2,032$$

$$nz = 2a / \cos \lambda = 14,142$$

$$\omega I = 7,071 / \tan A$$

$$R(A) = 7,071 / \sin A$$

| Azimut A     | 0° | 10°   | 20°   | 30°   | 40°   | 50°  | 60°  | 70°  | 80°  | 90°  |
|--------------|----|-------|-------|-------|-------|------|------|------|------|------|
| $I\omega(A)$ |    | 40,10 | 19,43 | 12,25 | 8,43  | 5,93 | 4,08 | 2,57 | 1,25 | 0    |
| $R(A)$       |    | 40,72 | 20,67 | 14,14 | 11,00 | 9,23 | 8,16 | 7,52 | 7,18 | 7,07 |

Les graduations en azimut vont de 0° (Sud), 90° (Ouest), 180° (Nord), 270° (Ouest) à 360°

#### 12.2.4.2 Projection des demi-cercles horaires (demi-cercles passant par N et S)

**Les projections :** ce sont des demi-droites passant par O.

**Les graduations :** On sait que l'angle horaire représente l'angle entre le demi-méridien céleste et le méridien sud avec un choix d'unité d'angle appelé l'heure valant 15°. L'angle horaire du méridien Sud est H=0h, celui de l'Ouest 18h, celui du Nord 12h, celui de l'Est 6h.

Le pourtour du tympan sera gradué en H +12heures (Temps solaire moyen)

On choisit H+12 heures pour que lorsqu'un astre passe au méridien la valeur lue soit 12h et non 0h.

Le sens de graduation est donné par la figure 12.8 :

- positif si l'observateur est au-dessous de (P)
- rétrograde si l'observateur est au-dessus de (P)

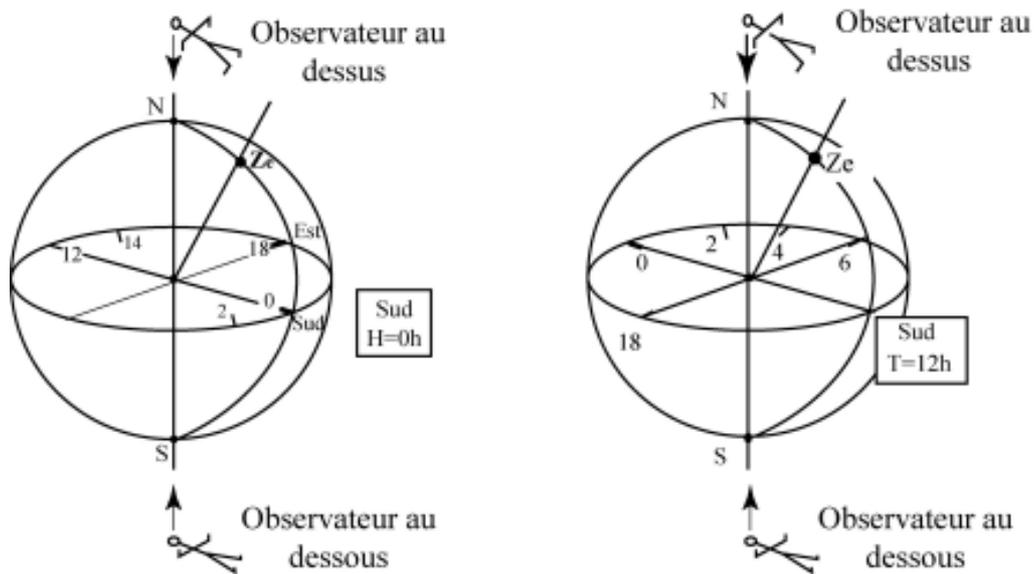


FIG. 12.7 – Graduations en angle horaire H, et en temps civil Local (T=H+12h).

### 12.2.4.3 Projections de pôle sud des cercles de hauteur

Soit  $E E'$  un cercle de hauteur  $h$ . Soient  $e$  et  $e'$  leurs projections et  $t$  le centre du cercle projeté (Figure 12.9)

**Position du centre t**  $Oe' = a \tan \left( \frac{\lambda-h}{2} \right)$

$$Oe = a \tan \left( \frac{\pi-\lambda-h}{2} \right) = a \cot \frac{\lambda+h}{2}$$

$$Ot(h) = Oe - \frac{ee'}{2} = \frac{Oe-Oe'}{2} = \frac{a}{2} \left( \tan \frac{\pi-\lambda-h}{2} - \tan \frac{\lambda-h}{2} \right) = a \frac{\cos \lambda}{\sin h + \sin \lambda}$$

**Rayon du cercle projeté**  $R(h) = \frac{Oe+Oe'}{2} = \frac{a}{2} \left( \tan \frac{\pi-\lambda-h}{2} + \tan \frac{\lambda-h}{2} \right) = a \frac{\cos h}{\sin h + \sin \lambda}$

**Tracé du cercle horizon  $h=0$**  Position du centre du cercle horizon :  $Ot(h=0) = a \cot \lambda$

Rayon du cercle horizon :  $R(h=0) = \frac{a}{\sin \lambda}$

### 12.2.4.4 Projections de pôle nord des cercles de hauteur

Soit  $E E'$  un cercle de hauteur  $h$  (Figure 12.10). Soient  $e$  et  $e'$  leurs projections et  $t$  le centre du cercle projeté.

**Position du centre t**  $Oe' = a \tan \left( \frac{\pi-(h-\lambda)}{2} \right) = a \cot \left( \frac{h-\lambda}{2} \right)$

$$Oe = a \cot \frac{h+\lambda}{2}$$

$$Ot(h) = Oe + \frac{ee'}{2} = \frac{Oe'+Oe}{2} = \frac{a}{2} \left( \tan \frac{\pi-(h-\lambda)}{2} + \tan \frac{h+\lambda}{2} \right) = a \frac{\cos \lambda}{\sin h - \sin \lambda}$$

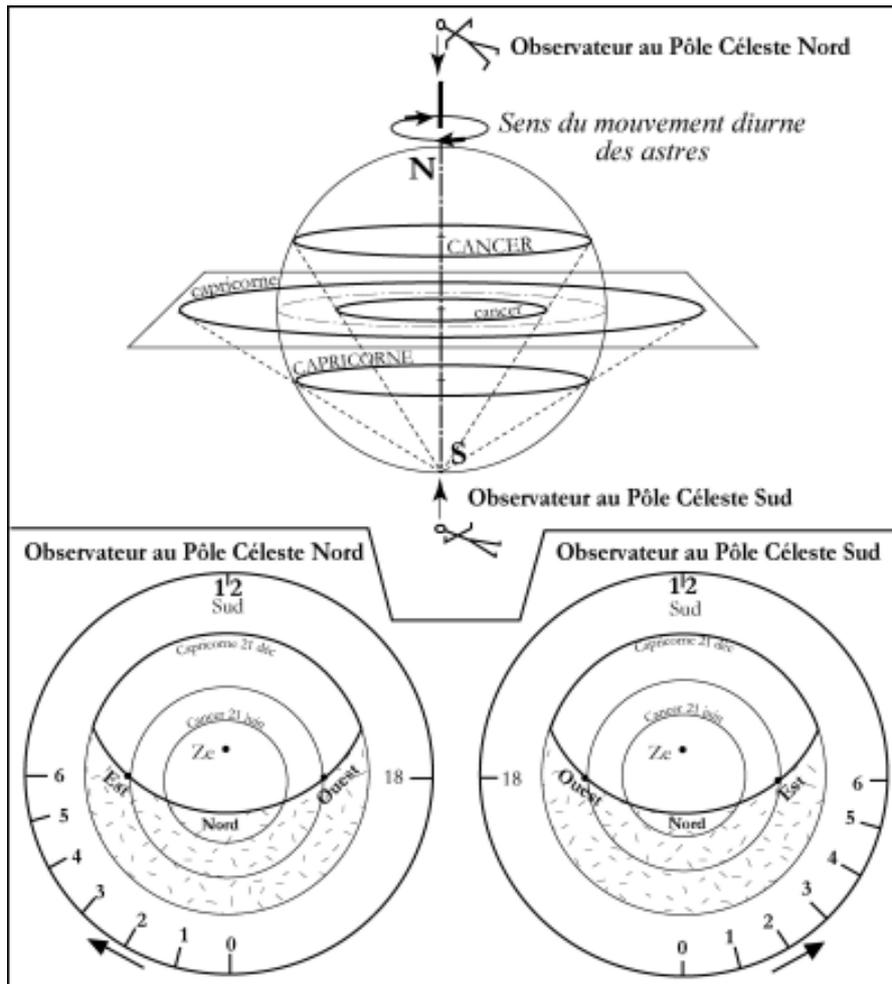


FIG. 12.8 – Sens des graduations suivant la position de l'observateur.

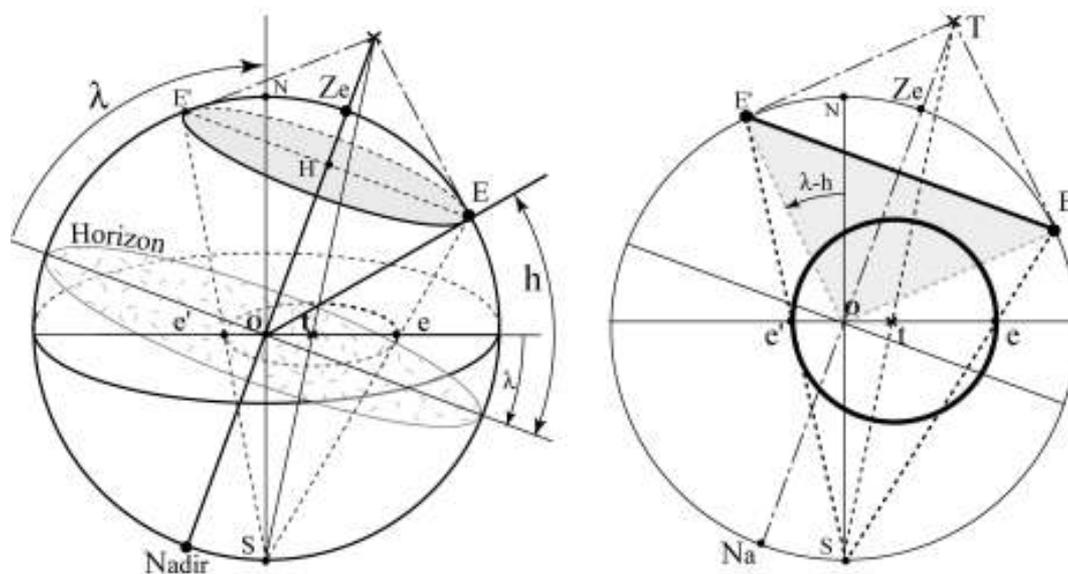


FIG. 12.9 – Projections de pôle sud des cercles de hauteur.

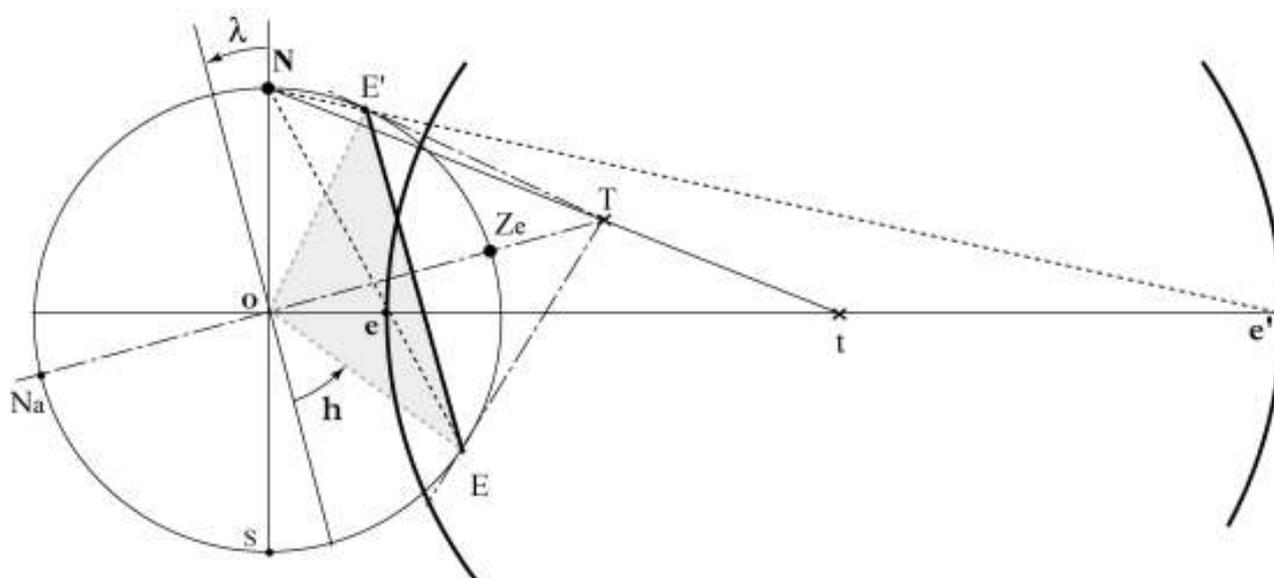


FIG. 12.10 – Projection (de pôle Nord) des cercles de hauteur.

**Rayon du cercle projeté**  $R(h) = \frac{Oe'-Oe''}{2} = \frac{a}{2} \left( \tan \frac{\pi-(h-\lambda)}{2} - \tan \frac{h+\lambda}{2} \right) = a \frac{\cos h}{\sin h - \sin \lambda}$

**Tracé du cercle horizon h=0** Position du centre du cercle horizon :  $Ot(h=0) = -a \cot \lambda$   
 Rayon du cercle horizon :  $R(h=0) = \frac{a}{\sin \lambda}$

**12.2.4.5 Tracé des lignes d'heures temporaires**

Ces lignes ont des équations solutions d'équations transcendantes. Elles peuvent néanmoins être tracées facilement au moyen de trois ou de sept points.

Les heures temporaires correspondent en effet à une division en 12 parties égales de la course diurne ou nocturne du Soleil un jour donné. Il suffit donc de diviser en 12 la portion diurne ou nocturne des parallèles de déclinaisons comprises entre -23° et +23° pour avoir les limites des heures temporaires. On réalise ce travail pour trois parallèles (tropique du Capricorne, équateur, tropique de Cancer) ou sept parallèles (ceux correspondant à la déclinaison du Soleil lors de son entrée dans les signes du zodiaque, le 21 de chaque mois).

**12.2.4.6 Tracé des maisons astrologiques**

Chaque maison est limitée par un cercle passant par les points Nord et Sud de l'horizon, faisant l'angle K=-90° (I-XII), -60° (XII-XI), -30° (XI-X), 0° (X-IX) avec le cercle méridien

Les projections sont donc des cercles passant par n et s, et dont les tangentes au méridien en n et s font les angles K=-90°, -60°, -30°, 0°

Le rayon du cercle horizon étant  $\frac{a}{\sin \lambda}$ , les rayons seront  $\frac{a}{\sin \lambda \sin K}$

Les distances du centre au méridien seront  $\frac{a}{\sin \lambda \tan K}$

**12.2.5 Construction de l'araignée**

**12.2.5.1 Tracé des cercles d'égale déclinaison (sur l'hémisphère nord)**

Nous avons vu :  $r = a \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)$  et avec a = 5

|                    |      |      |      |      |      |      |      |      |      |   |      |      |      |      |
|--------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|---|------|------|------|------|
| $\theta(^{\circ})$ | 80   | 70   | 60   | 50   | 40   | 30   | 23   | 20   | 10   | 0 | -10  | -20  | -30  | -40  |
| r                  | 0,44 | 0,88 | 1,34 | 1,82 | 2,33 | 2,89 | 3,28 | 3,50 | 4,20 | 5 | 5,96 | 7,14 | 8,66 | 10,7 |

**Projections de cercles particuliers**

- L'équateur se projette en lui-même
- Les tropiques sont tracés en utilisant les formules du paragraphe 12.2.3.2 avec  
 $\theta = +\varepsilon = +23^{\circ}27'$  (Tropique du Cancer)  
 $\theta = -\varepsilon = -23^{\circ}27'$  (Tropique du Capricorne)
- L'écliptique se projette en un cercle tangent aux deux tropiques.

Son rayon est  $r = \frac{a}{\cos \varepsilon}$  et  $Ot = a \tan \varepsilon$  (avec a=5, r=5,450 et Ot = 2,168)

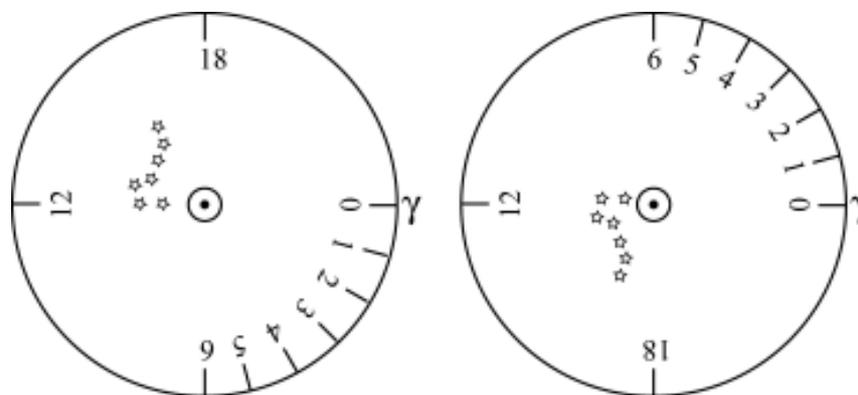
### 12.2.5.2 Projections des étoiles principales

On peut fabriquer un index, appelé alidade, gradué en déclinaison  $\theta$  de  $+90^\circ$  à, par exemple,  $-30^\circ$ . À l'aide des graduations en déclinaison  $\theta$  et des graduations en ascension droite  $\alpha$ , on porte sur l'araignée les étoiles souhaitées.

### 12.2.5.3 Graduation du pourtour de l'araignée

L'intersection avec l'équateur céleste donne les points  $\gamma$  et  $\gamma'$ . On appelle  $\gamma$  celui qui sera pris pour origine des ascensions droites et on gradue en ascension droite  $\alpha$  de 0 à 24h dans le sens :

- rétrograde si l'observateur est à l'intérieur de la voûte céleste
- positif si l'observateur est à l'extérieur de la voûte céleste



### Graduations supplémentaires de l'araignée

**Temps solaire vrai  $H_{sv}$  = angle horaire du Soleil au lieu d'observation** Le Soleil parcourt à vitesse non constante l'écliptique en 365,2422... jours (soit  $\alpha_0$  son ascension droite). On peut donc diviser le pourtour de l'araignée en 365,2422 parties inégales et graduer chaque jour de l'année en face de l'ascension droite du Soleil à 0h00 T.U. ce jour. D'une année sur l'autre ces graduations se déplacent un peu (car l'équinoxe a lieu entre le 20 et le 21 mars, c'est-à-dire que le 21 mars à 0h00 T.U. le Soleil vrai n'est pas chaque année à l'ascension droite 0h00). Le 1<sup>er</sup> janvier à 0h00 T.U., l'ascension droite du Soleil est en moyenne 18h43. On peut corriger le faible écart pour une année donnée avec des tables. On doit également faire une correction de fraction de jour correspondant à l'heure d'observation (Nous ne ferons pas ces corrections).

**Temps solaire moyen :  $H_{sm} = H_{sv} + E$**  Le temps solaire moyen correspond au temps solaire vrai « corrigé de ses irrégularités » (angle variant linéairement en fonction du temps de la mécanique). C'est une entité échappant à l'observation directe et dont la définition suppose la connaissance préalable des mouvements de rotation et de translation de la Terre. Les valeurs du terme correctif  $E$ , terme appelé équation du temps, se lisent pour chaque jour de l'année dans des éphémérides ou sur une courbe.

On calcule  $E=-3\text{min}$  le 1<sup>er</sup> janvier. On divise le pourtour de l'araignée en 365,2422 parties égales correspondant au temps solaire moyen et on fait coïncider la graduation du 1<sup>er</sup> janvier avec l'ascension droite 18h40.

On peut aussi diviser l'écliptique en 360° représentant la longitude géocentrique du Soleil.

#### 12.2.5.4 Tracé des cercles d'égale déclinaison (en projection de Pôle Nord)

D'après la formule :  $r = a \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$  et avec  $a = 5$

|                    |      |      |      |      |      |      |      |      |      |   |      |      |      |      |
|--------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|---|------|------|------|------|
| $\theta(^{\circ})$ | 80   | 70   | 60   | 50   | 40   | 30   | 23   | 20   | 10   | 0 | -10  | -20  | -30  | -40  |
| r                  | 0,44 | 0,88 | 1,34 | 1,82 | 2,33 | 2,89 | 3,28 | 3,50 | 4,20 | 5 | 5,96 | 7,14 | 8,66 | 10,7 |

### 12.2.6 Utilisation de l'astrolabe

**Position du Soleil moyen le ...**

**Heure de lever du Soleil et azimut le ...**

**Durée du jour le ...**

**Durée des crépuscules**

**civil ( $h=-6^{\circ}$  sous l'horizon)** par temps clair les planètes et les étoiles de première grandeur sont visibles.

**nautique ( $h=-12^{\circ}$  sous l'horizon)** les étoiles de 2<sup>e</sup> grandeur sont visibles, l'horizon est encore discernable.

**astronomique ( $h=-18^{\circ}$  sous l'horizon)** les étoiles de 6<sup>e</sup> grandeur sont visibles, il fait nuit.

Le calcul de l'angle horaire donnerait  $\cos H = (\sin h - \sin \phi \sin \delta) / \cos \phi \cos \delta$

où  $h$  hauteur,  $\lambda$  latitude,  $\delta$  déclinaison

Pour  $\lambda=45^{\circ}$ , Équinoxes :  $\delta = 0^{\circ}$  (32mn, 1h06, 1h39), 21 juin :  $\delta = +23^{\circ}$  (39mn, 1h28, 2h34), 21déc.  $\delta = -23^{\circ}$  (35mn, 1h02, 1h49)

**Jour du plus petit crépuscule** Le jour du plus petit crépuscule, la déclinaison  $\delta$  du Soleil est donnée par  $\sin \delta = \frac{\sin \lambda \tan h}{2}$ ,  $h$  hauteur choisie sous l'horizon ; on en déduit le jour puis la durée de ce crépuscule.

Problème résolu pour la première fois par Nunez (1492-1517), géomètre portugais.

**Hauteur du Soleil lors du passage au méridien le ...**

**Heure**

- à laquelle votre ombre est égale à votre hauteur le ...
- à laquelle votre ombre est égale à votre hauteur plus la longueur de votre ombre à midi le ...
- à laquelle Antarès culmine le ...
- à laquelle se lève la Lune qui se trouve à l'ascension droite ...

**Angle sous lequel le Soleil se couche** La projection conservant les angles, on peut mesurer au rapporteur l'angle écliptique-horizon au coucher du Soleil.

**12.2.7 De la projection stéréographique de l'astrolabe à la carte du ciel**

Sur l'araignée de l'astrolabe, les cercles d'égale déclinaison sont donnés par la formule  $r = a \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$ . Les cercles s'élargissent considérablement à la périphérie et les constellations de l'horizon Nord sont très petites par rapport à celles de l'horizon Sud. Pour remédier à cette disproportion on choisit, pour des écarts égaux en déclinaison, de faire des cercles équidistants.

**12.2.7.1 Comment tracer la ligne d'horizon sur la carte du ciel ainsi modifiée ?**

Les relations entre coordonnées horizontales et équatoriales deviennent pour l'intersection de l'horizon (hauteur h=0) avec la courbe de déclinaison  $\delta$ , à la latitude  $\lambda = 45^\circ$  :

$$\begin{aligned} \cos H &= -\tan \lambda \tan \delta = -\tan \delta \\ \sin A &= \sin H \cos \delta \text{ et } \cos A = -\sin \delta / \cos \lambda = -1,414 \sin \delta \end{aligned}$$

**12.2.7.2 Comment graduer la ligne d'horizon en azimut ?**

On inverse les formules et pour A donné, on trouve :  
 $\delta = \arcsin(-\cos A \cos \lambda) = \arcsin(-0,707 \cos A)$  et  
 $H = \arcsin\left(\frac{\sin A}{\cos \delta}\right)$  ou  $\cos H = -\tan \lambda \tan \delta = -\tan \delta$

**12.2.7.3 Comment tracer la ligne Est - Zénith - Ouest ?**

Pour l'azimut  $A=90^\circ$ , on trouve  $\delta$  puis H, et on fait de même pour  $A=270^\circ$ .  
 Pour  $A=90^\circ$ , on trouve  $H = \arccos \frac{\tan \delta}{\tan \lambda}$

**12.2.8 Tracé des heures des prières de l'après-midi**

Les courbes des heures de prière sont tracées point par point : on calcule d'abord  $h_{midi}$ , la hauteur du soleil à midi, connaissant la latitude  $\lambda$  et la déclinaison  $\delta$  du Soleil du jour par la formule :

$$h_{midi} = 90 - \lambda + \delta.$$

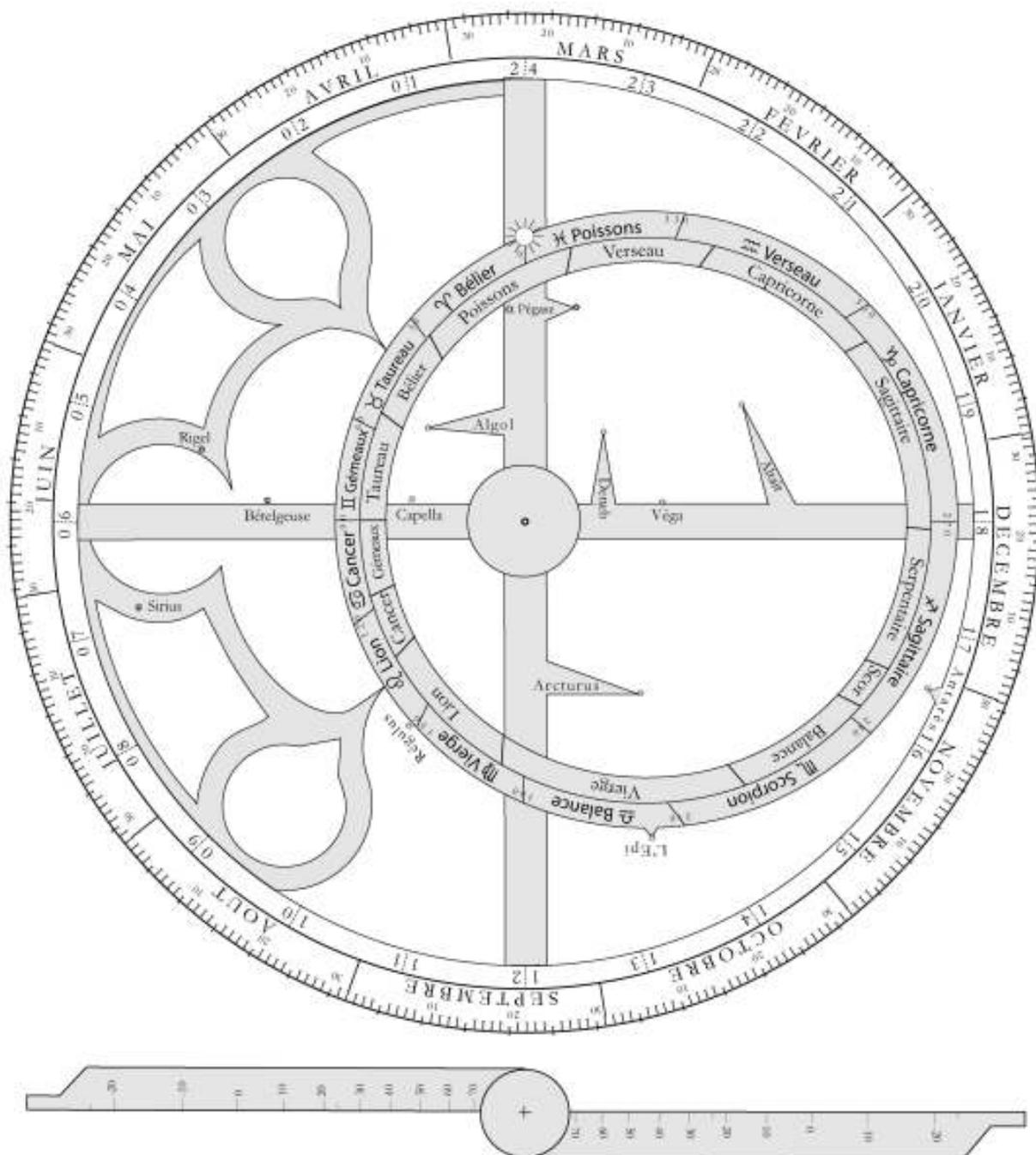


FIG. 12.11 – Maquette de l'araignée de l'astrolabe planisphérique.

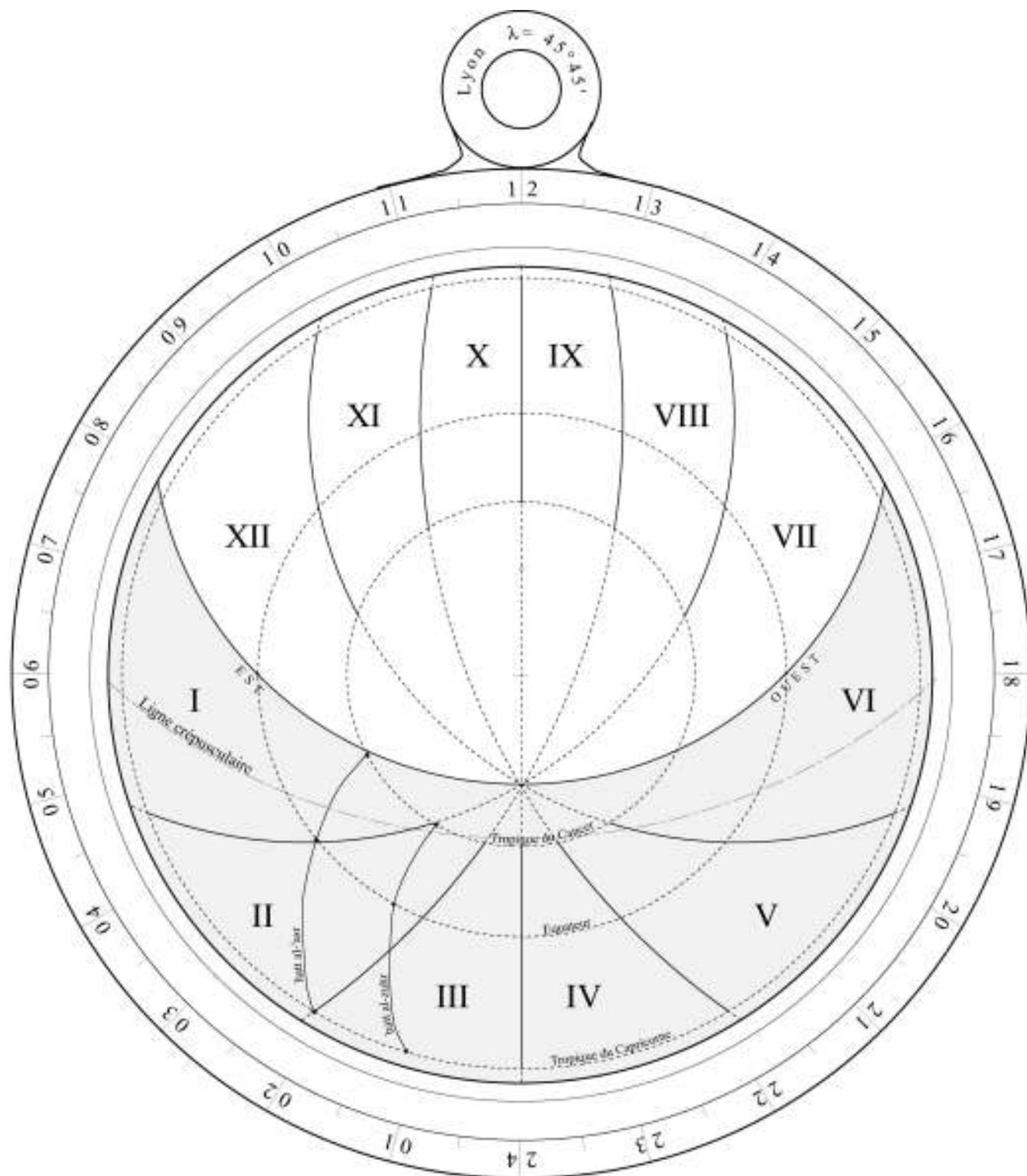


FIG. 12.12 – Maquette du tympan de l'astrolabe planisphérique (Latitude 45°).

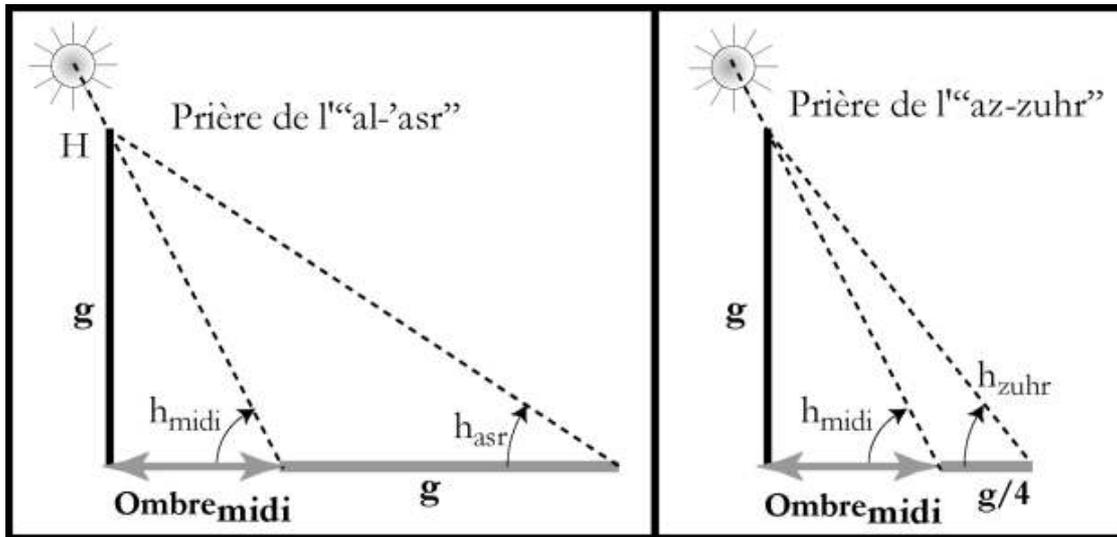


FIG. 12.13 – Les heures des prières de l'après-midi

### 12.2.8.1 Prière de midi (az-zuhr)

Différentes règles précisent l'heure de cette prière. Elle doit toujours avoir lieu lorsque l'ombre du gnomon s'est allongée d'une certaine quantité après la culmination du Soleil.

Selon Al-Biruni, l'appel à la prière doit se faire pour un allongement de un doigt et que la récitation de la prière doit se faire pour un allongement de trois doigts, un doigt représentant un douzième du gnomon [58, 69]. Trois doigts correspondent ainsi à 1/4 de gnomon.

$$\cot h = \cot h_{\text{midi}} + 0,25$$

$$h = \arctan \left( \frac{\tan h_{\text{midi}}}{1 + 0,25 \tan h_{\text{midi}}} \right)$$

### 12.2.8.2 Prière de la fin de l'après-midi (al-'asr)

D'après Al-Biruni cette prière doit avoir lieu lorsque l'ombre du gnomon est égale à l'ombre méridienne augmentée de la longueur du gnomon :

$$\cot h = \cot h_{\text{midi}} + 1$$

$$h = \arctan \left( \frac{\tan h_{\text{midi}}}{1 + \tan h_{\text{midi}}} \right)$$

Les hauteurs du Soleil étant calculées, on calcule alors l'angle horaire  $H$  qui vérifie la relation :

$$1 - \cos H = (\sin h_{\text{midi}} - \sin h) / \cos \lambda \cos \delta$$

Les heures des prières de l'après-midi, sont habituellement gravées sous l'horizon en symétrie par rapport au centre, pour ne pas surcharger la partie diurne du tympan. Pour connaître l'heure de la prière, on fait tourner l'araignée et son alidade de façon que le Soleil touche la courbe, et on lit l'heure du côté opposé.

## 12.3 L'astrolabe universel

### 12.3.1 Historique et principe de l'astrolabe universel

#### 12.3.1.1 Les créateurs de l'astrolabe universel

'Ali b. Khalaf (Tolède vers l'an 1000)

« ... il est bien connu que l'astrolabe conventionnel a besoin d'un tympan pour chaque latitude. Je me suis demandé comment faire un instrument qui serait valable pour toutes les latitudes afin de supprimer le travail ingrat de graver les tympan. En y réfléchissant, il s'est trouvé que j'ai compris comment pouvoir faire un instrument qui n'aurait pas plus d'un tympan et d'une araignée. Je lui ai donné le nom d'horizon universel, je l'ai dédié à mon seigneur le roi de Tolède Ma'mun et j'ai fait ce livre... »

Al-Zarqalluh (Tolède 1029 - Cordoue 1100), appelé Azarchel en Occident médiéval latin, ramène le tympan à une simple règle muni d'un curseur glissant à angle droit

#### 12.3.1.2 Principe de l'astrolabe universel

Il s'agit d'une projection stéréographique de pôle  $\gamma$  ou  $\gamma'$  sur le colure des solstices.

La projection stéréographique étant conforme (conserve les angles), les projections des cercles horaires et des parallèles célestes seront des cercles (Voir les tracés de l'astrolabe universel sur la figure 12.14).

Les étoiles d'ascension droite 0h à 6h et 18h à 24h sont projetées avec le pôle  $\gamma$ , les étoiles d'ascension droite 6h à 18h avec le pôle  $\gamma'$ .

Un horizon d'une latitude quelconque  $\lambda$  est projeté en une droite inclinée de  $\lambda$  sur l'équateur céleste ; les cercles de hauteur et les cercles d'azimut auront même type de projection que les cercles de déclinaison et d'angle horaire (Voir les systèmes de coordonnées de l'astrolabe universel sur la figure 12.15).

La régula est graduée en coordonnées écliptiques avec des intervalles de  $1^\circ$  et des séparations tous les  $30^\circ$  correspondant aux signes du Zodiaque. Lorsque l'on place la régula le long de l'écliptique, on vérifie que chaque signe correspond à deux heures en ascension droite.

L'astrolabe tracé ci-joint est inspiré de l'astrolabe d'Arsénius (vers 1550) : il comprend une règle munie d'une deuxième règle de longueur moitié de la précédente sur laquelle est articulée un bras prolongé d'une autre pièce (les deux pièces articulées forment « le brachiolus »). L'ensemble permet par simple rotation de passer des coordonnées équatoriales aux coordonnées écliptiques ou aux coordonnées horizontales (Voir la maquette de l'astrolabe universel sur la figure 12.16)

### 12.3.2 Exercices

#### 12.3.2.1 Coordonnées équatoriales $\Rightarrow$ Coordonnées écliptiques

Exemple pour Capella :  $\alpha = 4h46$   $\delta = -45^\circ 07'$

Aligner la régula avec l'écliptique, pointer Capella avec le brachiolus, faire tourner l'ensemble pour aligner régula avec l'équateur EE' : lire  $\lambda = 80^\circ$   $\beta = 23^\circ$

### 12.3.2.2 Problème inverse : Coordonnées écliptiques $\Rightarrow$ Coordonnées équatoriales

Aligner la régula avec l'équateur EE' et pointer les coordonnées écliptiques données ; on fait tourner la régula pour l'aligner sur l'écliptique et on lit les coordonnées du point trouvé qui sont les coordonnées équatoriales cherchées.

### 12.3.2.3 Quelles sont les étoiles circumpolaires ?

Nous donnons la solution des exercices qui suivent pour Lyon, de latitude  $\lambda = 46^\circ N$ .

Ce sont les étoiles qui lors de leur mouvement diurne ne rencontrent pas l'horizon de Lyon. On trouve qu'elles doivent avoir une déclinaison supérieure à  $46^\circ$

### 12.3.2.4 Quelle est la hauteur de culmination d'Arcturus ?

On place la régula sur l'horizon de Lyon. On suit la trajectoire d'Arcturus ( $\alpha = 14h13$  et  $\delta = 19^\circ 26'$ ) sur la courbe de déclinaison  $\delta = 19^\circ$  jusqu'au méridien, on pointe le brachiolus sur le point trouvé dont on trouve la hauteur en amenant la régula sur EE' :  $h=66^\circ$

### 12.3.2.5 Quelle est la déclinaison $\delta$ d'une étoile qui culmine à Lyon ?

On lit  $\delta = 44^\circ$

### 12.3.2.6 Quelle est la durée de la trajectoire de Véga au-dessus de l'horizon ?

Véga intercepte l'horizon de Lyon au point : H=9 h30, Azimut=  $145^\circ$  Est ; durée= 19h

### 12.3.2.7 A quelle heure et dans quel azimut se couche le Soleil un jour donné ?

Par exemple le 21 mai : on lit  $\delta_{Soleil} = 20^\circ$

On trouve  $T_{Lever} = 12h + 7h20 = 19h20$ ,  $Azimut_{Coucher} = 117^\circ$

### 12.3.2.8 Trouver l'heure et la date, connaissant la hauteur et l'azimut du Soleil.

Par exemple à Lyon on mesure pour le Soleil  $h=42^\circ$ ,  $Az=58^\circ$

On indique le point ( $h=42^\circ$ ,  $Az=58^\circ$ ), la régula étant alignée sur EE' ; on la fait tourner pour la mettre sur l'horizon de Lyon, on trouve que le Soleil doit avoir une déclinaison  $\delta_{Soleil} = 10^\circ$  ; en alignant la régula sur l'écliptique on trouve deux longitudes écliptiques : le 15 avril ou le 30 août. L'observation a eu lieu à 2h40 avant ou après midi

### 12.3.2.9 Trouver la hauteur et l'azimut du Soleil, connaissant le jour et l'heure.

Par exemple le 21 février à 15h : on lit  $\delta = -12^\circ$

On pointe avec le brachiolus puis on fait pivoter la régula sur EE' : on lit  $h = 20^\circ$ ,  $Az = 48^\circ$

## 12.4 Rappels de Trigonométrie sphérique

### 12.4.1 Historique

Hipparque (vers 150 av J.C.) paraît être le premier inventeur de la trigonométrie sphérique (« art de trouver les parties inconnues d'un triangle tracé sur une sphère par le moyen de celles que l'on connaît »)

Une traduction latine des « *Sphériques* » de Ménélaüs nous est parvenue mais son traité « *Sur les cordes* » est seulement évoquée par d'autres auteurs.

Ptolémée (vers 150 ap. J.C.) laisse dans l'Almageste un traité complet de trigonométrie rectiligne et sphérique, le seul qui nous soit parvenu directement des Grecs.

Albategni (877-929) substitue la notion de sinus à celle de corde et fait connaître la formule fondamentale de trigonométrie sphérique :  $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$

### 12.4.2 Relations dans un triangle sphérique

Un triangle sphérique est un triangle formé d'arcs de grands cercles de la sphère (Figure 12.17). Dans le triangle sphérique ABC tracé sur la sphère de rayon 1, les cotés a, b, c, sont inférieurs à  $\pi$ .

- **Groupe de Gauss** (Figure 12.17, dessin de gauche)

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A$$

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

- **Coordonnées horizontales**

hauteur h

azimut A (Sud  $A=0^\circ$ , Ouest  $A=90^\circ$ , Nord  $A=180^\circ$ , Est  $A=270^\circ$ )

- **Coordonnées équatoriales**

$\delta$  déclinaison

$\alpha$  ascension droite

H angle horaire (repérage par rapport au méridien sud)

demi-plan vertical zénith : Sud  $H=0h$ , puis + vers l'Ouest  $H=6h$ , 12h (Nord), 18h (Est)

A azimut

- **Relations entre coordonnées horizontales et équatoriales** (Figure 12.17, au milieu)

On place le zénith en B, le pôle en A, une étoile en C et les relations de Gauss deviennent

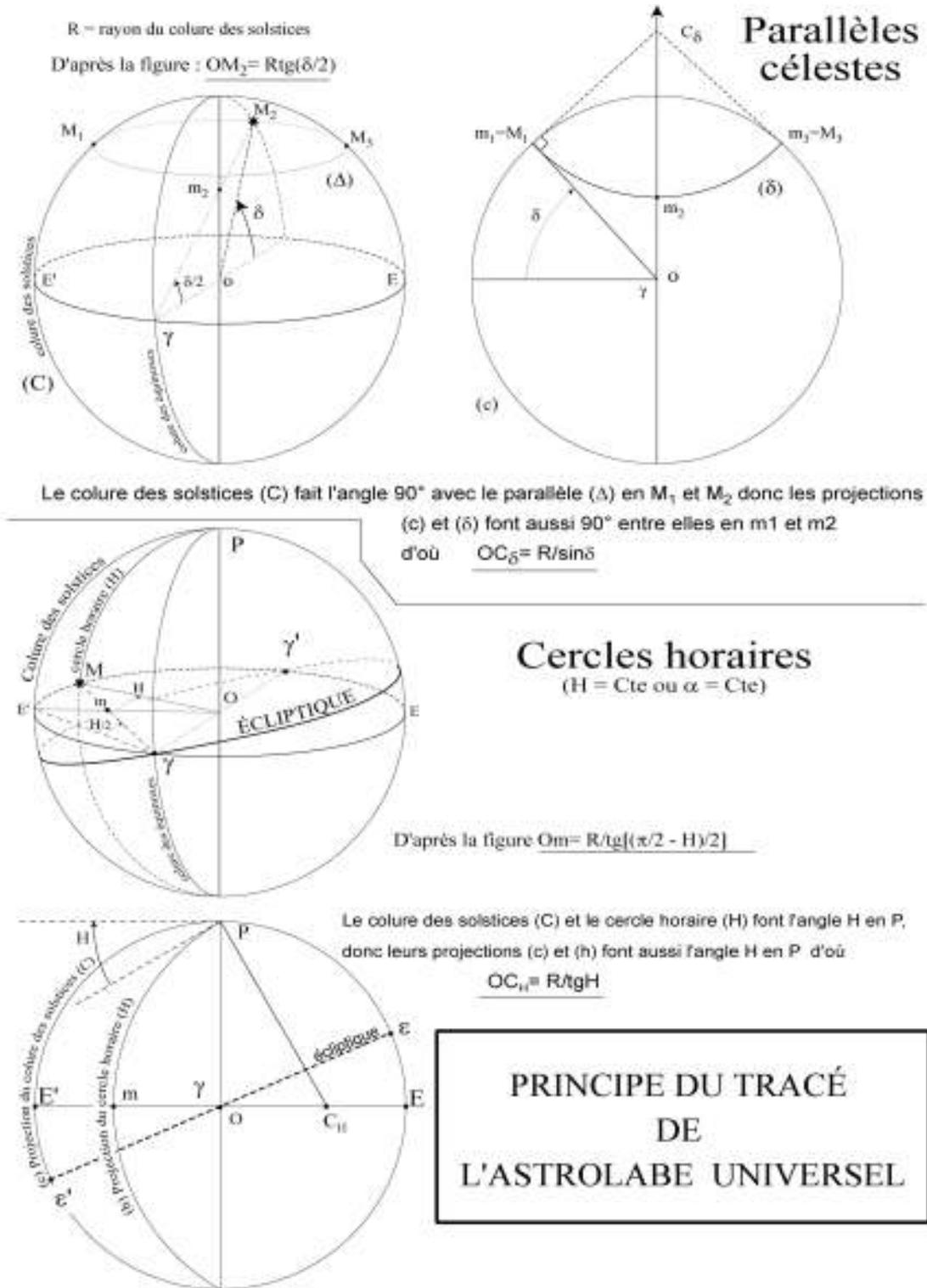
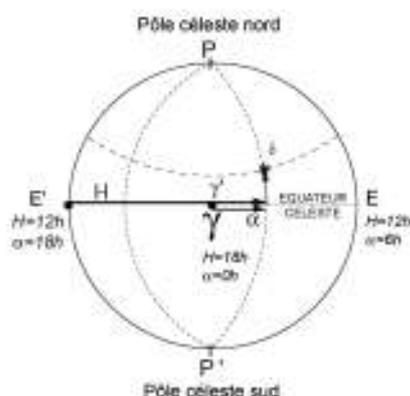


FIG. 12.14 – Tracés de l'astrolabe universel.

## Systèmes de coordonnées de l'astrolabe universel

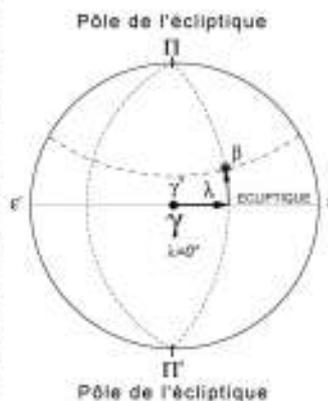
### Système 1

Coordonnées équatoriales  
(ou Coordonnées horaires  
 $H=T-\alpha$  avec  $T=18h$ )



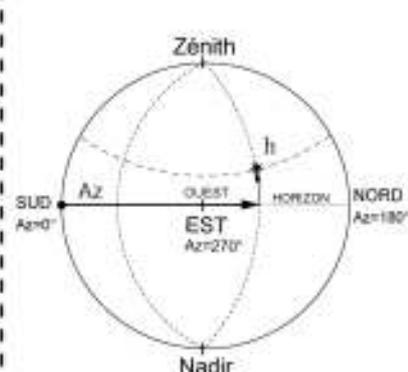
### Système 2

Coordonnées écliptiques



### Système 3

Coordonnées horizontales



|                                  |                                               |                                                  |                                  |
|----------------------------------|-----------------------------------------------|--------------------------------------------------|----------------------------------|
| Projection<br>Pôle de projection | Colure des solstices<br>$\gamma$ ou $\gamma'$ | Colure des solstices<br>$\gamma$ ou $\gamma'$    | Méridien du lieu<br>Est ou Ouest |
| Axe horizontal<br>Axe vertical   | Equateur<br>Pôles célestes. PP                | Ecliptique<br>Pôles de l'écliptique $\Pi'$ $\Pi$ | Horizon du lieu<br>Nadir-Zénith  |
| Coordonnées<br>abscisses         | Ascension droite $\alpha$<br>Angle horaire H  | Longitude écliptique $\lambda$                   | Azimuth Az                       |
| ordonnées                        | Déclinaison $\delta$                          | Latitude écliptique $\beta$                      | Hauteur h                        |

### Orientation des axes

- $\alpha$ : de 0h (droite  $P'P$ ) à 6h (demi-cercle  $P'E P$ ): de gauche à droite  
de 6h (demi-cercle  $P'E P$ ) à 18h (demi-cercle  $P'E' P$ ): de droite à gauche  
de 18h (demi-cercle  $P'E P$ ) à 24h (droite  $P'P$ ): de gauche à droite
- H: de 0h (demi-cercle  $P'E P$ ) à 12h (demi-cercle  $P'E' P$ ): de gauche à droite  
de 12h à 24h: de droite à gauche
- $\lambda$ : de 0° (droite  $\Pi'\Pi$ ) à 90° (demi-cercle  $\Pi'\epsilon\Pi$ ): de gauche à droite  
de 90° (demi-cercle  $\Pi'\epsilon\Pi$ ) à 270° (demi-cercle  $\Pi'\epsilon'\Pi$ ): de droite à gauche  
de 270° à 360°: de gauche à droite
- Az: de 0° (demi-cercle Nadir-SUD-Zénith) par 90° (Ouest) à 180° (demi-cercle Nadir-NORD-Zénith): de gauche à droite  
de 180° (demi-cercle Nadir-NORD-Zénith) par 270° (Est) à 180° (demi-cercle Nadir-SUD-Zénith): de droite à gauche

FIG. 12.15 – Systèmes de coordonnées pour l'astrolabe universel.



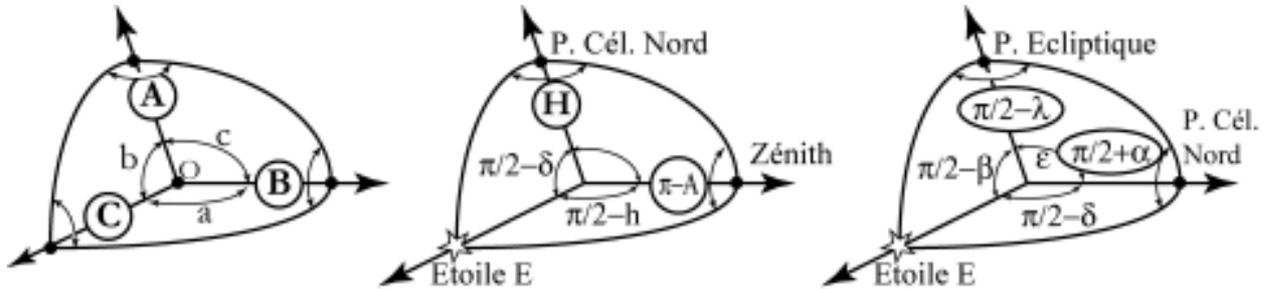


FIG. 12.17 – Relations dans un triangle sphérique.

Groupe de Gauss - Coordonnées horizontales - Coordonnées équatoriales

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - h\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) \cos H \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - h\right) \sin(\pi - A) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \sin H \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - h\right) \cos(\pi - A) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) \cos H \\ \sin h &= \sin \lambda \sin \delta + \cos \lambda \cos \delta \cos H \\ \cos h \sin A &= \cos \delta \sin H \\ \cos h \cos A &= -\cos \lambda \sin \delta + \sin \lambda \cos \delta \cos H \end{aligned}$$

– **Relations entre coordonnées équatoriales et écliptiques** (Figure 12.17, dessin de droite)

On place le pôle de l'écliptique en A, le pôle céleste Nord en B, une étoile en C

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) &= \cos \varepsilon \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \sin \varepsilon \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) \sin H \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= \sin \varepsilon \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \cos \varepsilon \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \cos \varepsilon \sin \beta + \sin \varepsilon \cos \beta \sin \lambda \\ \cos \delta \cos \alpha &= \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \delta \sin \alpha &= -\sin \varepsilon \sin \beta + \cos \varepsilon \cos \beta \sin \lambda \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) &= \cos \varepsilon \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) + \sin \varepsilon \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \\ \sin \beta &= \cos \varepsilon \sin \delta - \sin \varepsilon \cos \delta \sin \alpha \end{aligned}$$