CHAPITRE 0

Section I : Eléments[62] de calcul des probabilités

Le calcul des probabilités, théorie produite et validée - non sans réticence et résistance[63] - par la communauté des mathématiciens, a la particularité d'être lié, par ses conditions d'émergence et de développement, à un grand nombre de pratiques sociales, notamment les jeux de hasard, les assurances et, pour la période contemporaine, à la maîtrise scientifique des procédés de fabrication. Le processus de domestication mathématique du hasard a très longtemps occupé les savants, plus exactement de "certaines espèces" du hasard, car le hasard, comme construction sociale, peut apparaître - question de point de vue - sous plusieurs formes. Une légende illustre à elle seule deux de ses caractères fondamentaux : d'une part, le hasard possède certaines propriétés mathématisables, d'autre part, il a un côté imprévisible. Cette légende raconte que *« les rois de Suède et de Norvège s'en remirent aux dés pour savoir à qui reviendrait une ville. Après deux essais qui virent chacun des rois tirer un double six, un dé se cassa en deux morceaux, de sorte qu'il indiqua sept, attribuant ainsi la ville au roi de Norvège. »*[64] Le hasard apparaît ici sous plusieurs formes : un dé qui casse et une série de quatre "six". Il y donc un hasard auquel on ne pense pas, c'est le hasard "imprévu" et un hasard auquel on pense, c'est le hasard "prévu", "domestiqué", auquel on peut attribuer des probabilités. C'est à certaines espèces domestiquées du hasard qu'est attaché le calcul des probabilités : son objet est l'étude des "éventuelles" lois pouvant régir certains phénomènes aléatoires et fortuits sous-entendus "domestiqués". En effet, si on omet cette précision, on se retrouve face à quelque paradoxe qu'avait déjà repéré Blaise PASCAL en 1654, lorsque dans sa célèbre *Adresse à l'Académie parisienne de mathématiques,* il a conscience, en joignant la rigueur des démonstrations et l'incertitude du hasard, de concilier des choses en apparence contraires.[65] Ce questionnement est aussi celui de Joseph BERTRAND lorsqu'il écrit, en 1900, dans la préface de son *Cours de calcul des probabilités* : *« Comment oser parler des lois du hasard ? Le hasard n'est-il pas l'antithèse de toute loi ? »*[66] Quelques années plus tard, ce paradoxe est de nouveau souligné par Henri POINCARE : *« Le nom seul de calcul des probabilités*

---

[62] Le mot "éléments" est entendu ici au sens des principes fondamentaux, c'est-à-dire qu'à partir des éléments premiers d'un savoir, il doit être possible, en principe, de reconstruire ce savoir en totalité.

[63] L'analyse socio-historique de son émergence, que nous conduisons dans un deuxième volume, en rend compte.

[64] Légende rapportée par Ivar EKELAND, in *Le hasard aujourd'hui*, Points-Sciences, éditions du Seuil, 1991, p.194

[65] B. PASCAL, *Adresse à l'Académie, Œuvres complètes*, éditions du Seuil, 1963, p.101-103

[66] J. BERTRAND, *Calcul des probabilités*, 3e édition, 1907, réédition Chelsea Publishing Company, 1978, p.VI

est un paradoxe : la probabilité, opposée à la certitude, c'est ce qu'on ne connaît pas, et comment calculer ce qu'on ne connaît pas ? »[67]

Si cette recherche s'attache à étudier de manière spécifique le rapport des étudiants au calcul de probabilités "objectives", entendu comme savoir scolaire disciplinarisé, il faut souligner l'existence de ce qu'il est convenu d'appeler "l'approche subjectiviste de la probabilité" dans la mesure où il est possible que la dualité de la notion de probabilité continue d'affecter d'ambiguïté la signification de ce concept et donc son appropriation correcte. C'est en effet dans le même ouvrage - *Ars conjectandi* - que Jakob BERNOULLI[68] aborde ces deux notions. Il commence par définir la probabilité, non comme une mesure de la propriété des choses ou du monde, mais comme l'intensité de l'assentiment que le sujet accorde à ses jugements. *« Conjecturer quelque chose, c'est mesurer sa probabilité : ainsi l'art de conjecturer ou la stochastique se définit pour nous comme l'art de mesurer aussi exactement que possible les probabilités des choses. Le but est que dans nos jugements et dans nos actions, nous puissions toujours choisir ou suivre le parti que nous aurons découvert comme meilleur, préférable, plus sûr ou mieux réfléchi. C'est en cela seulement que réside toute la sagesse du Philosophe et toute la sagacité du Politique. Les probabilités sont estimées d'après le nombre et aussi le poids des arguments qui de quelque manière prouvent ou révèlent que quelque chose est, sera ou a été. En outre par le poids, j'entends la force de ce qui prouve. »*[69] Puis, parallèlement à cette orientation explicitement subjectiviste qui se rapporte notamment aux décisions des juges ou des autorités politiques lorsqu'ils prennent leurs décisions, Jakob BERNOULLI fonde l'interprétation fréquentielle et objective de la probabilité, conçue comme mesure de la possibilité de réalisation d'un événement, qui, lorsqu'elle n'est pas déterminable *a priori* par des raisons de symétrie, mobilise la prise en compte des fréquences observées de l'événement[70]. Cette dualité intrinsèque qui fut longtemps perçue[71] comme intriquée[72], affectera d'ambiguïté la notion de probabilité tout au long du siècle des Lumières, ambiguïté cependant dominée par le primat d'une interprétation subjective s'exprimant notamment dans l'analyse du risque (comme l'atteste le débat, en 1760, sur l'inoculation de la variole entre Daniel BERNOULLI[73] et Jean D'ALEMBERT[74]), la

[67] H. POINCARÉ, *La science et l'hypothèse*, éditions Champs Flammarion, 1968, p.192
[68] - 1654-1705 -
[69] J. BERNOULLI, *Ars conjectandi*, 1713, (traduction N. MEUSNIER), publication de l'IREM de Rouen, 1987, p.20
[70] La loi faible des grands nombres stipule que lors de la répétition d'une même expérience aléatoire, la suite (F_n) des fréquences de réalisation d'un événement donné converge en probabilité vers la probabilité "p" de cet événement lorsque le nombre de répétitions indépendantes croît indéfiniment.
[71] Chez J. BERNOULLI, les probabilités épistémiques du témoignage (subjectives) coexistent avec les probabilités statistiques de la démographie (objectives).
[72] I. HACKING, *L'émergence de la probabilité*, éditions du Seuil, 2002, chapitre "dualité", p.37-45
[73] - 1700-1782 - : petit-fils de Jakob BERNOULLI

théorie du “motif de croire” du Marquis de CONDORCET[75] ou la théorie des jugements de Denis POISSON[76] (application du calcul des probabilités aux décisions judiciaires que l'économiste et philosophe anglais John Stuart MILL[77] qualifia de “scandale des mathématiques”[78]).

§.1. La probabilité subjective

Pour les principaux tenants de l'approche subjectiviste, notamment Léonard Jimmie SAVAGE[79] et Bruno DE FINETTI[80], la probabilité représente le degré de confiance que le sujet accorde à la réalisation d'un fait espéré. Ce qui est en jeu, c'est la façon dont chaque sujet est amené à se situer par rapport à une décision à prendre en situation d'incertitude. En fonction de ses expériences, de ses connaissances, de ses valeurs, de ses croyances, de ses préférences, le sujet peut décider ou non, de négliger telle ou telle possibilité ou bien de considérer que tel événement se produit plus ou moins souvent. Ces croyances portent à la fois sur les conditions dans lesquelles s'effectue la décision et sur ses conséquences probables. Ainsi dans la conception subjectiviste, la probabilité a une fonction essentiellement pratique, celle d'instrument au service de la prise de décision. Remarquons que les expressions utilisées pour désigner la probabilité subjective recourent fréquemment à l'idée de “chance” qui peut être définie comme la possibilité d'obtenir un résultat. De même, sous la forme la plus simple, le “risque” désigne le niveau d'incertitude subjective à partir duquel un individu est prêt à s'engager dans une action particulière. Mesure de “la force de la croyance” d'un sujet en ses jugements, la probabilité subjective permet alors d'ordonner ceux-ci et de hiérarchiser les choix possibles. Dans l'argumentaire du colloque intitulé “Probabilités subjectives et rationalité de l'action” qui s'est tenu en novembre 2000 à la Faculté des Lettres et de Sciences Humaines de Besançon, Thierry MARTIN souligne qu'une telle conception soulève un certain nombre de difficultés et essentiellement, celles qui résultent du projet même.

---

74 - 1717-1783 -

75 - 1743-1794 -

76 - 1781-1840 -

77 - 1806-1873 -

78 *« Évidemment aussi, quand les probabilités résultant de l'observation et de l'expérience, la plus légère amélioration dans les données, obtenue par de meilleures observations ou par une étude plus complète des circonstances spéciales du cas, est plus utile que la plus savante application du calcul des probabilités, fondé sur les données moins bonnes qu'on avait précédemment. C'est pour n'avoir pas fait cette réflexion si naturelle qu'on s'est laissé entraîner dans le calcul des probabilités à de fausses applications qui en ont fait véritablement le scandale des mathématiques. Il suffit de rappeler celles relatives à la crédibilité des témoins et l'équité des verdicts des jurys. »* J.S. MILL, *Système de la logique déductive et inductive*, tome 2, (traduction L. PEISSE), édition F. Alcan, 1889, source : document électronique BNF (Gallica), p.64

79 - 1917-1971 -

80 - 1906-1985 -

- *« Est-il possible de soumettre à la mesure les croyances des individus ? La difficulté tient ici déjà au fait que l'opération de mesure se trouve appliquée à des paramètres qui ne s'offrent pas immédiatement à la mesure. »*[81] Va-t-il pleuvoir demain ? Quelles sont les chances, pour un chirurgien et son patient, qu'une intervention réussisse ? Compte tenu des symptômes présentés par un patient, quel degré de vraisemblance y a-t-il pour qu'il soit atteint de telle maladie particulière ? Or, les croyances et les préférences individuelles ne sont pas des données directement observables. Leur identification suppose le détour par un "révélateur" (introspection, sondage, observation comportementale) : quelle fiabilité accorder à un tel révélateur ? D'autre part, la difficulté tient à l'opération de mesure elle-même : le recours au calcul des probabilités est-il pertinent pour l'évaluation des croyances des individus ? Il semble en effet douteux que le sujet empirique soit capable de mesurer avec précision le degré de croyance qu'il affecte à un jugement et de le distinguer d'un autre légèrement différent. De plus, la rectification ultérieure d'un jugement engendre une nouvelle croyance.

- Autre difficulté : le postulat de l'indépendance des croyances et des préférences. Il est possible que les croyances de l'individu viennent modifier ses préférences tout comme ses préférences peuvent influer sur ses croyances. En effet, si les motifs de l'action ne se réduisent pas à ses conséquences espérées ou craintes mais reposent sur des principes définissant les valeurs au nom desquelles agit l'individu, celles-ci rendent raison des croyances qui supportent ces actes. Pour reprendre la formulation de Jakob BERNOULLI, il s'agit de savoir au nom de quel critère on jugera de ce qui est *« meilleur, préférable, plus sûr ou mieux réfléchi »*[82], ces qualificatifs n'étant pas eux-mêmes équivalents. C'est donc la définition même de la rationalité de la décision qui est en question, rationalité dont le caractère problématique fut relevé : ainsi Léonard J. SAVAGE remarque que la probabilité conçue comme mesure de la croyance d'un individu en la vérité d'une proposition, *« postule que l'individu en question est d'une certaine façon "raisonnable", mais n'exclut pas la possibilité pour deux individus raisonnables confrontés avec les mêmes réalités d'avoir des degrés différents de croyance en la vérité de la même proposition. »*[83] Notons enfin que le point de vue "subjectiviste" est parfois appelé "psychologique".

[81] T. MARTIN, *Argumentaire du colloque "Probabilités subjectives et rationalité de l'action"*, 7-8-9 Novembre 2000, Besançon, p.6
[82] J. BERNOULLI, *Ars conjectandi*, *op. cit.*, p.20
[83] - cité par Bertrand SAINT-SERNIN, *Les mathématiques de la décision*, Paris, PUF, 1973, p.44 -

§.2. La probabilité objective

Considérons les deux cas suivants qui concernent la réalisation d'un événement inconnu[84] :

- Premier événement : la naissance d'un garçon - dans le cas de la première naissance - enregistrée à l'état-civil du cinquième arrondissement de Paris en 1872.
- Deuxième événement : l'obtention de "face" dans le jet d'une pièce de monnaie parfaitement symétrique.

Attacher une "probabilité" à ces deux événements pose un certain nombre de problèmes. Dans le premier exemple, la probabilité résulte de la connaissance détaillée et précise d'un grand nombre de phénomènes analogues : il s'agit d'une probabilité statistique dont la première conceptualisation est due, nous l'avons signalée, à Jakob BERNOULLI. Dans le deuxième exemple, la symétrie parfaite de la pièce donne autant de chances aux deux faces : on dit qu'il y a une chance sur deux d'obtenir "face", c'est-à-dire que la probabilité de l'événement "obtenir face" est 1/2. Si l'on remplace la pièce de monnaie par un dé cubique parfaitement symétrique, chacune des six faces a la même chance d'apparaître, donc a la même probabilité : on parle d'équiprobabilité. Cette définition a été institutionnalisée par Pierre Simon LAPLACE[85] : la probabilité qu'ait lieu un événement futur se définit par le rapport entre le nombre d'éventualités favorables à la production de cet événement et le nombre des éventualités possibles - à les supposer également probables. Lorsqu'on jette un dé de forme cubique, sur les six éventualités possibles, la probabilité de sortir le 3 est 1/6 car il y a une seule éventualité favorable. Dans les cas expérimentaux que nous venons d'évoquer, les probabilités sont donc obtenues soit par la connaissance du passé (la probabilité statistique), soit par des considérations théoriques sur la nature du problème (la symétrie dans le cas de la pièce de monnaie et du dé) : on parle alors de probabilités "objectives" au sens de probabilités théoriques.

§.3. La modélisation probabiliste

Soulignons que les projets actuels et les travaux didactiques sur l'enseignement du calcul des probabilités privilégient les concepts de modèle[86] et de modélisation[87] de situations aléatoires[88]. Alors que pour un peintre ou un

[84] D. DUGUÉ, article "*Probabilités*", Encyclopædia Universalis, 1995, t-18, p.1018

[85] - 1749-1827 -

[86] *« Un modèle est une représentation symbolique de certains aspects d'un objet ou d'un phénomène du monde réel, c'est-à-dire une expression ou une formule écrite suivant les règles du système symbolique d'où est issue cette représentation. »* A. PAVÉ, *Modélisation en biologie et en écologie*, éditions Aléas, 1994, p.26

[87] - la modélisation consiste en la construction et en l'utilisation de modèles -

[88] *cf.* M. HENRY, *Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement*, in *Autour de la modélisation en probabilités*, PUFC, 2001, p.149-159

sculpteur, un modèle est ce qui sera représenté ou interprété, pour un scientifique, un modèle est une simplification de l'inaccessible réel, un schéma réducteur d'une réalité qu'il aspire à décrire : c'est, selon l'expression de Nicolas BOULEAU, un “récit symbolique”, un “simulacre utile”. *« Il me semble crucial de mettre en avant que les modèles sont des représentations partisanes, au bon sens du terme, c'est-à-dire qu'au sein de multiples possibilités d'expression et de représentation, ils sont le choix d'un parti. »*[89] Le concept de modèle a, en sciences, au moins trois résonances principales qui évoquent respectivement les images et les schémas, les théories et les lois, et la mathématisation.

- Au sens d'image et de schéma, un modèle peut être un objet concret (une maquette, un modèle réduit) ou un schéma simplificateur nécessitant le rejet de détails non signifiants et la sélection des seuls éléments pertinents ; un modèle peut aussi être une analogie susceptible de permettre une construction théorique.

- Par rapport aux théories et aux lois, l'idée de modèle marque la volonté d'établir une distance entre le discours scientifique et la réalité. Alors qu'une théorie peut être conçue comme un ensemble de lois ponctuellement explicatives et prévisionnelles, un modèle est une représentation plausible d'une réalité qui en suppose une interprétation[90], sans prétendre en être une traduction fidèle.

- La formalisation mathématique autorise également l'idéalisation des objets étudiés. La simplification, inhérente au procès de modélisation, permet en effet la construction d'une abstraction qui est précisément le modèle mathématique associé à la situation. En particulier, le calcul des probabilités est le modèle mathématique adapté au traitement des situations aléatoires[91]. Les difficultés de la modélisation, ainsi que des considérations financières, font que les ingénieurs se tournent de plus en plus vers des modèles mathématiques calculés par des ordinateurs : l'heure est à la simulation numérique.

De même que l'on ne considère pas les objets théoriques de la géométrie comme des objets de la réalité (ce sont des “figures”, des “représentations”, la

---

[89] N. BOULEAU, *Philosophies des mathématiques et de la modélisation*, éditions L'Harmattan, 1999, p.301

[90] Par exemple, la théorie de l'Univers élaborée par PTOLEMEE, IIe siècle après J.C., est restée longtemps un modèle adéquat aux observations des astronomes.

[91] En probabilités, le phénomène des files d'attente aux caisses de supermarché peut être modélisé par une loi de POISSON. On peut, par le calcul ou par simulation, déterminer la configuration des caisses qui optimise le passage des clients. Si les résultats ne sont pas jugés satisfaisants, c'est que le modèle n'est pas adapté : soit parce que les paramètres de la loi n'ont pas été estimés correctement, soit parce que la loi retenue n'est pas adaptée pour représenter la situation.

droite et le cercle sont des idéalités), on veille à distinguer aujourd'hui, lors de l'étude des situations aléatoires, la réalité, sa description et les outils théoriques de cette description, distinction qui a permis à la notion de probabilité d'acquérir le statut de véritable concept mathématique : le calcul des probabilités, considéré comme modèle mathématique, permet alors l'étude d'un certain nombre de situations aléatoires qui paraissaient auparavant aporétiques car paradoxales. Considérons par exemple la question suivante. *"Dans un square, sont installés trois bancs à deux places : deux individus arrivent et s'installent au hasard. Quelle est la probabilité que ces individus soient assis sur le même banc ?"* Deux raisonnements (i.e., deux modélisations) sont alors possibles. On peut supposer qu'un des individus est déjà installé sur un banc et que l'autre va s'asseoir au hasard : il a alors le choix entre trois bancs et il y a donc une chance sur trois qu'il s'installe sur le banc déjà occupé. Autre manière de "modéliser" la situation : la deuxième personne a cinq places à sa disposition et il y a donc une chance sur cinq qu'elle s'installe sur le banc déjà occupé. Les deux modèles mobilisés pour traiter cette situation sont également légitimes : aucun n'est plus valable ou moins valable que l'autre car il n'est nulle part précisé ce qu'il faut entendre par l'expression "s'asseoir au hasard". Si l'équiprobabilité est ici implicite et ne génère aucune ambiguïté, la liste des issues sur lesquelles le calcul des probabilités doit opérer n'est, en revanche, nullement spécifiée. On est donc en présence de deux modèles possibles car rien dans l'énoncé n'incite à tel choix plutôt qu'à tel autre : il n'y a donc pas de réponse unique à la question posée, et le concept de modèle permet de clarifier cet apparent paradoxe.

Dans le cadre d'une conception constructiviste des mathématiques et au regard de l'idée de modèle, la notion de probabilité et le calcul des probabilités apparaissent ainsi respectivement comme concept théorique et outil mathématique, inventés par l'homme afin de penser certaines situations aléatoires. Cependant, cette conception, qui est celle de la plupart des probabilistes contemporains, n'empêche nullement la persistance, dans les mentalités, d'autres conceptions de la probabilité considérée alors, non pas comme un objet mathématique créé de toutes pièces par l'homme et mobilisable sous certaines hypothèses, mais comme la seule et unique mesure de la possibilité de réalisation des événements étudiés ; elle n'élimine pas non plus la distinction entre probabilité objective et probabilité subjective.

On peut résumer l'apport de cette section relative à la présentation des éléments de calcul des probabilités en distinguant quatre manières d'évaluer les probabilités :

- les degrés de certitude subjective ou de croyance (selon les termes de J. BERNOULLI, il s'agit de conjectures, par exemple celles des anciennes pratiques juridiques ou médicales évaluant le poids des indices et des présomptions) ;

- l'égalité des possibilités fondées sur les symétries physiques ou de situations (jeux de hasard) ;
- les fréquences observées des événements (supposant la possibilité de rassembler un ensemble de données statistiques suffisamment stables dans le temps) ;
- la formulation de l'hypothèse selon laquelle les phénomènes aléatoires observés relèvent de lois : c'est alors l'estimation des paramètres de ces lois qui permettent les calculs de probabilité.

Cette catégorisation présente ce qui historiquement aura difficilement été distingué : d'un côté, les probabilités dites "subjectives" liées à des supputations, voire à des états d'esprit (catégorie 1), de l'autre les probabilités dites "objectives" liées à des états du monde (catégories 2 et 3). Quant à la catégorie 4, plus récemment mise en œuvre, elle s'inscrit dans la démarche générale de tentative de modélisation des phénomènes : celle-ci interroge également les sciences de l'homme (histoire, anthropologie, sociologie, économie, archéologie) comme en rend compte l'ouvrage collectif publié en 2001 et élaboré à l'issue du séminaire consacré aux rapports entre "modèle et récit"[92].

Section II : Signalement des principales difficultés et réussites à partir de l'évocation de quelques brèves études de cas permettant l'élaboration des premières hypothèses

§.1. Signalement des principales difficultés et réussites à partir de l'évocation de quelques brèves études de cas

Une des premières pistes à explorer, susceptible de permettre d'appréhender ce qui fonde les "performances", consiste à examiner les productions d'élèves ayant reçu, dans le cadre de la forme scolaire, des enseignements de probabilités dispensés par des enseignants différents, à repérer les réussites et les difficultés communes ou singulières et à tenter d'en donner raison. Le recours aux seules analyses didactiques nous permet-il de saisir ce qui est au principe des "performances" ? Dans quelle mesure l'articulation de la sociologie historique et compréhensive à l'histoire et à la philosophie des sciences, à l'anthropologie, à la didactique, à la sociolinguistique et à la psychologie cognitive se révèle-t-elle créatrice de nouvelles connaissances explicatives ? Nous décrivons successivement quelques formes de rencontre

[92] *Le modèle et le récit*, ouvrage collectif élaboré sous la direction de J.Y GRENIER, C. GRIGNON, P.M. MENGER, éditions de la Maison des sciences de l'homme, 2001

avec les probabilités scolaires de six élèves de BTS électrotechnique, Olivier[93], Etienne[94], Jean-Marie[95], Richard[96], Henri[97] et Laurent[98], susceptibles de nous éclairer sur la nature des problèmes qui se posent. Ce sont les premières tentatives d'analyse compréhensive de ces quelques cas qui vont nous permettre d'élaborer un certain nombre d'hypothèses interprétatives et c'est seulement dans un second temps, précisément dans la troisième partie de cette thèse, que ces hypothèses seront mises en œuvre de manière systématique après qu'elles aient été complétées et enrichies au fur et à mesure de l'avancée de nos recherches, en particulier au regard des résultats des analyses socio-historiques de l'élaboration de la science probabiliste ainsi que de celles des différentes formes de transmission de ce savoir qui ont pour objet de comprendre le sens des opérations de disciplinarisation effectuées sur ce savoir.

<u>Le cas d'Olivier : essai d'analyse didactique (seule)</u>

◙ Olivier[99], 24 ans, prépare le BTS électrotechnique après un baccalauréat électrotechnique[100] préparé à l'issue d'un BEP. Il suit notre propre enseignement de probabilités lors de sa deuxième année de BTS qu'il double. Dans le cadre de cette recherche, nous lui soumettons un exercice de probabilités[101] puis l'accompagnons et l'observons dans sa tentative de résolution.

– *Chercheur : « (Lecture à haute voix de l'énoncé → "Une entreprise fabrique des rivets"). Tu as noté des choses ? »*

– *Olivier : « Ouais. "On admet que les événements A et B sont indépendants." Ça va être une loi binomiale. »*

– *Chercheur : « Tu repères le mot "indépendant" donc tu penses à une loi binomiale ? »*

– *Olivier : « Non pas forcément. Parce qu'en fait euh… Faut calculer $P(E_1)$. "Le rivet a deux défauts". Donc c'est $P(A \cap B)$. Ben c'est $P(A) + P(B)$. »*

---

93 formation continue, GRETA de Bourg en Bresse
94 formation continue, GRETA de Bourg en Bresse
95 formation initiale, lycée de Bourg en Bresse
96 formation initiale, lycée de Bourg en Bresse
97 formation initiale, lycée de Bourg en Bresse
98 formation initiale, lycée de Trévoux
99 père : technicien de devis ; mère : secrétaire
100 Bac technologique STI (sciences et techniques industrielles), option GE (génie électrotechnique)
101 Une entreprise fabrique des rivets : deux défauts de fabrication sont possibles : un défaut de diamètre et un défaut de longueur. Une étude statistique permet d'admettre que, pour un rivet choisi au hasard dans la production d'une journée, la probabilité de l'événement A : « le rivet possède un défaut de diamètre » est P(A) = 0,02 et la probabilité de l'événement B : « le rivet possède un défaut de longueur » est P(B) = 0,03. On admet que les événements A et B sont indépendants. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

E_1 : « le rivet possède les deux défauts » ;

E_2 : « le rivet possède au moins un défaut ».

– *Chercheur : « Comment tu le justifies ? »*
– *Olivier : « Je sais pas... »*
– *Chercheur : « Tu as écrit* $P(E_1) = P(A) + P(B)$*, puis tu consultes, dans ta calculatrice, les formules que tu as mises en mémoire… »*
– *Olivier : « Ben, j'regarde si je peux trouver une formule qui dit la probabilité de l'événement demandé. C'est écrit* $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$*. »*
– *Chercheur : « Et tu avais écrit ? »*
– *Olivier : « + »*
– *Chercheur : « Ta première intuition était un +. Pourquoi tu avais mis un signe "+" ? »*
– *Olivier : « En fait, je savais que c'était* $A \cap B$*. »*
– *Chercheur : « Tu savais que c'était* $A \cap B$ *mais après… le* $P(A) + P(B)$*, comment tu justifies le signe "+" ? »*
– *Olivier : « Ben, en fait, le problème c'est que donc, comme y a les deux défauts, ça aurait pu être* $P(A) + P(B)$*, l'addition des deux… »*

Olivier repère un mot-clé dans l'énoncé de la question : il s'agit du mot "indépendant"[102] qu'il réfère instantanément à la loi binomiale, ce qui peut ne pas être inexact si le contexte de la question s'y prête. Le mot "indépendant" se rapporte en général, pour un élève de BTS, à deux situations de référence. D'une part à l'indépendance de deux événements A et B[103], qui implique que la probabilité de l'événement A et B est égale au produit de leurs probabilités[104] et d'autre part à la loi binomiale, dans le cas de la répétition d'épreuves aléatoires identiques à deux issues. En fonction des éléments contextuels repérés dans l'énoncé, l'élève doit, en même temps, sélectionner la référence pertinente et inhiber celle qui ne l'est pas. Dans ce cas, il est possible, soit qu'Olivier raccroche le mot-clé "indépendant" à la seule référence dont il dispose (l'autre n'étant pas mémorisée), soit qu'il se précipite et agisse selon un schéma stimulus-réflexe caractéristique d'un conditionnement induit par sa formation (passée et actuelle) ou auto-construit.

Par ailleurs, Olivier considère intuitivement que la probabilité qu'un rivet présente les deux défauts, c'est-à-dire le défaut A "et" le défaut B, événements indépendants, est égale à la probabilité qu'il présente le défaut A "plus"[105] la probabilité qu'il présente le défaut B. Or ce n'est pas le signe de l'addition que la formule invoquée induit mais celui de la multiplication. Pour les didacticiens des mathématiques, ce résultat erroné a pour origine le repérage du mot-clé "et",

[102] - on admet que les événements A et B sont indépendants" -
[103] - et c'est précisément le cas -
[104] $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
[105] - au sens du signe + de l'addition -

suivi de sa traduction, ancrée depuis l'école primaire, par le signe "+" de l'addition. Exemple, si on achète des pommes "et" des oranges, on "additionne" les prix respectifs ("et" signifiant "en plus"). Olivier commet donc une erreur parce qu'il se réfère à une connaissance adaptée au contexte arithmétique et qui ne l'est pas à celui des probabilités[106]. L'interprétation didactique trouve ici son inspiration chez G. BACHELARD qui a montré, dans *La formation de l'esprit scientifique*, que nos "schèmes familiers"[107] et nos connaissances habituellement efficaces peuvent se révéler des obstacles[108] à la création de nouveaux schèmes et à l'acquisition de nouvelles connaissances. Un individu qui a l'habitude de procéder avec efficacité d'une certaine manière et qui, ce faisant, donne du sens à sa pratique, rencontre en général des difficultés lorsqu'il doit, à un moment donné, abandonner cette connaissance afin d'en construire une nouvelle contre[109] elle, empirique, malgré ses expériences quotidiennes. L'analyse didactique apparaît ici relativement opérante pour rendre compte des productions d'Olivier même si elle omet de s'intéresser à ses conditions d'existence qui l'ont conduit à suivre cette formation, à ses projets, aux formes de sa rencontre avec le savoir probabiliste, éléments pourtant susceptibles d'influer significativement la création de ses schèmes de perception, d'appréciation, d'opération qui structurent les formes de son rapport au savoir scolaire probabiliste.

Les cas d'Etienne, de Jean-Marie, de Richard : aporie des analyses didactiques et intérêt de la sociologie compréhensive

◙ Etienne[110], 21 ans, prépare, dans le cadre de la formation en alternance, un BTS électrotechnique après un baccalauréat électrotechnique. Tout au long de son parcours scolaire qu'il évoque à la fois douloureux et laborieux dans son rapport à la forme scolaire, Etienne s'est construit une représentation de ce qu'il estime être un savoir scolaire "convenable" et de ce qui ne l'est pas. Pour lui, les premiers cours consacrés à l'exposé des règles de formalisation spécifiques à la théorie et à l'algèbre des ensembles (diagrammes de VENN, notions d'ensemble, d'élément, d'appartenance, d'inclusion, d'intersection, de réunion, de

---

[106] Les didacticiens des mathématiques utilisent l'expression "théorème-en-actes" pour désigner un tel processus. Autre exemple d'erreur fréquente en probabilités scolaires :
alors que $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X < a)$, il est fréquent de voir écrit
$P(a < X < b) = P(a < X) - P(X < b)$, écriture erronée qui peut s'expliquer par l'utilisation correcte d'un schème dans le contexte algébrique [$a < X < b$ équivaut en effet à $a < X$ et $X < b$] mais incorrecte dans le contexte probabiliste. En effet, dans l'écriture $P(a < X < b)$, la quantité entre parenthèses désigne un événement et non une relation d'ordre. On attribue à une notation instituée un sens différent. De même, dans la cas d'un lancer d'une pièce de monnaie, les écritures $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$ signifient qu'on attribue, par exemple, la valeur 0 à la variable aléatoire X lorsque c'est "face" qui apparaît et la valeur 1 lorsque c'est "pile" qui est réalisé.
[107] - un schème familier est un schème qui a la particularité d'être facilement accessible, c'est-à-dire reconnu comme un outil privilégié dans un certain nombre de situations -
[108] - G. BACHELARD a utilisé le nom d'obstacle épistémologique pour décrire ce phénomène -
[109] - au deux sens d'appui et de d'opposition -
[110] père : ingénieur des services techniques ; mère : secrétaire

complémentaire, etc.), règles permettant, par analogie, une appropriation du langage probabiliste[111] (algèbre des événements), provoquent d'emblée déconsidération et rejet du calcul des probabilités dans sa globalité. *Etienne : « Les probas, j'y ai pas pris au sérieux du tout. Moi, faut qu'i ait des grosses formules de maths, avec des trucs à appliquer, des pages de calculs et là, ça m'amuse… Mais les probas où faut faire des sacs à patates, des p'tites croix et tout, j'ai l'impression d'retomber en enfance… Mais, j'suis sûr qu'y a un intérêt là-d'dans, mais j'me suis pas investi, j'ai pas vraiment cherché à comprendre plus profondément les probas… »* Le discrédit qu'il porte quasi instantanément à un fragment du chapitre introductif du calcul des probabilités induit un discrédit sur l'ensemble des cours de probabilités à venir, cours auxquels il assiste contraint, ne se sentant qu'épisodiquement concerné par ce qui est traité. Pour justifier ce dédain, il évoque le sentiment de dégradation qu'il ressent à devoir se consacrer à des mathématiques qu'il juge enfantines alors qu'il a jusqu'alors été confronté, certes, avec plus ou moins de bonheur, à des mathématiques relativement ambitieuses (nombres complexes, calcul d'intégrales, développement de fonctions périodiques en séries de FOURIER, résolution d'équations différentielles, etc.). Cette manière de percevoir et d'apprécier la présentation et l'introduction du calcul scolaire des probabilités n'est en rien singulière. Elle révèle la difficulté, pour certains élèves adultes, à s'intéresser à ce qu'ils considèrent comme des problématiques peu sérieuses et enfantines. Si l'analyse didactique ne permet pas de rendre raison de cette forme d'opposition, la sociologie compréhensive, en interrogeant les histoires de vie des sujets et notamment la genèse de la construction de leurs dispositions, peut permettre d'améliorer l'intelligence des formes de réception et d'appropriation d'un savoir donné.

◙ Jean-Marie[112], 20 ans, réussit très bien en mathématiques générales (17 sur 20 de moyenne), un peu moins bien en calcul des probabilités (14 sur 20), chapitre qu'il ne goûte guère.

- *Jean-Marie : « J'suis bon en maths. Mais ça c'est un chapitre que j'aime pas on va dire. C'est l'seul chapitre que j'aime pas, quoi ! »*
- *Chercheur : « C'est quelque chose que tu travailles beaucoup ? »*
- *Jean-Marie : « De quoi, les probas ? Euh, bah pas mal parc'que j'aime bien les maths mais ça m'fait un peu… »*
- *Chercheur : « Ça t'fait un peu ? »*
- *Jean-Marie : « Bah disons que j'aime bien les maths quand j'ai une bonne moyenne ! »*

---

[111] A et B, étant deux événements : $A \cap B$ désigne l'événement A et B, $A \cup B$ l'événement A ou B, etc.

[112] père décédé : ancien cadre à la DDE ; mère : infirmière

– *Chercheur : « Les probabilités, ça t'fait un peu chuter ? »*

– *Jean-Marie : « Un peu. Bah disons que ça m'fait chuter mais c'est pas… ça reste raisonnable, j'veux dire qu'ça reste encore des 14, des trucs comme ça. Mais par rapport aux autres maths, où en principe j'tourne entre 16 et 17, donc ça fait une p'tite chute quand-même, c'est pas négligeable. »*

– *Chercheur : « Tu t'y intéresses surtout pour avoir des bonnes notes ? »*

– *Jean-Marie : « Oui, oui. »*

– *Chercheur : « Pas par intérêt pour la matière ? »*

– *Jean-Marie : « Oh non pas du tout, parc'que quand j'fais des probas, ça m'énerve plus qu'autre chose. »*

– *Chercheur : « Qu'est-ce qu'il faudrait pour réussir en probas ? Comment on pourrait faire à ton avis ? »*

– *Jean-Marie : « Il faudrait pas en faire ! »*

– *Chercheur : « Et pourquoi il ne faudrait pas en faire ? »*

– *Jean-Marie : « Bah parc'que, c'est des trucs, euh, j'trouve que c'est des trucs pas incohérents, mais c'est toujours des probabilités, ça reste des probabilités, quoi, c'est loin d'être des trucs qui sont sûrs. »*

– *Chercheur : « Tu penses que ça va te servir à quelqu'chose ? »*

– *Jean-Marie : « Honnêtement, non, j'psense pas. Si, ça peut servir pour remettre les idées en place, quand on nous dit par exemple "ça sert à rien d'jouer au millionnaire" par exemple. Pas au millionnaire, mais au loto, des choses comme ça. Disons que j'aim'rais pas faire un boulot où y aurait des probabilités, enfin ça c'est un truc que j'aimerais pas faire. »*

Si le niveau de ses performances en probabilités demeure honorable, il n'empêche pas l'aversion que Jean-Marie voue à cette discipline. Alors que la didactique apparaît inopérante pour tenter de rendre raison de cette aversion, la sociologie des formes de socialisation apporte un certain nombre d'éléments de compréhension. Nous verrons notamment que Jean-Marie exprime un rejet pour les jeux de hasard ainsi que pour les "choses vagues", le flou, et tout ce qui est approximatif. Il aime ce qui est clair, net et précis, et ne sait que faire, que décider, au regard d'une valeur donnée de la probabilité d'un événement[113]. La

[113] *Jean-Marie : « En fait quand on fait des probabilités on n'est jamais sûr du résultat en fait. C'est pas des résultats qui sont fixes, on n'est jamais sûr de c'qu'on trouve. Ça reste des probas, on peut pas avoir quelqu'chose de fixe, ça peut pas être la réalité, quoi ! »*
Chercheur : « Tu préfères l'électrotechnique, la physique ? »
Jean-Marie : « Ouais, la physique, l'électrotech, l'informatique industrielle en fait j'aime bien. »
Chercheur : « Ce sont des domaines plus sûrs ? »
Jean-Marie : « Ouais c'est sûr, voilà, si on veut c'est ça parc'que les probas, c'est pas des résultats qui sont sûrs, on estime quelque chose, mais la probabilité d'quelque chose à 95%, ça veut pas dire qu'on aura. On a des chances de... »

prise en compte de ces éléments nous conduit à formuler l'hypothèse selon laquelle la compréhension du sens et de l'origine de cette forme de rapport au savoir probabiliste nécessite d'interroger les formes de rapports à la pensée modale (existence de degrés de vérité)[114] qu'il a construites au travers de ses expériences familiales et scolaires.

◙ Richard[115], 20 ans, prépare ce BTS après un baccalauréat électrotechnique. Il dit n'être guère plus à l'aise en calcul des probabilités qu'en mathématiques générales. Il dit préférer se confronter à l'étude des systèmes électriques, aux machines. *« J'arrive bien à maîtriser les machines et tout. Les probabilités, ça tient pas du concret alors que c'qu'i y a dans les autres matières c'est plus, euh… La physique, tu as un système, une machine… »* Il confie "n'avoir rien compris aux probabilités" lorsqu'il était en classe terminale. Il estime cependant avoir fait des progrès en BTS au contact de son professeur, mais seulement dans une certaine limite, concède qu'il a trouvé la fin du programme de probabilités "un peu dure", et qu'il ne connaît pas les "termes techniques" (loi normale, variables aléatoires) qui constituent le vocabulaire de base de la discipline. À l'issue de sa formation en BTS qui a duré trois ans, Richard a le sentiment d'avoir réussi à construire et à organiser un certain nombre de connaissances élémentaires en probabilités. Nos observations relatives à ses manières de travailler et aux détails de ses productions, révèlent qu'il s'engage systématiquement vers la manipulation de solutions bricolées plutôt qu'académiques. C'est ainsi que pour traiter la question d'un exercice de probabilités conditionnelles[116] dont la réponse est donnée dans l'énoncé[117], il expérimente plusieurs types de calculs jusqu'à ce qu'il finisse par trouver celui qui permet d'obtenir le résultat annoncé. Alors que l'analyse didactique d'un tel procédé se limite à pointer la nature casuelle de la procédure, la sociologie analyse l'utilisation des méthodes bricolées comme l'expression d'une résistance vis-à-vis de méthodes rationnelles présentées dans le cadre de la forme scolaire : celles-ci sont appréhendées comme étant plus "chères" à mettre en œuvre intellectuellement. Nous formulons l'hypothèse que ce recours, interprété comme une des réponses possibles à l'imposition de l'ethos[118] de la rationalité stochastique, trouve son origine dans l'histoire sociale de Richard.

[114] L'analyse d'une situation pouvant donner lieu à plusieurs éventualités de "forces inégales" et donc à ce titre, susceptibles d'être affectées de probabilités inégales.

[115] père : chef de travaux dans un lycée professionnel ; mère : bibliothécaire

[116] - voir dans le dernier chapitre la présentation et l'analyse du traitement de cet exercice -

[117] - il s'agit d'un détail caractéristique des exercices scolaires de probabilités proposés à l'examen -

[118] i.e : ensemble hiérarchisé de valeurs sociales, de règles, de représentations qui présentent une unité.

Laurent et Henri : de l'intérêt d'articuler didactique, psychologie cognitive, sociolinguistique, sociologie compréhensive

◙ Laurent[119], 21 ans, prépare le BTS après un baccalauréat électrotechnique. Il décrit son rapport aux mathématiques et aux probabilités de la manière suivante. *« Les maths… J'aime bien les maths sauf les probas, je dirais… Parce que c'est vrai que les probas, c'est quand même bien spécial, c'est quand même pas… C'est pas du… C'est vrai que je me suis toujours demandé pourquoi on faisait des probas en maths… C'est p'être pour ça que j'y arrive pas trop ; j'ai jamais vu le lien par rapport à ce qui est logarithmes, exponentielles, factorielles et machins. Depuis la terminale, je m'demandais vraiment qu'est ce qu'ça venait faire dans les maths, donc c'est vrai que… »* Laurent affirme obtenir de bons résultats en mathématiques générales (nombres complexes, équations différentielles, séries de FOURIER, transformées de LAPLACE), avoir des facilités pour traiter les questions de probabilité se rapportant à l'utilisation des lois (loi binomiale, loi de POISSON, loi normale), et n'être pas à l'aise pour traiter celles qui sont relatives à l'algèbre des événements[120] et aux probabilités conditionnelles[121]. *Laurent : « J'ai souvent du mal à retranscrire les énoncés à y voir clair en fait. Par contre, si j'peux rajouter un truc, c'est que les probas… c'qu'on fait avec la loi binomiale, deux possibilités, un succès, un machin… ça j'y arrive mieux. La loi normale et euh… la loi de POISSON, ça va mieux aussi… Mais tout ce qui est probas "A union B", "A et B", je mélange… Les probas conditionnelles, ça je… c'est une grosse galère quoi ça... En début d'exercice, ça c'est le risque que ça m'bloque pour tout le reste. »* Il est remarquable d'observer, dans le cas de Laurent, que ses difficultés (algèbre des événements et probabilités conditionnelles) et ses réussites (utilisation des lois de probabilité) sont emblématiques de celles de la plupart des élèves techniciens

---

[119] père : cadre de banque ; mère : animatrice dans un centre de loisirs

[120] Exemple d'exercice scolaire traitant de l'algèbre des événements :
On considère deux lignes téléphoniques et les deux événements suivants :

Evénement A : "la ligne téléphonique 1 est occupée".
Evénement B : "la ligne téléphonique 2 est occupée".

Mettre en signes, en utilisant les symboles $\cap$, $\cup$, A, B, $\overline{A}$, $\overline{B}$ les événements suivants :

Evénement C : " les deux lignes sont occupées".
Evénement D : "aucune ligne n'est occupée".
Evénement E : "une ligne au moins est occupée".
Evénement F : "une ligne au moins est libre".

[121] Exemple d'exercice scolaire traitant de probabilité conditionnelle :
Dans un atelier, deux machines M_1 et M_2, fonctionnant de façon indépendante, produisent des pièces de même type. La machine M_1 fournit les 4/5 de la production, la machine M_2 en fournit 1/5. Parmi ces pièces, certaines sont défectueuses : c'est le cas pour 5 % des pièces produites par M_1 et pour 4 % des pièces produites par M_2. On prélève au hasard une pièce dans la production de l'atelier.

1° Démontrer que la probabilité que cette pièce soit défectueuse est 0,048.

2° Sachant que cette pièce est défectueuse, déterminer la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine M_1.

supérieurs : si pratiquement tous achoppent sur les mêmes difficultés, ils sont également nombreux à réussir à appliquer correctement les formules relatives aux lois de probabilité. Dans la mesure où difficultés et réussites apparaissent récurrentes, il importe de tenter d'en saisir les fondements.

- 1°) Le traitement des questions mobilisant l'algèbre des événements nécessite une "mise en signes" spécifique ($A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$, $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A \cup B}$, $(A \cup B) - (A \cap B)$, etc.), préalable aux calculs effectifs des probabilités de ces événements. Deux raisons peuvent être évoquées pour rendre compte de ces difficultés :

  - La première, qui fait appel à l'expérience ou plutôt à l'inexpérience scolaire des élèves, est interne à la discipline mathématique et en ce sens plutôt d'essence didactique. En effet, l'algèbre des ensembles, qui mobilise les mêmes connaissances que l'algèbre des événements, n'est plus enseignée dans le secondaire depuis la fin de l'expérience d'enseignement des "mathématiques modernes". Dans la mesure où les élèves de BTS n'ont bénéficié d'aucune "initiation" explicite ni à la théorie et à l'algèbre des ensembles, ni à l'algèbre des événements, il n'est pas surprenant de constater des difficultés en ce domaine.

  - La seconde, qui interroge les connaissances mobilisées pour traduire en langage formel les énoncés des exercices rédigés en langue naturelle, est d'essence sociolinguistique. La "mise en signe" ou codage des énoncés mobilise notamment un rapport réflexif à la langue très différent du rapport que nécessitent les travaux de synthèse de documents qui constituent l'activité principale, en français[122], des élèves techniciens supérieurs. Nous considérons que les capacités, pour les élèves, d'exercer leur réflexion sur la langue, de maîtriser consciemment les définitions et les règles de formalisation, sont socialement induites par leurs conditions d'existence. Considérons, par exemple, la tâche suivante : sachant qu'un pièce tirée au hasard dans une production est susceptible de présenter un défaut A ou un défaut B, traduire en langage formel l'événement "la pièce présente au moins un défaut". La "mise en signes" correcte est $A \cup B$. L'expression "au moins un" doit en effet être comprise comme synonyme de "l'un ou l'autre ou les deux" : elle justifie donc l'utilisation d'un "ou non exclusif" ("ou inclusif"). Les élèves qui suivent les formations, initiales ou continues, du BTS électrotechnique sont, pour la plupart, issus soit des classes populaires, soit des classes moyennes, et n'ont généralement pas développé, sauf de rares

---

[122] - la réussite aux activités de synthèse de documents n'implique pas forcément la réussite aux activités de formalisation des énoncés en langage probabiliste et inversement -

exceptions, de dispositions spécifiques relatives à l'étude des subtilités du langage. La réussite aux exercices qui traitent d'algèbre des événements exige ainsi un intérêt porté au langage et à son fonctionnement, nécessite que celui-ci soit mis à distance et considéré comme un objet analysable et faisant l'objet d'une attention et d'un travail approfondi, conscient, volontaire et intentionnel : or ceci ne constitue pas particulièrement l'apanage des élèves techniciens supérieurs. Ainsi, l'aptitude à percevoir des nuances du type "au moins trois pièces défectueuses"[123], "moins de trois pièces défectueuses"[124], "au plus trois pièces défectueuses"[125], "plus de trois pièces défectueuses"[126], est une des conditions élémentaires à la réussite des exercices scolaires de calcul des probabilités portant sur l'algèbre des événements dans les sections de BTS. Il est donc nécessaire de dominer le langage, de dominer certains instruments de langage et certains modes d'utilisation du langage. Les catégories "moins de", "au moins", "plus de", "au plus" jouent sur des nuances linguistiques fines. Pour pouvoir traiter de manière formelle un exercice où ces catégories sont convoquées, celles-ci doivent au préalable avoir été construites à travers des opérations concrètes. Bien qu'élémentaires, il apparaît que la manipulation correcte de ces catégories est loin d'être maîtrisée par tous les élèves techniciens supérieurs, sans doute parce que très rarement sollicitée.

- 2°) Pour ce qui relève des probabilités conditionnelles, il apparaît également profitable d'articuler didactique, sociolinguistique et sociologie. L'analyse purement didactique proposée par Régis GRAS et André TOTOHASINA[127] met l'accent sur les points suivants. Après avoir rappelé l'existence d'une confusion entre "probabilité conditionnelle d'un événement A, sachant que l'événement B est réalisé"[128], notée $P(A \ / \ B)$ et la "probabilité conjointe de la réalisation de l'événement A et B", notée $P(A \ \cap \ B)$, R. GRAS et A. TOTOHASINA ont identifié un certain nombre de conceptions erronées de la notion de probabilité conditionnelle. Ces conceptions, erronées parce qu'elles accordent aux probabilités

[123] - trois, quatre, cinq, etc.
[124] - zéro, une et deux -
[125] - zéro, une et deux -
[126] - quatre, cinq, six, etc.
[127] R. GRAS et A. TOTOHASINA, *Conceptions d'élèves sur la notion de probabilité conditionnelle révélées par une méthode d'analyse des données : implication, similarité, corrélation*. Prépublication 93-05, IREM de Rennes, 1993, p.9-10. Voir aussi A. TOTOHASINA, *L'introduction du concept de probabilité conditionnelles : avantages et inconvénients de l'arborescence*, Revue Repères, n°15, avril 1994, p.93-118
[128] autre formulation : "probabilité conditionnelle d'un événement A, si l'événement B est réalisé"

conditionnelles des caractéristiques qu'elles n'ont pas toujours, ont été repérées à l'occasion du refus, par les élèves, de traiter les questions posées.

- La conception chronologiste de la probabilité conditionnelle $P(A\ /\ B)$ est le fait d'imposer systématiquement une relation temporelle entre les deux événements A et B. L'événement conditionnel B est considéré comme nécessairement antérieur à l'événement conditionné A. Dans ce cadre, un exercice qui demande de renverser cette relation temporelle et de calculer la probabilité d'un événement "passé" connaissant un événement "futur" apparaît dépourvue de sens à un élève.[129]

- La conception causaliste de la probabilité conditionnelle $P(A\ /\ B)$ se manifeste par l'introduction implicite d'une relation de "cause à effets" ou de "cause à conséquences" entre l'événement conditionnant B et l'événement conditionné A. De même que précédemment, un exercice qui demande de renverser cette relation et de calculer la probabilité d'une "cause" connaissant une "conséquence" apparaît à l'élève comme un non-sens.

Pour R. GRAS et A. TOTOHASINA, ces deux conceptions, "chronologiste" et "causaliste", sont susceptibles de se constituer en obstacles épistémologiques : en l'occurrence la résistance à la réversibilité de la notion de probabilité conditionnelle. Ils ont montré que ces conceptions n'étaient pas corrélées, ce qui tendraient à accréditer la thèse selon laquelle elles pourraient être construites séparément par les élèves et non pas consécutivement. Ces didacticiens interrogent également l'existence de correspondances entre l'emploi de la locution "$P(A\ sachant\ B)$" et la conception "chronologiste", et celle de la locution "$P(A\ si\ B)$" et la conception "causaliste". Dans la mesure où l'emploi de la locution "$P(A\ sachant\ B)$" est le plus usité, il pourrait expliquer la fréquence d'apparition plus importante de la conception "chronologiste"[130]. Remarquons que les travaux de R. GRAS et A. TOTOHASINA se recoupent singulièrement avec ceux de R. FALK - évoquées plus loin - qui a mis en évidence, dans le cas des calculs ayant trait aux probabilités conditionnelles, une

[129] Exemple d'obstacle : calculer la probabilité qu'un objet soit sans défaut sachant qu'il a été refusé, ou qu'un objet soit refusé sachant qu'il est sans défaut.

[130] R. GRAS et A. TOTOHASINA, *Chronologie et causalité, sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. Méthodologie et corollaires de la mise en évidence de ces conceptions*. Prépublication 93-11, IREM de Rennes, 1993, p.39.41

utilisation non pertinente des modèles liés aux principes de causalité et d'irréversibilité temporelle[131].

Le recours à la sociologie se justifie par le fait que le traitement des questions relatives aux probabilités conditionnelles mobilise également un rapport réflexif à la langue assez fin, associé à l'exercice du raisonnement logique, à la traduction et à la codification en écriture formelle. Les élèves de BTS électrotechnique doivent en effet être capables de traduire en langage formel des probabilités d'événements qui sont, soit des événements conjoints, soit des événements conditionnés. Il faut qu'ils puissent distinguer, par exemple, “la probabilité qu'un objet soit défectueux et accepté”, “la probabilité qu'un objet soit sans défaut et refusé”, “la probabilité qu'un objet soit sans défaut sachant qu'il a été refusé”, “la probabilité qu'un objet soit refusé sachant qu'il est sans défaut”, “la probabilité qu'un objet soit accepté sachant qu'il est défectueux”, etc. Les différents exercices scolaires de probabilités conditionnelles supposent donc, comme pour la formalisation de l'algèbre des événements, une disposition cognitive de type réflexif à l'égard du langage, une capacité à extraire la langue de ses usages pratiques, à la mettre à distance. Les exercices ayant trait aux calculs de probabilités conditionnelles sont le lieu où logique, langage, traduction, codification et formalisation sont intimement mêlés : la compréhension de tels processus cognitifs nécessite des analyses qui combinent apports didactiques, psycho-cognitifs, sociolinguistiques et sociologiques.

- 3°) La relative aisance dont Laurent et de nombreux élèves de BTS font généralement preuve à l'occasion d'exercices d'application des lois de probabilité peut se comprendre par le fait qu'ils retrouvent une manière de pratiquer connue (applications de “recettes”, de procédures, d'algorithmes). Le calcul scolaire des probabilités abordé sous l'angle des lois de probabilité ne présente en effet pas de véritable rupture avec une approche habituelle puisqu'on retrouve la notion de modèle : il s'agit alors de rendre compte d'une réalité donnée à l'aide d'un modèle mathématique exprimé en termes de loi et mobilisant des formules mathématiques telles que $P(X = k) = C_n^k\, p^k\,(1 - p)^{n-k}$ pour la loi binomiale ou $P(X=k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$ pour la loi de POISSON. À l'exception de l'exposé de la théorie relative aux lois de probabilité, qui fait appel à des notions abstraites, l'utilisation des lois consiste en une simple application de formules[132]. Dans une certaine mesure, la tâche requise apparaît même plus simple que celle consistant,

[131] R. FALK & R. BAR-HILLEL, *Some teasers concerning conditional probabilities,* Cognition, 11, 1982, p.109-122

[132] Les élèves ont à remplacer, dans les formules mathématiques, les lettres par les nombres adéquats.

par exemple, à appliquer les théorèmes de THALÈS ou de PYTHAGORE au collège, où il est en effet nécessaire de reconnaître les situations géométriques qui appellent la mobilisation de l'un ou l'autre de ces théorèmes, alors qu'en BTS, il est précisé, dans les énoncés des exercices, que telle question requiert l'application de la loi binomiale et telle autre l'application de la loi de POISSON, etc. Dans ces conditions, où les contrats didactiques sont réduits à leur plus simple expression, il n'est pas vraiment surprenant d'observer de nombreuses réussites d'élèves techniciens supérieurs.

◙ Henri[133], 20 ans, prépare le BTS après un baccalauréat électrotechnique. Il évoque sa rencontre avec les probabilités en soulignant sa réussite dans le maniement des lois de probabilités[134] et ses difficultés dans la partie dénombrement d'arrangements et de combinaisons de cas favorables ou possibles à la réalisation d'un événement. Si le succès dans la résolution d'exercices est généralement produit par une activation de connaissances spécifiques, étroitement contextualisées, acquises par un sujet au moyen d'exercices qu'il a déjà résolus, alors la nouveauté et l'originalité que présentent les exercices de dénombrement peuvent en grande partie expliquer les difficultés d'Henri et de ses camarades.

– *Henri : « Donc les probas, j'aime bien... quoi qu'il y a une partie qui est la partie dénombrement, j'y trouve pénible, quoi. J'aime bien tout ce qui est euh loi normale, les lois, comme ça quoi, tout ce qui est calculs... J'dirais c'est simple. »*
– *Chercheur : « Est ce que tu préfères faire des exercices de probabilité ou des exercices classiques de mathématiques ? »*
– *Henri : « Et ben, moi je préfère faire des exos sur les nombres complexes, les fonctions, les intégrales que sur les probas, parc'que les probas, euh... du moins c'est un p'tit peu mon point faible, c'est mon point faible. »*
– *Chercheur : « Ton point faible ? »*
– *Henri : « C'est soit j'y arrive bien, soit des fois, ben, j'pars complètement de travers, tandis que dans les autres c'est juste. Des fois j'interprète mal le sujet… »*
– *Chercheur : « Tu as des difficultés avec les énoncés ? »*
– *Henri : « Ouais, ouais... ça arrive. Y en a, euh, j'ai compris d'une manière alors qu'en fait, fallait pas comprendre comme ça, dans le genre,*

[133] père : zingueur ; mère : femme de ménage
[134] *Henri : « Dans les lois normales, euh... disons, ça c'est, c'est plus des méthodes à suivre et ça me va, j'ai pas trouvé de difficultés, j'dirais, on apprend sa leçon, si on sait sa leçon, on devrait s'en sortir. »*

euh, j'étais persuadé qu'il fallait utiliser l'ordre dans un calcul quelconque alors que, ben non y avait pas la peine. »

– *Chercheur : « Tu fais allusion à ce qui est dénombrement ? »*

– *Henri : « C'est là surtout j'y vois le plus euh d'erreurs que j'fais quoi. »*

L'analyse des erreurs en dénombrement, et notamment la difficulté à différencier les arrangements[135] des combinaisons[136], conduit à catégoriser celles-ci comme erreurs de diagnostic. De même que le diagnostic en médecine est compris comme une action permettant d'identifier une maladie à des symptômes observés, le diagnostic consiste ici, pour l'élève, à repérer dans un énoncé les éléments susceptibles de lui permettre de raccrocher telle information à tel pattern correspondant connu. Quant au choix de l'outil mathématique, il procède d'une analyse synoptique de l'énoncé où les efforts de recherche d'informations sont concentrés dès le début de la lecture. Par ailleurs, Henri, très à l'aise, dans toutes les disciplines scolaires à orientation scientifique qui nécessitent la mobilisation de schèmes de la nécessité[137], reconnaît éprouver des difficultés pour s'adapter à la pensée stochastique : il considère le calcul des probabilités comme "moins rigoureux" que les mathématiques générales.

– *Chercheur : « Est-ce que tu considères que le calcul des probabilités est plus difficile que les maths habituelles ? »*

– *Henri : « J'dirais que c'est moins rigoureux. »*

– *Chercheur : « Moins rigoureux ? »*

– *Henri : « Et c'est ça que…, c'est ce que j'aime pas trop. »*

– *Chercheur : « Tu peux préciser un peu, ce que t'entends par moins rigoureux ? »*

– *Henri : « Moins rigoureux. Euh…, dans les autres maths, ben, on utilise des règles, disons des méthodes qu'on peut faire, disons les yeux fermés, euh, le système ça marche toujours pareil, quoi. Si on veut faire un calcul de surface ou des intégrales, c'est toujours la même méthode, pour résoudre des équations différentielles c'est* LAPLACE, *on applique paf, paf, c'est toujours pareil. Tandis que là, c'est selon le problème... Disons, on doit comprendre le problème pour mieux réussir les calculs. Tandis qu'autrement, on n'est pas obligé de comprendre le problème. On peut faire, disons bêtement, quoi : c'est pour ça qu'c'est plus facile. »*

---

[135] - un arrangement de n objets p à p est une façon de choisir p objets parmi n et de conserver l'ordre du choix -

[136] - une combinaison de n objets p à p est un choix de p objets parmi n, deux combinaisons différant par la nature des objets et non pas par leur ordre -

[137] - susceptibles, nous l'avons vu, d'expliquer les réussites étudiantes lorsque les tâches demandées requièrent l'utilisation de lois de probabilité -

– *Chercheur : « Quelle est la différence avec les autres matières ? Enfin, qu'est ce que tu vois comme différence... »*
– *Henri : « Ben, ouais, disons, la différence, moi j'dirais les probas c'est quelque chose qu'on n'est pas sûr, tandis que dans toutes les autres matières, le résultat c'est une valeur déterminée qui correspond à une réalité sûre. Voilà, c'est la seule différence, on calcule de l'incertain, quoi. »*

Laurent et Henri reconnaissent tous deux des difficultés à s'adapter à la spécificité des exercices de calcul des probabilités. Il semble que les habitudes et les aptitudes qu'ils ont développées en mathématiques générales se révèlent des obstacles à une appropriation correcte du savoir probabiliste. La création, le développement, l'activation et la sélection de schèmes stochastiques apparaissent d'autant moins faciles que le recours aux schèmes de la nécessité et à ceux de la pensée bivalente (c'est vrai ou c'est faux) a été développé et systématisé. L'incorporation de ces formes de pensée est en effet profonde dans la mesure où elle structure les principaux enseignements (mathématique, mécanique, électricité, etc.). Notre recherche devrait permettre de montrer que les effets de l'inculcation du modèle dichotomique et du modèle de la nécessité sont si tenaces qu'ils peuvent constituer des obstacles à une rencontre heureuse avec l'enseignement du calcul des probabilités.

§.2. Élaboration des premières hypothèses

Si l'analyse didactique permet bien souvent d'identifier la nature des difficultés et des facilités (mise en signes mathématiques des énoncés, rapport réflexif à la langue, traduction, codification, création, activation, sélection de schèmes spécifiques, utilisation de méthodes rationnelles, utilisation raisonnée de lois, de règles et de formules), et de comprendre la logique interne à la discipline, elle apparaît relativement démunie lorsqu'il s'agit de rendre compte des conditions susceptibles de freiner, de permettre ou de favoriser l'appropriation du savoir scolaire probabiliste. La prise en compte des apports et des limites de la didactique et des apports et des limites de la sociologie nous conduit à tenter d'articuler analyses didactiques, psycho-cognitives, sociolinguistiques et sociologiques afin de tenter de saisir ce qui est au principe des performances scolaires en calcul scolaire des probabilités des élèves techniciens supérieurs en électrotechnique. Ainsi, parmi les nombreuses formes de réactions repérées à l'issue de la rencontre entre des élèves techniciens supérieurs et l'enseignement du calcul des probabilités, il apparaît, en première analyse, l'existence, pour les élèves techniciens supérieurs en électrotechnique :

- d’une part, de difficultés pour :
  - faire preuve d’intuition dans le choix d’une procédure correcte permettant de calculer une probabilité élémentaire[138] ;
  - pratiquer avec justesse le dénombrement d’objets combinés ou arrangés de différentes manières ;
  - ôter au calcul scolaire des probabilités la gangue des connotations défavorables associées aux mathématiques scolaires générales ;
  - dépasser certaines représentations négatives des jeux de hasard ;
  - traduire et coder en langage formel les énoncés des exercices de probabilité rédigés en langue naturelle. L’algèbre des événements nécessite des habitudes spécifiques faisant appel au langage, à la logique, à la codification et à la formalisation. Les probabilités conditionnelles exigent un degré supplémentaire de finesse et de réflexivité dans la maîtrise de ces mêmes habitudes ainsi que le recours à une méthode rationnelle ;
  - abandonner le recours aux méthodes personnelles bricolées au profit de méthodes rationnelles et académiques (méthodes expertes) ;
  - réussir, contre les habitudes solidement ancrées d’activation et de sélection quasi-systématiques de schèmes de la nécessité ayant permis la résolution de nombre d’exercices proposés jusqu’alors, à créer, à développer, à activer et à sélectionner des schèmes stochastiques adaptés au traitement de situations scolaires élaborées à cet effet[139].
- d’autre part, d’une relative aisance pour :
  - traiter les questions nécessitant une application des lois de probabilité : cette tâche, qui se réduit à utiliser quelques formules élémentaires de mathématique, apparaît en effet relativement familière aux élèves.

À l’issue de ce premier signalement[140], il apparaît nécessaire d’insister sur la fréquence importante des difficultés et des réussites qui viennent d’être identifiées. Notre expérience d’enseignant auprès d’élèves techniciens supérieurs en électrotechnique combinée à celle de correcteur à l’examen, nos recherches sur ce même thème initiées dans le cadre de la maîtrise et du DEA de

[138] Cette difficulté sera peu évoquée dans la mesure où son étude a déjà donné lieu à de nombreuses publications (*cf.* les travaux de M.P. LECOUTRE, V. GIROTTO, M. GONZALEZ, cités en bibliographie)

[139] Il ne s’agit pas, pour ces élèves, de décider du choix d’un modèle (déterministe ou stochastique) permettant de problématiser une situation réelle, mais d’utiliser le modèle suggéré.

[140] Il ne s’agit là que d’une première série de difficultés et de réussites recensées : d’autres sont susceptibles d’apparaître au fur et à mesure du développement des recherches.

sociologie, enfin les nouvelles observations et les nouveaux entretiens recueillis à la fois auprès de nos propres élèves et auprès d'élèves ayant bénéficié d'autres enseignements, constituent un faisceau d'éléments convergents qui nous conduisent à formuler l'hypothèse selon laquelle certaines difficultés et réussites sont spécifiques des enseignements de probabilités diffusés dans le cadre de la forme scolaire. Dans la mesure où elles apparaissent récurrentes, elles sont également susceptibles d'être relativement indépendantes des motivations et des pratiques enseignantes œuvrant dans ce cadre. Cette inférence, qui peut éventuellement être mise en question, nous conduit à ne pas accorder d'importance surdéterminée au rôle de l'enseignant et à postuler l'existence de logiques fondamentales à l'œuvre dans les formes de la rencontre entre élèves et calcul scolaire des probabilités. Ces logiques doivent ainsi être rattachées aux conditions sociales d'existence de ces élèves et à la spécificité anthropo-épistémologique de ce savoir qui a été transmuté en une discipline scolaire dans une forme qu'il est nécessaire d'analyser.

Section III : Exposé du plan de thèse

Cette thèse est animée par le projet d'articuler sociologie historique et compréhensive, histoire et philosophie des sciences, anthropologie, didactique, sociolinguistique et psychologie cognitive.

- La première partie est consacrée à l'évocation d'un certain nombre de travaux susceptibles d'orienter ou de fonder notre recherche.
    - Le chapitre 1 souligne la distinction entre deux formes d'enseignement, d'une part avec la présentation des concepts de forme scolaire, de rapport à la règle, de discipline scolaire et de disciplinarisation des savoirs, et d'autre part avec celle des concepts d'instruction publique, de rapport à la raison et de socialisation démocratique.
    - Le chapitre 2 s'efforce de préciser le sens que nous donnons aux concepts de socialisation et de performances.
    - Le chapitre 3 est l'occasion d'examiner un certain nombre de travaux ayant trait à l'analyse des performances mathématiques. Ces contributions, dont les origines sont diverses (philosophiques, psychologiques, sociologiques), font l'objet d'examens critiques.
    - Le chapitre 4 fait le point sur les apports et les limites de la sociologie et de la psychologie dans l'analyse des performances scolaires en général : sociologies de la domination, formes de rapport au langage, formes de structuration de l'environnement familial, sens des activités scolaires, fonctions politico-morales de l'enseignement.

- Le chapitre 5 interroge les fondements de la connaissance didactique ainsi que les raisons qui font qu'elle ne s'encombre ni des questions d'histoire, ni de celles des déterminants sociaux.

▪ La seconde partie est consacrée à l'étude socio-historique de la constitution du calcul des probabilités comme science, puis à celle de ses différentes formes de diffusion. Elle interroge également la place des techniciens supérieurs au sein de la division du travail, et analyse la spécificité de leur formation, notamment dans le domaine probabiliste, au regard de celle des ingénieurs.

- Le chapitre 6 s'attache à décrire le contexte socio-historique ayant permis la mathématisation du hasard et du probable, la rationalisation des prises de décision en situation d'incertitude et en situation de risque, le calcul des espérances et l'élaboration de la science probabiliste contemporaine.

- Le chapitre 7 présente l'étude socio-historique de différentes formes d'enseignement du calcul des probabilités : d'une part, des expériences caractérisées par la prédominance du scientifique sur le pédagogique (fin du XVIII^e^ siècle-début du XX^e^ siècle), d'autre part des expériences caractérisées par leurs formes disciplinarisées, c'est-à-dire par la prédominance du pédagogique sur le scientifique (XX^e^ siècle).

- Le chapitre 8, en analysant les rapports entre les formes de distribution différentielle des savoirs probabilistes et les formes de division sociale du travail, conduit à examiner les fonctions sociales de l'enseignement technique. La comparaison des programmes et des tâches dévolues aux élèves techniciens supérieurs à ceux et celles des élèves ingénieurs permet de caractériser la nature initiatrice et disciplinaire du savoir probabiliste enseigné aux techniciens supérieurs.

▪ La troisième partie est consacrée à l'étude compréhensive des formes de rencontre entre des élèves techniciens supérieurs en électrotechnique et le calcul scolaire des probabilités.

- Le chapitre 9 tente de préciser ce que recouvre le concept de schème, souligne son ancrage social, ainsi que l'importance des processus d'activation et de sélection-inhibition des schèmes cognitifs lors des situations de résolution de problèmes.

- Le chapitre 10 rend compte de la manière dont ont été produites les données de cette enquête sociologique : présentation du protocole d'entretiens et d'observations.

- Le chapitre 11 est une tentative d'étude compréhensive des formes de rencontre entre des élèves techniciens supérieurs en électrotechnique et le calcul scolaire des probabilités.