

Troisième partie

Modèles circulaires

Reconnaissance d'arcs de cercle et mesure de circularité

Sommaire

6.1 Étude de l'existant	144
6.1.1 Définitions du cercle discret	144
6.1.2 Problème de séparation par un cercle	145
6.1.2.1 Problème de programmation linéaire 3D	145
6.1.2.2 Problème de programmation linéaire 2D	147
6.1.2.3 Problème de séparation linéaire 3D	148
6.2 Reconnaissance d'arcs de cercle	149
6.2.1 Calcul de $\mathcal{E}^3(S')$ et $\mathcal{E}^3(T')$	150
6.2.2 Calcul de la hauteur entre $\mathcal{E}^3(S')$ et $\mathcal{E}^3(T')$	151
6.2.3 Algorithme et complexité	152
6.3 Optimisation	153
6.3.1 Calcul de \hat{S}	153
6.3.2 Calcul de \hat{T}	153
6.3.3 Algorithme et complexité	158
6.4 Mesure de circularité	160
6.4.1 Inconvénients des mesures existantes	160
6.4.2 Définition de la mesure	163
6.4.3 Résultats expérimentaux	164
6.4.3.1 Polygones réguliers	166
6.4.3.2 Ellipses	166
6.4.3.3 Cercles bruités	167
6.5 Conclusion	168

Ce chapitre est consacré à la reconnaissance d'arcs de cercle ainsi qu'à la définition et au calcul d'une mesure de circularité. Après un état de l'art complet des différents algorithmes existants, un algorithme original de reconnaissance d'arcs de cercle est présenté. Une mesure de circularité se calcule sans surcoût à l'aide du même algorithme. Ce travail a d'abord été présenté à *The 2008 International Conference on Image Processing, Computer Vision, and Pattern Recognition* (IPCV'08) [Roussillon *et al.*, 2008b]. Une version étendue est publiée dans *Pattern Recognition* [Roussillon *et al.*, 2010].

6.1 Étude de l'existant

6.1.1 Définitions du cercle discret

Les cercles discrets ont été d'abord définis par discrétisation. Bresenham [1977] considère une discrétisation de type GIQ. Kim [1984]; Kim et Anderson [1984] travaillent avec le bord de disques discrets définis par discrétisation de Gauss (fig. 6.1.a). Selon la définition 1.19, une partie $C_{i|j}$ d'un contour C est un arc de cercle discret si et seulement s'il existe un cercle euclidien qui sépare $X_{i|j}$ de $\bar{X}_{i|j}$. C'est l'adaptation au contour de la définition par discrétisation de Gauss (fig. 6.1.b). Cette définition est équivalente à celle de Kovalevsky [1990].

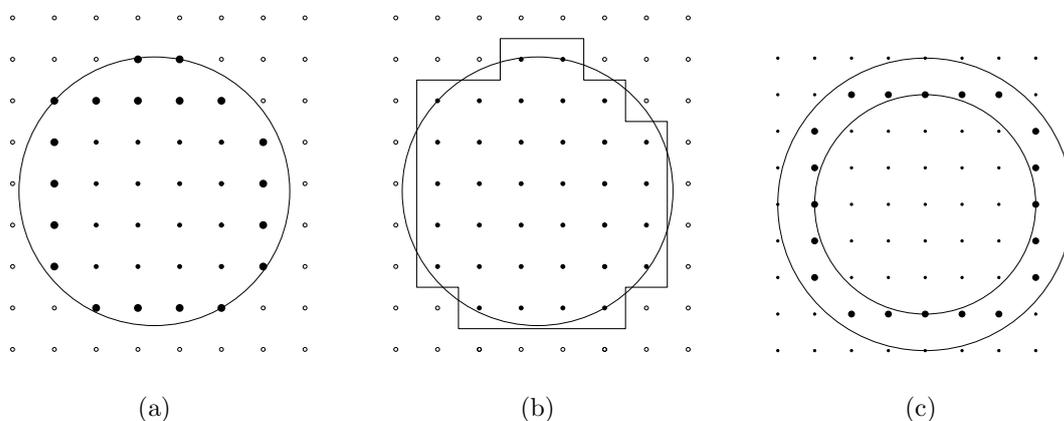


FIG. 6.1 – Différentes définitions du cercles discrets. Bord (a) et contour (b) de la discrétisation de Gauss d'un cercle. Cercle arithmétique (c).

Andres [1994] a été le premier à proposer une définition analytique du style de celle proposée pour les droites discrètes [Reveillès, 1991]. Les *cercles arithmétiques* de centre ω et de rayon r (où $\omega \in \mathbb{Z}^2$ et $r \in \mathbb{Z}$) sont définis comme l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant la double inégalité suivante : $(r - \frac{1}{2}) \leq (x - \omega_x)^2 + (y - \omega_y)^2 < (r + \frac{1}{2})$ (fig. 6.1.c).

Le formalisme analytique offre la possibilité de tester directement si un point donné appartient ou non à un cercle arithmétique donné. De plus, les cercles arithmétiques ont la propriété de paver le plan, ce qui peut être utile dans certaines applications. En revanche,

ils ne sont ni strictement 0-connexes, ni strictement 1-connexes. Pour dépasser ces problèmes, Fiorio *et al.* [2006]; Fiorio et Toutant [2006] ont proposé une définition analytique des cercles discrets comprenant une fonction d'épaisseur non constante.

Cependant, la définition par discrétisation de Gauss est celle qui semble la plus adaptée aux données réelles et celle qui rend le problème de reconnaissance traitable par des outils issus de la géométrie algorithmique. En effet, le problème de reconnaissance de cercles discrets définis par discrétisation de Gauss revient à un problème de séparation de deux ensembles de points, ceux de l'objet et ceux du fond, par un cercle. Cette approche a été largement adoptée [Kim, 1984; Kim et Anderson, 1984; O'Rourke *et al.*, 1986; Fisk, 1986; Kovalevsky, 1990; Sauer, 1993; Efrat et Gotsman, 1994; Coeurjolly *et al.*, 2004].

6.1.2 Problème de séparation par un cercle

Étant donnés deux ensembles de points, le problème de séparation par un cercle consiste à trouver les cercles qui englobent les points de l'un des deux ensembles, sans englober les points de l'autre.

Soient \mathcal{S} et \mathcal{T} deux ensembles de points de \mathbb{R}^2 . Sans perte de généralité, \mathcal{S} est supposé être l'ensemble des points à encercler et \mathcal{T} , l'ensemble des points à ne pas encercler. Le problème revient à chercher les cercles $\mathcal{C}(\omega, r)$ tels que les points de \mathcal{S} sont à l'intérieur de \mathcal{C} , tandis que les points de \mathcal{T} sont strictement à l'extérieur de \mathcal{C} :

$$\begin{cases} \forall s \in \mathcal{S}, (s_x - \omega_x)^2 + (s_y - \omega_y)^2 \leq r^2 \\ \forall t \in \mathcal{T}, (t_x - \omega_x)^2 + (t_y - \omega_y)^2 > r^2 \end{cases} \quad (6.1)$$

Ce problème de séparation peut être reformulé comme un problème de programmation linéaire (section 2.1). En effet, l'équation 6.1 peut être développée ainsi :

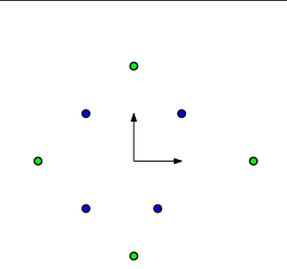
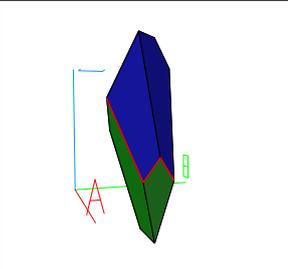
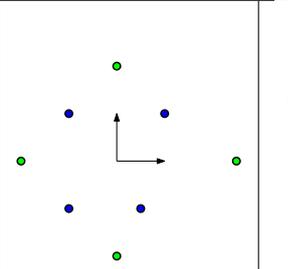
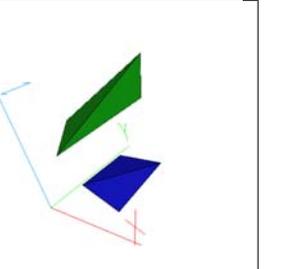
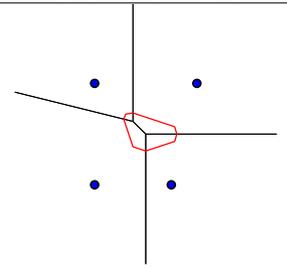
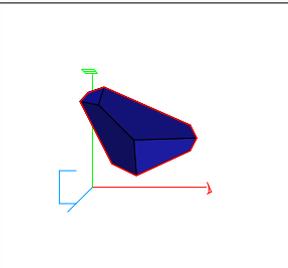
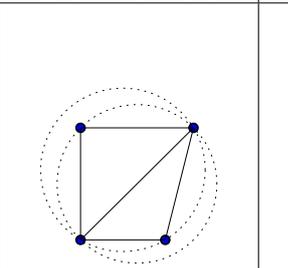
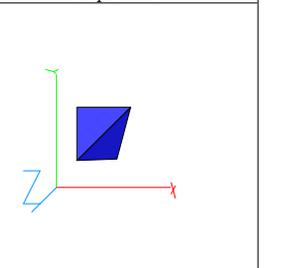
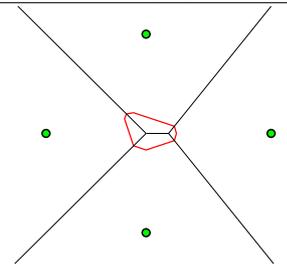
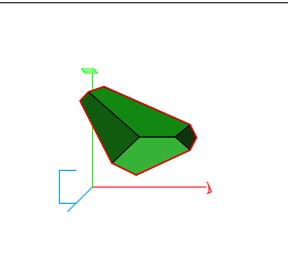
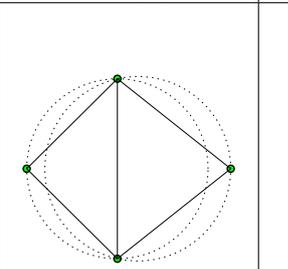
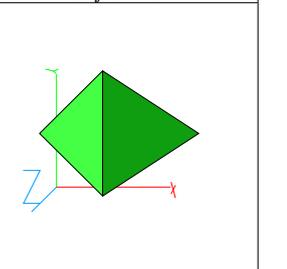
$$\begin{cases} \forall s \in \mathcal{S}, -2as_x - 2bs_y + f(s_x, s_y) + c \leq 0 \\ \forall t \in \mathcal{T}, -2at_x - 2bt_y + f(t_x, t_y) + c > 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

où $\begin{cases} a = \omega_x, & b = \omega_y, \\ c = (a^2 + b^2 - r^2) \\ f(x, y) = x^2 + y^2 \end{cases}$

En outre, le programme linéaire associé à ce problème s'interprète géométriquement dans l'espace des paramètres abc comme dans son espace dual xyz (section 2.2.2). Le tableau 6.1 récapitule les principales interprétations géométriques de ce problème et sert de support visuel à l'état de l'art suivant.

6.1.2.1 Problème de programmation linéaire 3D

Dans l'espace des paramètres abc , le fait qu'un point de \mathcal{S} (respectivement \mathcal{T}) soit à l'intérieur (respectivement à l'extérieur) d'un cercle, écrit sous la forme d'une inégalité dans l'équation 6.2, est une contrainte. Les paramètres respectant une contrainte sont les coordonnées d'un point qui appartient à un demi-espace délimité par un plan tangent au paraboloïde d'équation $c = a^2 + b^2$, lieu des cercles de rayon nul.

espace abc		espace xyz	
domaine non vide		\mathcal{S}' et \mathcal{T}' linéairement séparables	
\mathcal{S} et \mathcal{T}	domaine	\mathcal{S} et \mathcal{T}	$\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$ et $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$
			
plan ab		plan xy	
$(\mathcal{S} - 1) - V(\mathcal{S})$	moitié sup.	$(\mathcal{S} - 1) - T(\mathcal{S})$	$\mathcal{E}_{sup}^3(\mathcal{S}')$
			
$1 - V(\mathcal{T})$	moitié inf.	$1 - T(\mathcal{T})$	$\mathcal{E}_{inf}^3(\mathcal{T}')$
			

TAB. 6.1 – Interprétation géométrique du problème de séparation de deux ensembles de points par un cercle dans l'espace abc et xyz .

6.1. Étude de l'existant

Le *domaine* est défini comme l'ensemble des points appartenant à l'intersection des $|\mathcal{S}| + |\mathcal{T}|$ demi-espaces. C'est un polyèdre convexe (tableau 6.1). Ses points représentent les cercles séparants de centre $\omega(a, b)$ et de rayon $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

Résoudre le problème de séparation par un cercle revient donc à construire le domaine ou à trouver un de ses points. Comme le domaine provient de l'intersection de $|\mathcal{S}| + |\mathcal{T}|$ demi-espaces, sa construction est réalisée par dualité [Preparata et Shamos, 1985] en $\mathcal{O}(|\mathcal{S}| + |\mathcal{T}| \log(|\mathcal{S}| + |\mathcal{T}|))$ [Efrat et Gotsman, 1994]. En revanche, un seul point est trouvé à l'aide de l'algorithme de Megiddo [1984] (section 2.1.3) en $\mathcal{O}(|\mathcal{S}| + |\mathcal{T}|)$ [O'Rourke *et al.*, 1986; Sauer, 1993; Damaschke, 1995].

6.1.2.2 Problème de programmation linéaire 2D

La surface du domaine peut être divisée en trois parties :

- la moitié supérieure qui délimite l'intersection des $|\mathcal{S}|$ demi-espaces orientés vers le bas (en bleu dans le tableau 6.1),
- la moitié inférieure qui délimite l'intersection des $|\mathcal{T}|$ demi-espaces orientés vers le haut (en vert dans le tableau 6.1),
- *l'équateur*, défini comme le cycle d'arêtes appartenant à la fois à la moitié supérieure et à la moitié inférieure (en rouge dans le tableau 6.1).

La projection sur le plan ab du domaine est exactement le *domaine des centres* (ou *arc center domain* en anglais) calculé dans les travaux de Fisk [1986], Kovalevsky [1990], Pham [1992], Worring et Smeulders [1995] et Coeurjolly *et al.* [2004]. Le bord du domaine des centres est la projection sur le plan ab de l'équateur.

De plus, comme l'illustrent les deux premières colonnes du tableau 6.1, la projection sur le plan ab de la moitié supérieure du domaine est la partie du diagramme de Voronoï de \mathcal{S} d'ordre $|\mathcal{S}| - 1$, noté $(|\mathcal{S}| - 1)\text{-}V(\mathcal{S})$, qui est située à l'intérieur du domaine des centres. De même, la projection sur le plan ab de la moitié inférieure du domaine est la partie du diagramme de Voronoï de \mathcal{T} d'ordre 1, noté $1\text{-}V(\mathcal{T})$, qui est située à l'intérieur du domaine des centres. Fisk [1986] a montré comment obtenir le domaine des centres à partir de l'intersection de ces deux diagrammes.

Cependant le calcul de ces diagrammes n'est pas nécessaire. En effet, le domaine associé à un point de \mathcal{S} et un point de \mathcal{T} est l'intersection d'un demi-espace orienté vers le bas et d'un demi-espace orienté vers le haut. Sa projection sur le plan ab est un demi-plan. Résoudre le problème de séparation par un cercle revient donc, dans le plan ab , à calculer l'intersection de $|\mathcal{S}| \cdot |\mathcal{T}|$ demi-plans. Cette approche, appréciée pour sa simplicité, est cependant coûteuse en temps de calcul. Coeurjolly *et al.* [2004] l'évalue en $\mathcal{O}(|\mathcal{S}| \cdot |\mathcal{T}| \log(|\mathcal{S}| \cdot |\mathcal{T}|))$. C'est pourquoi certains auteurs ont cherché à ne pas prendre en compte toutes les contraintes. Kovalevsky [1990] supprime certaines contraintes au cours du calcul (à la manière de l'algorithme de Megiddo) mais aucune borne de complexité n'est donnée. Coeurjolly *et al.* [2004] proposent un prétraitement qui extrait d'une courbe discrète les points les plus contraignants. Le nombre de points retenus est borné supérieurement par $\mathcal{O}(n^{\frac{2}{3}})$, où n est la taille de la courbe discrète. D'où une complexité en $\mathcal{O}(n^{4/3} \log n)$.

6.1.2.3 Problème de séparation linéaire 3D

Soit $\mathcal{S}' = \{s'(s'_x, s'_y, s'_x{}^2 + s'_y{}^2)\}$ (respectivement $\mathcal{T}' = \{t'(t'_x, t'_y, t'_x{}^2 + t'_y{}^2)\}$) l'ensemble des points de \mathcal{S} (respectivement \mathcal{T}) projetés sur le parabolôïde d'équation $z = x^2 + y^2$. Le problème de séparation de \mathcal{S} et \mathcal{T} par un cercle devient dans l'espace xyz un problème de séparation de \mathcal{S}' et \mathcal{T}' par un plan (section 2.2.2). Cette transformation mène à un algorithme en $\mathcal{O}(|\mathcal{S}| + |\mathcal{T}| \log(|\mathcal{S}| + |\mathcal{T}|))$ proposé par O'Rourke *et al.* [1986]. Cet algorithme calcule l'enveloppe convexe des points de \mathcal{S}' , notée $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$, et des points de \mathcal{T}' , notée $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$. Le numéro 3 placé en exposant rappelle que cette enveloppe convexe est calculée dans un espace à trois dimensions. Pour supprimer toute ambiguïté, le numéro 2 sera aussi placé en exposant lorsqu'une enveloppe convexe est calculée dans un espace à deux dimensions.

Comme l'illustrent les deux dernières colonnes du tableau 6.1, la projection sur le plan xy de l'enveloppe convexe supérieure de \mathcal{S}' , notée $\mathcal{E}_{sup}^3(\mathcal{S}')$, est la triangulation de Delaunay de \mathcal{S} d'ordre $|\mathcal{S}| - 1$, notée $(|\mathcal{S}| - 1)\text{-}T(\mathcal{S})$. De même, la projection sur le plan xy de l'enveloppe convexe inférieure de \mathcal{T}' , notée $\mathcal{E}_{inf}^3(\mathcal{T}')$, est la triangulation de Delaunay de \mathcal{T} d'ordre 1, notée $1\text{-}T(\mathcal{T})$.

[Kim, 1984] a proposé un algorithme géométrique très simple qui s'interprète directement dans l'espace xyz . Il part de l'observation que si \mathcal{S} et \mathcal{T} sont séparables par un cercle, il existe toujours un cercle séparant passant par deux points de \mathcal{S} , ces deux points étant forcément sommets de $\mathcal{E}^2(\mathcal{S})$. Dans l'espace xyz , cela signifie que si \mathcal{S}' et \mathcal{T}' sont séparables par un plan, il existe toujours un plan séparant passant par deux points de \mathcal{S}' . Ces deux points sont forcément sommets de $\mathcal{E}_{sup}^3(\mathcal{S}')$. Or, les sommets de $\mathcal{E}_{sup}^3(\mathcal{S}')$ projetés sur le plan xy correspondent exactement aux sommets de $\mathcal{E}^2(\mathcal{S})$.

Le cœur de l'algorithme de Kim [1984] consiste à décider si un cercle passant par deux points $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$ est séparant ou non. La décision est prise à la suite de considérations sur les angles que forment les points de \mathcal{S} et \mathcal{T} par rapport à s_1 et s_2 . Soient deux points $s \in \mathcal{S}$ et $t \in \mathcal{T}$ se trouvant du même côté de la droite (s_1s_2) . Les points s, s_1, s_2 sont circulairement séparables du point t si et seulement si l'angle $\widehat{s_1ss_2}$ est plus grand que l'angle $\widehat{s_1ts_2}$. Dans l'espace xyz , s_1', s_2', s', t' sont respectivement les projetés de s_1, s_2, s, t sur le parabolôïde d'équation $z = x^2 + y^2$. Soit Π le plan perpendiculaire au plan xy et passant par s_1' et s_2' (fig. 6.2). Les points s', s_1', s_2' sont linéairement séparables du point t' si et seulement si l'angle diédral que forme le plan passant par s_1', s_2' et s' avec Π est inférieur à celui que forme le plan passant par s_1', s_2' et t' avec Π (fig. 6.2).

L'algorithme de [Kim, 1984] ne requiert pas de structure de données sophistiquée. Deux listes de points suffisent. Il procède par balayages des listes et calcul de prédicats pouvant être évalués en nombres entiers et de manière exacte. Malgré sa complexité en temps quadratique [Kim et Anderson, 1984], il mérite une attention particulière car il représente un bon compromis entre rapidité d'exécution et facilité d'implémentation.

Nous proposons ci-après un nouvel algorithme de reconnaissance d'arcs de cercle. Lui aussi traduit dans l'espace xyz , le problème de séparation de \mathcal{S} et \mathcal{T} par un cercle en un problème de séparation de \mathcal{S}' et \mathcal{T}' par un plan. Ce choix s'explique par élimination. D'une part, les approches par programmation linéaire 3D [O'Rourke *et al.*, 1986; Sauer, 1993; Damaschke, 1995] font appel à l'algorithme de Megiddo [1984] qui n'est pas utilisable en

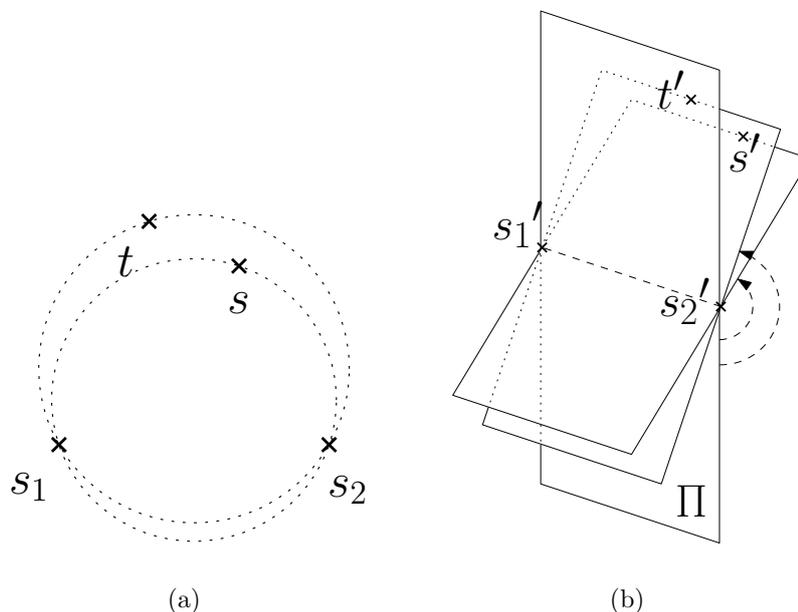


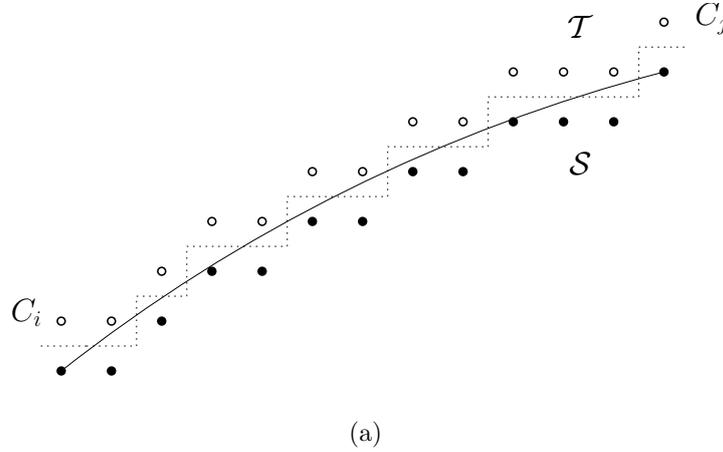
FIG. 6.2 – Interprétation géométrique du test des angles dans l’algorithme de Kim [1984]; Kim et Anderson [1984].

pratique (section 2.1.3) et d’autre part, les approches par programmation linéaire 2D [Fisk, 1986; Kovalevsky, 1990; Pham, 1992; Worrington et Smeulders, 1995; Coeurjolly *et al.*, 2004] sont algorithmiquement trop coûteuses. Nous proposons un algorithme qui utilise des outils classiques de géométrie algorithmique (section 6.2) et qui peut être optimisé de façon à atteindre une complexité en temps linéaire (section 6.3).

6.2 Reconnaissance d’arcs de cercle

Soit une partie de contour $C_{i|j}$ supposée convexe. Le cas où elle est concave est symétrique. D’après la définition 1.19, une partie $C_{i|j}$ est un arc de cercle discret si et seulement si les points de $X_{i|j}$ et ceux de $\bar{X}_{i|j}$ sont séparables par un cercle euclidien. Soit \mathcal{S} l’ensemble des points à encercler et \mathcal{T} l’ensemble des points à ne pas encercler. Comme $C_{i|j}$ est convexe par hypothèse, $\mathcal{S} = X_{i|j}$ et $\mathcal{T} = \bar{X}_{i|j}$ (fig. 6.3). Ainsi, $|\mathcal{S}|$ et $|\mathcal{T}|$ sont de l’ordre de $\mathcal{O}(n)$, n étant la taille de la partie $C_{i|j}$.

Dans la suite de cette section, un algorithme qui résout le problème de séparation de \mathcal{S} et \mathcal{T} par un cercle est détaillé. Comme les algorithmes de la section 6.1.2.3, le problème de séparation de \mathcal{S} et \mathcal{T} par un cercle est traduit dans l’espace xyz en un problème de séparation de \mathcal{S}' et \mathcal{T}' par un plan.


 FIG. 6.3 – Une partie C_{ij} convexe qui s'avère être un arc de cercle.

6.2.1 Calcul de $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$ et $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$

Décider si \mathcal{S}' et \mathcal{T}' sont oui ou non séparables par un plan est équivalent à décider si leur enveloppe convexe, $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$ et $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$, sont oui ou non séparables par un plan.

Pour calculer $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$ et $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$ à partir de \mathcal{S}' et \mathcal{T}' , différentes méthodes existent (section 2.3.1). Les techniques “gift-wrapping”, “quickhull”, “divide-and-conquer”, etc. [Preparata et Shamos, 1985] fonctionnent en dimension quelconque. En dimension trois, l'approche incrémentale avec graphe de conflit [de Berg *et al.*, 2000] est plus simple. Quelle que soit la méthode parmi celles citées, le calcul de $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$ et $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$ est en $\mathcal{O}(n \log n)$.

En outre, il n'est pas nécessaire de calculer complètement les enveloppes convexes $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$ et $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$. Seules la partie supérieure de l'enveloppe convexe de \mathcal{S}' , $\mathcal{E}_{sup}^3(\mathcal{S}')$, et la partie inférieure de l'enveloppe convexe de \mathcal{T}' , $\mathcal{E}_{inf}^3(\mathcal{T}')$, suffisent.

Les projections de $\mathcal{E}_{sup}^3(\mathcal{S}')$ et $\mathcal{E}_{inf}^3(\mathcal{T}')$ sur le plan xy sont respectivement la triangulation de Delaunay de \mathcal{S} d'ordre $|\mathcal{S}| - 1$ et la triangulation de Delaunay de \mathcal{T} d'ordre 1. Dans le cas général, le calcul de $(|\mathcal{S}| - 1)\text{-}T(\mathcal{S})$ et $1\text{-}T(\mathcal{T})$ est en $\mathcal{O}(n \log n)$ [Preparata et Shamos, 1985; de Berg *et al.*, 2000].

L'ordre intrinsèque des points de \mathcal{S} , qui correspondent aux points intérieurs d'une partie de contour, entraîne une diminution de la complexité du calcul de $(|\mathcal{S}| - 1)\text{-}T(\mathcal{S})$. Cette amélioration exploite le fait que les sommets de $(|\mathcal{S}| - 1)\text{-}T(\mathcal{S})$ sont exactement ceux de $\mathcal{E}^2(\mathcal{S})$. Or, $\mathcal{E}^2(\mathcal{S})$ est calculé en $\mathcal{O}(n)$ grâce à l'algorithme de Melkman [1987] et $(|\mathcal{S}| - 1)\text{-}T(\mathcal{S})$ est déduit de $\mathcal{E}^2(\mathcal{S})$ en $\mathcal{O}(n)$ à l'aide d'un algorithme relativement complexe [Aggarwal *et al.*, 1989].

De plus, on peut remarquer que les points de \mathcal{S} (respectivement \mathcal{T}) forment une ligne polygonale dont les segments sont des arêtes de $(|\mathcal{S}| - 1)\text{-}T(\mathcal{S})$ (respectivement $1\text{-}T(\mathcal{T})$). Les triangulations de Delaunay $(|\mathcal{S}| - 1)\text{-}T(\mathcal{S})$ et $1\text{-}T(\mathcal{T})$ peuvent donc être calculées, en exploitant ces contraintes, en $\mathcal{O}(n)$ [Chin et Wang, 1999].

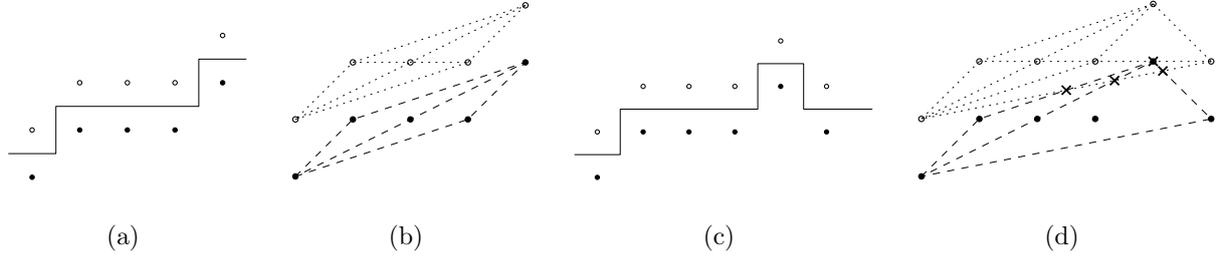


FIG. 6.4 – \mathcal{S} (en noir) and \mathcal{T} (en blanc) sont séparables par une droite en (a) et (b) et par un cercle en (c) et (d). \mathcal{G} , qui est l'intersection entre $(|\mathcal{S}| - 1)\text{-}T(\mathcal{S})$ (tirets) et $1\text{-}T(\mathcal{T})$ (pointillé), a 0 sommet en (b), mais 4 en (d).

6.2.2 Calcul de la hauteur entre $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$ et $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$

La fonction de hauteur entre deux polyèdres convexes renvoie la distance verticale signée (mesurée le long de l'axe z) entre les deux polyèdres convexes aux points appartenant à l'intersection de la projection sur le plan xy des deux polyèdres.

Le minimum de la fonction de hauteur entre $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$ et $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$ est noté h . Pour calculer h , l'algorithme naïf consiste à calculer le graphe planaire \mathcal{G} qui est l'intersection entre $(|\mathcal{S}| - 1)\text{-}T(\mathcal{S})$ et $1\text{-}T(\mathcal{T})$ (fig. 6.4). If $|\mathcal{G}| = 0$, alors $\mathcal{E}^2(\mathcal{S}) \cap \mathcal{E}^2(\mathcal{T}) = \emptyset$. Dans ce cas dégénéré où la fonction de hauteur n'est définie nulle part, \mathcal{S}' et \mathcal{T}' sont séparables par un plan qui est orthogonal au plan xy . Cela signifie que \mathcal{S} et \mathcal{T} sont séparables par un cercle de rayon infini, c'est-à-dire une droite (fig. 6.4.a et fig. 6.4.b). Si $|\mathcal{G}| > 0$, il reste à calculer la fonction de hauteur en chaque sommet de \mathcal{G} et à déterminer le minimum (fig. 6.4.c et fig. 6.4.d).

Si $h > 0$, alors $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$ et $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$, donc \mathcal{S}' et \mathcal{T}' , sont séparables par un plan. Il en résulte que \mathcal{S} and \mathcal{T} sont séparables par un cercle. En revanche, si $h \leq 0$, alors $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$ et $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$ s'intersectent et \mathcal{S}' et \mathcal{T}' ne sont pas séparables par un plan. Il en résulte que \mathcal{S} et \mathcal{T} ne sont pas séparables par un cercle.

Si \mathcal{S} and \mathcal{T} sont circulairement séparables, les paramètres d'un cercle séparant peuvent être calculés. La fonction de hauteur atteint un minimum positif en un sommet s_h de \mathcal{G} . La droite normale au plan xy passant par s_h traverse :

- soit une arête de $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$ et une arête $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$ (fig. 6.5.a),
- soit un sommet de $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$ et une face de $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$ (fig. 6.5.c).

Ces quatre points définissent deux plans parallèles de support (en tireté dans les fig. 6.5.a et c). Leur intersection avec le paraboloidé d'équation $z = x^2 + y^2$ se projette dans le plan xy en un anneau (en tireté dans les fig. 6.5.b et d). Des coefficients a , b et c d'un troisième plan parallèle (en pointillé dans les fig. 6.5.a et c), encadré par les deux plans parallèles de support, se déduisent les paramètres d'un cercle séparant de centre (a, b) et de rayon $r^2 = a^2 + b^2 - c$. Ce troisième plan se projette sur le plan xy en un cercle de même centre que l'anneau, mais de rayon intermédiaire, compris entre le plus petit et le plus grand rayon de l'anneau (en pointillé dans les fig. 6.5.b et d).

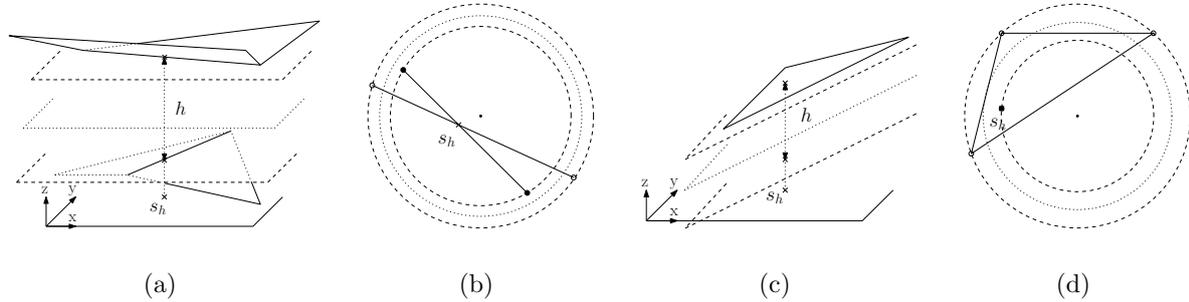


FIG. 6.5 – Calcul des paramètres d'un cercle séparant à partir des plans parallèles de support passant par une arête de $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$ et une arête de $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$ en (a) et (b), un sommet de $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$ et une face de $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$ en (c) et (d).

La complexité de cet algorithme est $\mathcal{O}(n^2)$ car \mathcal{G} a au plus n^2 sommets. Cependant, il est possible de tirer parti de la convexité de la fonction de hauteur pour concevoir un algorithme en $\mathcal{O}(n \log n)$ (voir [Preparata et Shamos, 1985, pages 310-315] pour une description complète).

6.2.3 Algorithme et complexité

L'algorithme 20 résume les résultats de la section.

Algorithme 20 : Reconnaissance d'arcs de cercle

Entrées : \mathcal{S} et \mathcal{T}

Sorties : Un cercle \mathcal{C} séparant \mathcal{S} de \mathcal{T} s'il existe

- 1 Calculer \mathcal{S}' et \mathcal{T}' , ensemble des projections des points de \mathcal{S} et \mathcal{T} sur le paraboloïde d'équation $z = x^2 + y^2$;
 - 2 Calculer $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$ et $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$ [de Berg *et al.*, 2000];
 - 3 Calculer la hauteur h entre $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$ et $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$ [Preparata et Shamos, 1985, pages 310-315];
 - 4 **si** $h > 0$ **alors**
 - 5 Calculer les coefficients a , b et c , d'un plan parallèle et entre les deux plans parallèles de support de $\mathcal{E}^3(\mathcal{S}')$ et $\mathcal{E}^3(\mathcal{T}')$;
 - 6 **retourner** \mathcal{C} de centre (a, b) et de rayon $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$;
 - 7 **sinon**
 - 8 **retourner** vide;
-

La complexité en $\mathcal{O}(n \log n)$ de cet algorithme de reconnaissance d'arcs de cercle est meilleure que la complexité quadratique des méthodes précédentes [Fisk, 1986; Kovalevsky, 1990; Coeurjolly *et al.*, 2004] qui ne traitent que des projections bidimensionnelles du domaine tridimensionnel. De plus, un prétraitement inspiré de Coeurjolly *et al.* [2004] borne

la taille des ensembles à séparer de façon à atteindre une complexité en $\mathcal{O}(n)$, comme nous le voyons dans la section suivante.

6.3 Optimisation

Soit une partie C_{ij} d'un contour C supposée convexe. Le cas où est elle concave est symétrique. Le problème de séparation par un cercle consiste donc à englober les points intérieurs $\mathcal{S} = X_{i|j}$, mais pas les points extérieurs $\mathcal{T} = \bar{X}_{i|j}$ (fig. 6.6.a). Le coût algorithmique du test de séparation dépend de la taille des ensembles à séparer, en l'occurrence \mathcal{S} et \mathcal{T} . L'objectif de cette section est de déterminer deux nouveaux ensembles $\hat{\mathcal{S}}$ et $\hat{\mathcal{T}}$ tels que :

- $\hat{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{S}$, $\hat{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{T}$,
- \mathcal{S} et \mathcal{T} sont circulairement séparables si et seulement si $\hat{\mathcal{S}}$ et $\hat{\mathcal{T}}$ sont circulairement séparables.

6.3.1 Calcul de $\hat{\mathcal{S}}$

Un cercle, étant convexe, ne peut cerner les sommets de l'enveloppe convexe de $X_{i|j}$ sans cerner tous les points de $X_{i|j}$. Ainsi, $\hat{\mathcal{S}}$ est défini comme étant l'ensemble des sommets de $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$ (fig. 6.6.b).

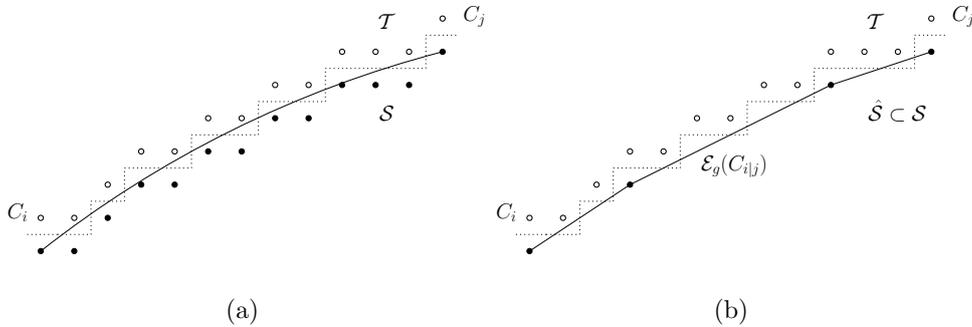


FIG. 6.6 – Un arc de cercle C_{ij} (a). Les points de $\hat{\mathcal{S}}$ sont les sommets de $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$ (b).

6.3.2 Calcul de $\hat{\mathcal{T}}$

L'ensemble $\hat{\mathcal{T}}$ peut ne contenir que quelques points de $\bar{X}_{i|j}$. Ces points sont caractérisés indépendamment pour chaque arête e de $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$ supposée être, sans perte de généralité, dans le premier octant. Le premier point de e est désigné par X_g , le second, par X_d . Comme e est dans le premier octant, les points qui se trouvent au-dessus de la droite $(X_g X_d)$, appelés commodément *points extérieurs*, comme les points de $\bar{X}_{i|j}$, sont des points du fond, appartenant à \bar{X} (fig. 6.7.a). Soit $\vec{u} = (a, b)$ où $a, b \in \mathbb{Z}$ et $\text{pgcd}(a, b) = 1$, tel que $(X_d - X_g) = g \cdot \vec{u}$ où $g \in \mathbb{Z}$ (fig. 6.7.a).

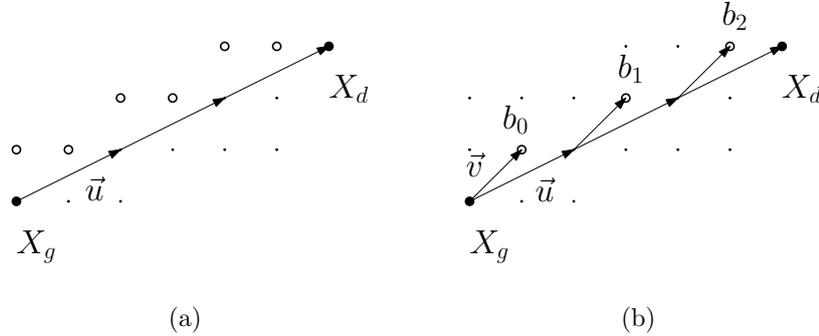


FIG. 6.7 – Le segment $[X_g X_d]$, ses points extérieurs en (a) et ses points de Bézout, numérotés, en (b).

Les points de Bézout sont les points extérieurs les plus proches du segment $[X_g X_d]$ (fig. 6.7.b) :

Définition 6.1. Un point de Bézout b_q d'un segment $[X_g X_d]$ est défini comme un point de \mathbb{Z}^2 tel que $X_g \vec{b}_q = \vec{v} + q\vec{u}$ où $q \in [0, g]$, $\vec{v} = (c, d)^T$ et $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 1$.

Grâce à la convexité des cercles, $\hat{\mathcal{T}}$ peut ne contenir que les points de Bézout des arêtes de $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$ [Coeurjolly *et al.*, 2004] :

Lemme 6.1. Une courbe continue fermée convexe Λ qui contient $[X_g X_d]$ mais aucun de ses points de Bézout, ne contient aucun autre point extérieur.

Démonstration. Soit une courbe continue fermée convexe Λ qui contient à la fois X_g, X_d et un point extérieur, noté E . Le triangle formé par les points X_g, X_d et E , contient au moins un point de Bézout (voir le paragraphe 2.4 et la fig. 6.8). Étant convexe, Λ ne peut contenir un triangle sans contenir tous les points se trouvant à l'intérieur de ce triangle. Par conséquent, Λ ne peut contenir X_g, X_d et E , sans contenir au moins un point de Bézout du segment $[X_g X_d]$, ce qui prouve le lemme. \square

Le lemme 6.1 montre que $\hat{\mathcal{T}}$ peut ne contenir que les points de Bézout de $[X_g X_d]$. Ceux-ci sont au nombre de g . Or ce nombre peut être arbitrairement grand. Pour ne retenir qu'un nombre de points constant par segment, Coeurjolly *et al.* [2004] choisissent le point de Bézout le plus proche de la médiatrice de $[X_g X_d]$ (définition 1 [Coeurjolly *et al.*, 2004]). Cette proposition n'est pas motivée. Tous les points de Bézout contribuent au domaine des centres des cercles qui séparent $[X_g X_d]$ de ses points de Bézout (fig. 6.9.a). Ainsi, considérer uniquement le point de Bézout le plus proche de la médiatrice de $[X_g X_d]$ n'est pas suffisant en l'état.

L'astuce est d'introduire deux points supplémentaires à ne pas encercler dont il est certain qu'ils appartiennent à \bar{X} . Comme le segment $[X_g X_d]$ est une arête de $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$, les points p_g and p_d tels que $p_g = X_g - \vec{u}$ and $p_d = X_d + \vec{u}$ appartiennent à \bar{X} (fig. 6.9.b).

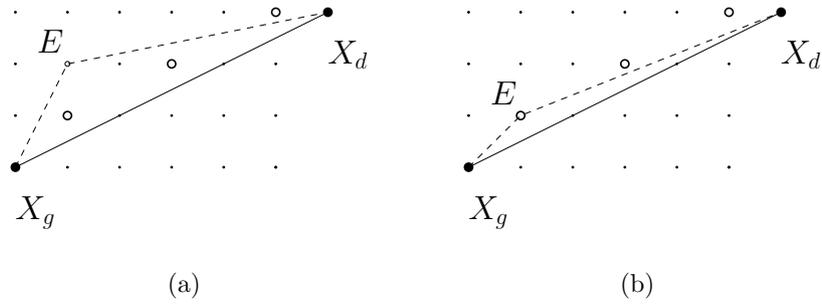


FIG. 6.8 – Illustration du lemme 6.1 : une forme euclidienne convexe ne peut contenir X_g , X_d et E , sans contenir au moins un point de Bézout du segment $[X_g X_d]$.

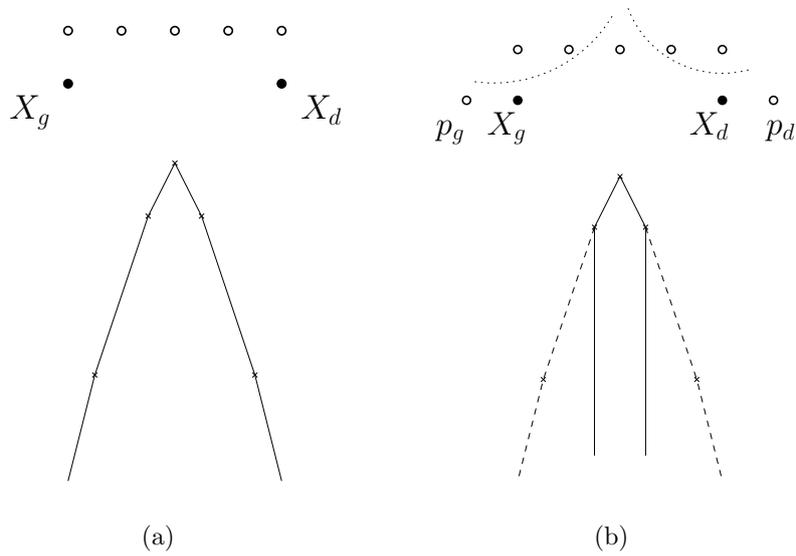


FIG. 6.9 – (a) Le domaine des centres des cercles qui séparent $[X_g X_d]$ de ses points de Bézout possède autant d'arêtes que le segment possède de points de Bézout. (b) En revanche, le domaine des centres des cercles qui séparent $[X_g X_d]$ de ses points de Bézout, ainsi que de p_g et p_d , possède un nombre constant d'arêtes.

Ces points apportent des contraintes supplémentaires de sorte que les points de Bézout du segment $[X_g X_d]$ qui ne se trouvent pas au milieu ne contribuent pas au domaine des centres des cercles qui séparent $[X_g X_d]$ de ses points de Bézout, de p_g et de p_d (fig. 6.9.b)

Le théorème 6.1 formalise ces observations :

Théorème 6.1. *Le domaine des centres des cercles contenant $[X_g X_d]$, mais ne contenant ni p_g , ni p_d , ni ses points de Bézout, possède au plus quatre sommets.*

Démonstration. Le domaine des centres est un polygone convexe. Ses sommets sont les centres de cercles passant (section 6.1.2.2) :

- soit par deux points devant être encerclés et un point ne devant pas être encerclé (cas 2-1),
- soit par un point devant être encerclé et deux points ne devant pas être encerclés (cas 1-2).

Comme seuls X_g et X_d doivent être encerclés, tous les cercles du cas 2-1 passent par X_g et X_d . S'il y a k points de Bézout, il n'y a que k cercles du cas 2-1 potentiellement séparants. Parmi eux, seul celui qui passe par le point de Bézout le plus proche de la médiatrice de $[X_g X_d]$, noté b_m est séparant. Le centre de ce cercle est un sommet du domaine des centres (fig. 6.10.a).

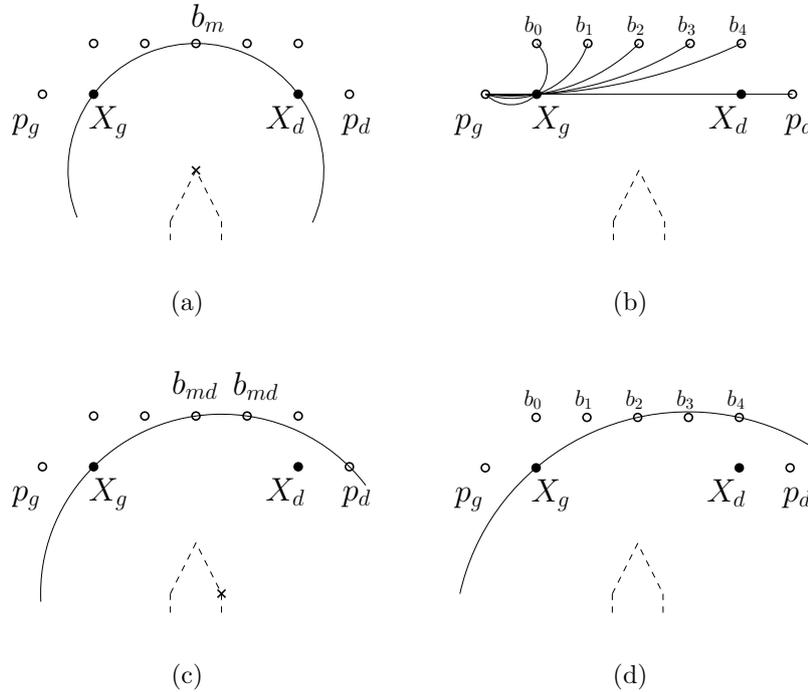


FIG. 6.10 – Détermination des cercles séparants et non séparants passant par X_g (théorème 6.1).

6.3. Optimisation

Il reste à considérer les cercles du cas 1-2. Soit ils passent par X_g , soit ils passent par X_d . S'il y a k points de Bézout, il y a C_{k+2}^2 cercles passant par X_g et deux points à ne pas encercler. Le cas où ils passent par X_d , parfaitement symétrique, n'est pas traité.

Il y a $k + 1$ cercles passant X_g et p_g . L'un est dégénéré et les autres ne contiennent pas X_d (fig. 6.10.b). De même, il y a $k + 1$ cercles passant X_g et p_d . Mais parmi ceux-ci, seul celui qui passe par X_g , p_d et le ou les points de Bézout les plus proches de la médiatrice de $[X_g p_d]$, notés b_{md} est séparant. Le centre de ce cercle est aussi un sommet du domaine des centres (fig. 6.10.c).

Il y a C_k^2 cercles passant par X_g et deux points de Bézout. Cependant, les cercles qui passent par deux points de Bézout non consécutifs, b_q et $b_q + \Delta$ avec $\Delta > 1$, ne sont pas séparants car ils contiennent les points de Bézout dont l'indice est compris entre q et $q + \Delta$ (fig. 6.10.d).

Il reste donc k cercles, désignés par \mathcal{C}_q , passant par X_g et deux points de Bézout consécutifs b_q et b_{q+1} et potentiellement séparants. Ils ne contiennent ni p_g , ni aucun autre point de Bézout. La question est de savoir lesquels contiennent X_d mais ne contiennent pas p_d .

Les points d'intersection i_q entre les cercles \mathcal{C}_q et la droite $(X_g X_d)$ sont ordonnés le long de la droite $(X_g X_d)$. \mathcal{C}_q est séparant si i_q se trouve entre X_d et p_d (fig. 6.11).

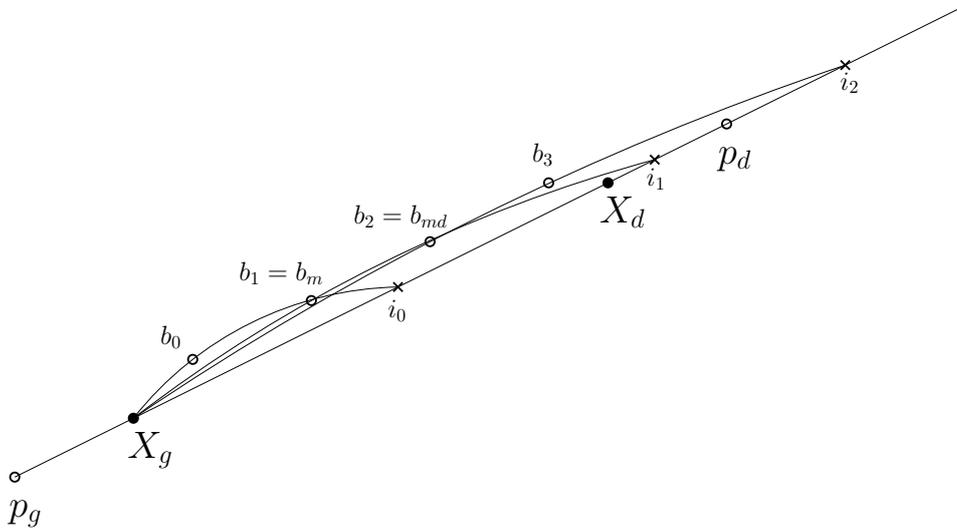


FIG. 6.11 – Les cercles séparants passent par les points de Bézout centraux (théorème 6.1).

Si $q < m$, \mathcal{C}_q ne contient pas X_d , tandis que si $q \geq m$, \mathcal{C}_q contient X_d . De même, si $q < md$, \mathcal{C}_q ne contient pas p_d , tandis que si $q \geq md$, \mathcal{C}_q contient p_d . Il est résulte que si $m \leq q \leq md$, \mathcal{C}_q est séparant (fig. 6.11). Or, étant donné la position des points X_g , X_d et p_d , $md = m$ ou $md = m + 1$. Dans le premier cas, il n'y pas de cercle du cas 2-1 passant par X_g et deux points de Bézout qui soit séparant. Dans le second cas, parmi les cercles du cas 2-1 passant par X_g et deux points de Bézout, seul celui passant par X_g , b_m et b_{md} est séparant. Le centre de ce cercle est encore un sommet du domaine des centres.

Comme tous les cercles possibles ont été énumérés, il s'avère que le nombre de sommets du domaine des centres est indépendant du nombre k de points de Bézout. Il est égal à 3 ou 4. De plus, parmi les points de Bézout, seuls ceux les plus proches de la médiatrice du segment $[X_g X_d]$ contribuent au domaine des centres. \square

Le théorème 6.1 signifie qu'un cercle qui contient $[X_g X_d]$ mais ne contient ni les points de Bézout du segment $[X_g X_d]$ les plus proches de sa médiatrice, ni les points p_g et p_d , ne contient aucun autre point de Bézout.

Ainsi, pour une arête $[X_g X_d]$ de $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$, quatre points extérieurs au plus doivent être ajoutés à $\hat{\mathcal{T}}$.

Si le segment $[X_g X_d]$ n'a qu'un point de Bézout, seul ce point est ajouté à $\hat{\mathcal{T}}$. Si le segment $[X_g X_d]$ a plus d'un point de Bézout et si parmi eux il y en a un qui se trouve exactement sur la médiatrice du segment, alors ce dernier est ajouté à $\hat{\mathcal{T}}$. Enfin, si le segment $[X_g X_d]$ a plus d'un point de Bézout et si aucun ne se trouve exactement sur la médiatrice du segment, les deux points de Bézout les plus proches de la médiatrice du segment sont ajoutés à $\hat{\mathcal{T}}$. Les points supplémentaires p_g et p_d sont inutiles, car redondants avec les points de Bézout retenus de l'arête de $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$ précédente ou suivante (fig. 6.12).

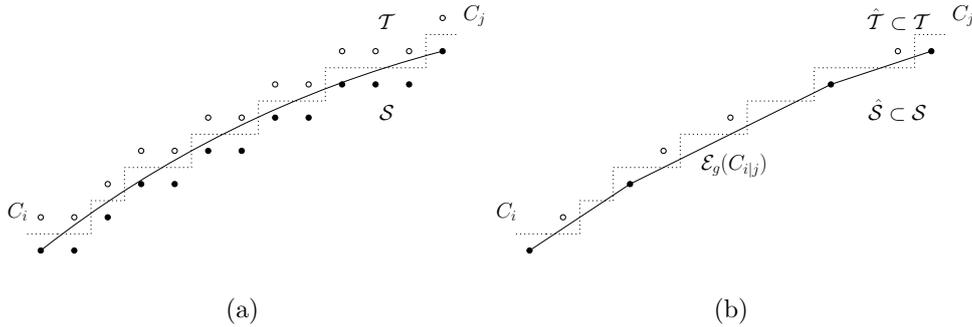


FIG. 6.12 – Un arc de cercle C_{ij} (a). Les points de $\hat{\mathcal{S}}$ et $\hat{\mathcal{T}}$ sont ceux à séparer par un cercle pour la reconnaissance (b).

6.3.3 Algorithme et complexité

L'algorithme 21 calcule $\hat{\mathcal{S}}$ et $\hat{\mathcal{T}}$. La première étape, ligne 2, est le calcul de $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$. Cela s'effectue en $\mathcal{O}(n)$, grâce à l'algorithme de Melkman [1987] par exemple. La seconde étape, lignes 4 à 13, est le calcul des points de Bézout de chaque arête de $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$ et le stockage de certains d'entre eux. Leurs coordonnées sont déterminées à partir des vecteurs \vec{u} , \vec{v} et de l'entier g . Ces calculs sont réalisés en $\mathcal{O}(\log(\max(|a|, |b|)))$ en appliquant l'algorithme d'Euclide étendu à la pente des arêtes (algorithme 5, section 2.4.1). Une fois g , \vec{u} et \vec{v} connus, trouver les points de Bézout les plus proches de la médiatrice de l'arête est effectué séquentiellement en $\mathcal{O}(g)$. En définitive, l'ensemble de l'algorithme s'exécute en $\mathcal{O}(n)$.

Le lemme 6.2 borne la taille de $\hat{\mathcal{S}}$ et $\hat{\mathcal{T}}$.

Algorithme 21 : Calcul de $\hat{\mathcal{S}}$ et $\hat{\mathcal{T}}$, ensembles réduits pour la reconnaissance d'arcs de cercle

Entrées : $C_{i|j}$
Sorties : $\hat{\mathcal{S}}$ and $\hat{\mathcal{T}}$

- 1 $\hat{\mathcal{S}} = \hat{\mathcal{T}} = \emptyset$;
- 2 Calculer $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$;
- 3 Ajouter à $\hat{\mathcal{S}}$ le premier sommet de $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$;
- 4 **pour chaque** arête e de $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$ **faire**
- 5 Soient X_g et X_d les sommets de e ;
- 6 Ajouter X_d à $\hat{\mathcal{S}}$;
- 7 **si** le segment $[X_g X_d]$ n'a qu'un point de Bézout **alors**
- 8 Ajouter ce point de Bézout à $\hat{\mathcal{T}}$;
- 9 **sinon**
- 10 **si** le segment $[X_g X_d]$ a un point de Bézout qui se trouve exactement sur sa médiatrice **alors**
- 11 Ajouter ce point de Bézout à $\hat{\mathcal{T}}$;
- 12 **sinon**
- 13 Ajouter à $\hat{\mathcal{T}}$ les deux points de Bézout les plus proches de la médiatrice du segment $[X_g X_d]$;
- 14 **retourner** $\hat{\mathcal{S}}$ et $\hat{\mathcal{T}}$;

Lemme 6.2. *Soit un polygone convexe dont les sommets sont des points de \mathbb{Z}^2 localisés dans un carré de taille $N \times N$. Le nombre de ses sommets est borné par $\mathcal{O}(N^{2/3})$.*

Une preuve simple de ce lemme se trouve dans Har-Peled [1998] (lemme 3.1, p. 359). Des résultats similaires se trouvent dans Acketa et Zunić [1995].

Ce lemme implique que $|\hat{\mathcal{S}}|$ est borné par $\mathcal{O}(n^{2/3})$. Or, $|\hat{\mathcal{T}}|$ est du même ordre que $|\hat{\mathcal{S}}|$ selon le lemme 6.1 et le théorème 6.1. Par conséquent, $m = |\hat{\mathcal{S}}| + |\hat{\mathcal{T}}|$ est borné par $\mathcal{O}(n^{2/3})$. Ainsi, le problème de séparation de $|\hat{\mathcal{S}}|$ et $|\hat{\mathcal{T}}|$ par un cercle est résolu par l'algorithme 20 en $\mathcal{O}(m \log m)$, ce qui mène à une borne au pire cas de $\mathcal{O}(n)$.

En outre, $\hat{\mathcal{S}}$ et $\hat{\mathcal{T}}$ peuvent être calculés de manière plus élégante. Quand $C_{i|j}$ est convexe (respectivement concave), les points de $\hat{\mathcal{S}}$, à encercler, sont les sommets de $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$ (respectivement $\mathcal{E}_d(\bar{X}_{i|j})$). Or, nous avons vu au chapitre 5 que les sommets de $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$ (respectivement $\mathcal{E}_d(\bar{X}_{i|j})$) peuvent être retrouvés à partir des points d'appui à gauche (respectivement à droite) des segments maximaux à l'avant et/ou à l'arrière, servant au calcul du polygone réversible respectant les parties convexes et concaves. De la même manière, les points de Bézout associés à une arête de $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$ (respectivement $\mathcal{E}_d(\bar{X}_{i|j})$) peuvent être retrouvés à partir des points d'appui à droite (respectivement à gauche) (section 4.3).

Quand $C_{i|j}$ n'est ni convexe, ni concave, les points de $\hat{\mathcal{S}}$, à encercler, sont alternativement des sommets de $\mathcal{E}_g(X_{i|j})$ dans les parties convexes et des sommets de $\mathcal{E}_d(\bar{X}_{i|j})$ dans les parties concaves, c'est-à-dire les sommets du polygone de longueur minimale (section 5.4.1). Les points de $\hat{\mathcal{T}}$, à ne pas encercler, sont les points de Bézout les plus proches de la médiatrice de chaque arête de ce polygone et peuvent donc être trouvés en même temps que $\hat{\mathcal{S}}$. C'est ainsi que $\hat{\mathcal{S}}$ et $\hat{\mathcal{T}}$ peuvent être calculés en un seul balayage de $C_{i|j}$ par un segment de droite maximal à l'avant et/ou à l'arrière.

6.4 Mesure de circularité

Une mesure de circularité doit quantifier la similarité entre une partie de contour et le modèle de l'arc de cercle. En anglais, des termes variés recouvrent la même idée : “compactness” [Haralick, 1974; Kim et Anderson, 1984], “roundness” [Roy et Zhang, 1992; Swanson *et al.*, 1995; de Berg *et al.*, 1998; Agarwal *et al.*, 2000; Chen, 2002; Bose et Morin, 2004], “out-of-roundness” [Le et Lee, 1991; Swanson *et al.*, 1995; Gass *et al.*, 1998] et “circularity” [Rivlin, 1979; Pegna et Guo, 1998]. Le terme *circularité* semble le plus approprié car il rappelle le modèle avec lequel les données sont comparées.

6.4.1 Inconvénients des mesures existantes

Une mesure de circularité classique est $4\pi A/P^2$ où A est l'aire de l'objet et P son périmètre. Elle est égale au rapport entre l'aire de l'objet et l'aire du cercle de même périmètre que l'objet. L'équivalent discret de cette mesure a été introduit par Haralick [1974]. Depuis, elle a été largement utilisée, sous des formes variées et dans de nombreuses applications (voir [Ritter et Cooper, 2009] pour une revue de la littérature sur cette mesure).

Un premier problème soulevé par le calcul de cette mesure est l'estimation de l'aire et du périmètre de l'objet discret. L'aire peut être estimée par le nombre de points appartenant à l'objet. Cette estimation est convergente [Klette et Žunić, 2000] et précise en pratique [Ritter et Cooper, 2009]. En revanche, si le périmètre est approché par le nombre de points du bord ou la longueur du contour, le rapport obtenu quantifie la similarité avec un octogone au lieu de quantifier une ressemblance au cercle [Bottema, 2000; Ritter et Cooper, 2009]. Même si ce biais est réduit grâce à une estimation convergente du périmètre [Coeurjolly et Klette, 2004], cette mesure de circularité présente de nombreuses limitations :

- elle n'est pas comprise entre 0 et 1, 1 pour tous les cercles discrets,
- elle est dépendante de la résolution,
- elle n'est pas calculable sur des parties de contour,
- elle n'est pas capable de fournir les paramètres d'un cercle proche du contour.

Par sa simplicité, cette mesure peut être utilisée comme une approximation rapide et grossière de la circularité d'un contour, mais dans le cas général, une autre mesure est nécessaire.

Les techniques basées sur un ajustement statistique ne souffrent pas de toutes ces limitations. En vision par ordinateur [Landau, 1987; Thomas et Chan, 1989; Berman, 1989], un cercle est en général ajusté à un ensemble de pixels par la méthode des moindres carrés, que ce soit dans un but de localisation, de détection ou de reconnaissance de cercles. En métrologie [Le et Lee, 1991; Roy et Zhang, 1992; Swanson *et al.*, 1995; Pegna et Guo, 1998; Gass *et al.*, 1998; Shakarji et Clement, 2004], un échantillon de points est prélevé sur le bord d'une pièce circulaire par une CMM (Coordinate Measurement Machine). Pour décider si sa qualité est satisfaisante, un cercle est ajusté à l'échantillon de points. La norme généralement utilisée et recommandée par le American National Standards Institute (ANSI standard, B89.3.1-1972, R2002) est celle de Chebyshev, même si la norme euclidienne est parfois utilisée [Drezner *et al.*, 2002]. Étant donnée une certaine norme, la circularité de l'échantillon de points est définie à partir du coût de l'ajustement. Pour la norme de Chebyshev, comme pour la norme euclidienne, la quantité minimisée est exprimée soit en terme de rayon, soit en terme d'aire (pour plus de précisions, lire [Pegna et Guo, 1998]). Comme l'illustre le tableau 6.2, ces quatre instances du problème de l'ajustement d'un cercle à un ensemble de points sont étudiées depuis longtemps.

Les techniques d'ajustement ont l'avantage de pouvoir être appliquées sur des parties de contour et de pouvoir fournir les paramètres d'un cercle proche des données. De plus, le coût d'ajustement peut être normalisé par l'aire ou le rayon du cercle obtenu afin d'avoir une mesure indépendante de la résolution. Ces techniques semblent intéressantes pour toutes ces raisons. En revanche, elles ne sont pas exactes, car le maximum n'est pas atteint pour tous les cercles ou arcs de cercle discret.

Satisfaire cette propriété n'est pas aisé. Les techniques naïves qui consistent à trouver, par un calcul simple, un point supposé être centre d'un cercle séparant l'objet et le fond ne sont pas valides. Par exemple, le centre de gravité des points de l'objet est parfois supposé être le centre d'un cercle séparant [Bottema, 2000]. Mais la fig. 6.13 montre que certains points du fond sont plus près du centre de gravité des points de l'objet que certains points de l'objet, même si l'objet en question est un disque discret.

	norme euclidienne	norme de Chebyshev
rayons	<i>mean square error</i> [Landau, 1987; Berman, 1989] [Drezner <i>et al.</i> , 2002]	<i>minimum width annulus</i> [Le et Lee, 1991; Roy et Zhang, 1992] [Swanson <i>et al.</i> , 1995; Pegna et Guo, 1998] [Agarwal <i>et al.</i> , 2000; Chen, 2002] [Shakarji et Clement, 2004]
aires	<i>modified mean square error</i> [Thomas et Chan, 1989]	<i>minimum area annulus</i> [Le et Lee, 1991; Gass <i>et al.</i> , 1998]

TAB. 6.2 – Articles principaux dans lesquels est traité le problème de l'ajustement d'un cercle à un ensemble de points.

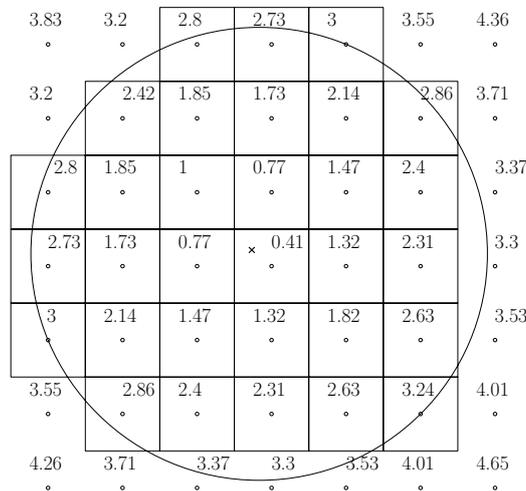


FIG. 6.13 – Dans chaque pixel est indiquée la distance de son centre au centre de gravité (localisé par une croix) d'un disque discret. Certains pixels du fond sont plus proches (3.2) du centre de gravité que certains pixels du disque (3.24).

De même, le cercle euclidien englobant les points de l'objet est parfois supposé être un cercle séparant [Chaudhuri et Rosenfeld, 1998], ce qui n'est pas vrai en général [Kim et Anderson, 1984].

Cependant, les algorithmes de reconnaissance (décrits au paragraphe 6.1) calculent les paramètres d'un cercle proche des données lorsque la partie de contour traitée est un arc de cercle. Ainsi, la conception et le calcul d'une mesure de circularité dont le maximum est atteint pour tous les arcs de cercles devrait s'inspirer de ces algorithmes de reconnaissance.

La mesure proposée dans la section suivante relie donc les algorithmes de reconnaissance basés sur le problème de séparation par un cercle et les techniques d'ajustement afin de combiner tous les avantages.

6.4.2 Définition de la mesure

Une mesure de circularité doit vérifier les propriétés suivantes :

1. être indépendante aux transformations rigides,
2. avoir une valeur comprise entre 0 et 1, 1 pour un arc de cercle discret,
3. être intuitive. Par exemple, elle doit augmenter à mesure que le nombre de côtés des polygones réguliers augmente. Elle doit augmenter à mesure que l'élongation des ellipses diminue. Elle doit augmenter à mesure que le bruit diminue. La mesure doit aussi être robuste. Par exemple, la circularité d'un cercle bruité doit être plus élevée que la mesure d'un triangle ou d'un carré, si le bruit est limité et n'affecte pas l'objet entier.

Une partie de contour C_{ij} est supposée sans perte de généralité convexe. L'objectif est de définir et calculer une mesure de circularité sur C_{ij} qui respecte les propriétés énoncées ci-dessus.

Ajuster un cercle aux points de C_{ij} à l'aide des techniques d'ajustement ne mène pas à une mesure correcte car la propriété 2 n'est pas vérifiée. Dans le but de concevoir une mesure satisfaisant la propriété 2, deux ensembles de points, notés \mathcal{S} et \mathcal{T} , sont extraits de C_{ij} , de telle sorte que \mathcal{S} et \mathcal{T} sont séparables par un cercle si et seulement si C_{ij} est un arc de cercle. Sans perte de généralité, \mathcal{S} est supposé être l'ensemble à encercler tandis que \mathcal{T} est celui à ne pas encercler.

Soit l'anneau \mathbf{A} de centre ω , de rayon interne r_1 et de rayon externe r_2 , tel que le cercle externe englobe tous les points de \mathcal{S} et tel que le cercle interne n'englobe aucun point de \mathcal{T} :

$$\begin{aligned} & \text{Chercher } \mathbf{A} \text{ qui minimise } (r_2^2 - r_1^2) \\ & \text{sujet aux contraintes suivantes} \\ & \begin{cases} \forall S \in \mathcal{S}, (S_x - \omega_x)^2 + (S_y - \omega_y)^2 \leq r_2^2 \\ \forall T \in \mathcal{T}, (T_x - \omega_x)^2 + (T_y - \omega_y)^2 > r_1^2 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Ce problème est plus général, mais peut être réduit au problème classique de calcul du plus petit anneau englobant un ensemble de points (case située en bas à droite du

tableau 6.2). C'est pourquoi la méthode proposée relie les techniques de reconnaissance basées sur le problème de séparation par un cercle et les techniques d'ajustement.

Dans l'espace xyz , les cercles internes et externes d'un anneau correspondent à deux plans parallèles. L'aire signée d'un anneau est donnée par la distance, mesurée le long de l'axe z , entre les deux plans parallèles. L'anneau d'aire minimale tel que le cercle externe englobe tous les points de \mathcal{S} et tel que le cercle interne n'englobe aucun point de \mathcal{T} correspond à la paire de plans parallèles séparés par une distance, mesurée le long de l'axe z , égale à la hauteur entre $\mathcal{E}(\mathcal{S}')$ et $\mathcal{E}(\mathcal{T}')$. Si $\mathcal{E}(\mathcal{S}')$ et $\mathcal{E}(\mathcal{T}')$ sont disjoints, \mathcal{S} et \mathcal{T} sont séparables par un cercle, l'aire de l'anneau est négative. Si, au contraire, $\mathcal{E}(\mathcal{S}')$ et $\mathcal{E}(\mathcal{T}')$ s'intersectent, \mathcal{S} et \mathcal{T} ne sont pas séparables par un cercle, l'aire de l'anneau est positive et égale à la hauteur de l'imbrication. Ce calcul de hauteur est étudié et résolu au paragraphe 6.2.2 (algorithme 20).

La mesure de circularité de \mathcal{S} et \mathcal{T} est le rapport des aires des cercles interne et externe :

$$circ(\mathcal{S}, \mathcal{T}) = \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad (6.4)$$

La mesure de circularité de $C_{i|j}$ est définie à l'aide de la mesure de circularité de \mathcal{S} et \mathcal{T} . Comme $C_{i|j}$ est supposé être convexe, $\mathcal{S} = X_{i|j}$ et $\mathcal{T} = \bar{X}_{i|j}$.

$$\begin{cases} circ(C_{i|j}) = circ(\mathcal{S}, \mathcal{T}) & \text{si } (circ(\mathcal{S}, \mathcal{T}) < 1) \\ circ(C_{i|j}) = 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.5)$$

Si l'aire signée $\pi(r_2^2 - r_1^2)$ de \mathbf{A} est strictement inférieure à 0, $X_{i|j}$ et $\bar{X}_{i|j}$ sont séparables par un cercle et $circ(X_{i|j}, \bar{X}_{i|j}) > 1$, mais si $\pi(r_2^2 - r_1^2) \geq 0$, $X_{i|j}$ et $\bar{X}_{i|j}$ ne sont pas séparables par un cercle et $circ(X_{i|j}, \bar{X}_{i|j}) \leq 1$ (fig. 6.14). Par conséquent, la mesure de circularité définie par l'équation 6.5 satisfait la propriété 2. Elle est aussi, par définition, robuste aux transformations rigides (propriété 1). La section suivante présente plusieurs résultats expérimentaux indiquant que les valeurs obtenues pour différents contours sont en adéquation avec l'intuition que l'on peut avoir d'une mesure de circularité (propriété 3).

6.4.3 Résultats expérimentaux

Par définition, la mesure de circularité proposée est d'une part, robuste aux transformations rigides et d'autre part, maximale et égale à 1 pour tout arc de cercle discret, quels que soient son centre et son rayon. Dans cette section, nous mesurons la circularité de différentes classes de contours : des polygones réguliers, des ellipses et des cercles bruités. Ces contours sont ceux d'objets discrets. Ces objets discrets ont été générés à partir de la discrétisation de Gauss d'objets euclidiens (fig. 6.15).

Le bruit, quand il est ajouté, suit le modèle de Kanungo *et al.* [2000] (section 1.3.4). La fig. 6.15 donne deux exemples de résultats de ce modèle appliqué à un objet discret issu de la discrétisation d'un cercle.

Les polygones, ellipses, cercles euclidiens sont générés implicitement à partir de leurs paramètres. En outre, de ces paramètres se déduit le plus petit anneau englobant à par-

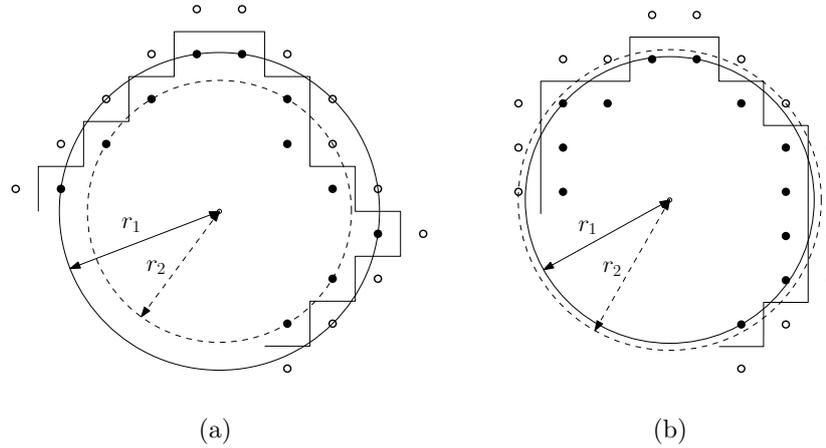


FIG. 6.14 – Deux parties de contour sont dessinées. \mathcal{S} (respectivement \mathcal{T}) est l'ensemble de ronds noirs (respectivement de ronds blancs). En (a), l'anneau d'aire minimale a une aire positive et la mesure de circularité égale $8.5/12.5 = 0.68$. En revanche, en (b), il a une aire négative et la mesure de circularité est égale à 1, car la partie de contour représentée est un arc de cercle.

			
ellipse $a = 25, b = 50$	heptagone régulier $p = 1325$	cercle bruité $r = 30, \alpha = 1$	cercle bruité $r = 30, \alpha = 15$

FIG. 6.15 – Discrétisation de Gauss d'une ellipse, d'un heptagone régulier et de deux cercles. La taille visuelle des figures ne reflète pas leur taille réelle. La quantité de bruit ajoutée aux deux dernières figures selon le modèle de Kanungo *et al.* [2000] dépend du paramètre α . Les contours utilisés dans le calcul de la circularité sont les contours de ces objets.

tir duquel une circularité de référence est calculée. Cette vérité-terrain sert à étudier la précision de la circularité mesurée sur les contours des objets discrets.

6.4.3.1 Polygones réguliers

Une centaine de polygones discrets a été générée. Ils sont obtenus par discrétisation de Gauss de polygones réguliers euclidiens de périmètre fixe. Leur nombre de côtés varie de 3 à 103, tandis que leur périmètre est approximativement égal à 1325 unités. Un périmètre si grand permet d'observer des polygones ayant un grand nombre de côtés. La fig. 6.16 montre que les valeurs obtenues sont proches de la vérité-terrain. La circularité augmente à mesure que le nombre de côtés augmente. Elle converge vers 1 pour des polygones ayant un nombre important de côtés et ressemblant à des cercles. La circularité des polygones réguliers ayant entre 30 et 85 côtés est alternativement égale à 1 et à une valeur légèrement inférieure à 1 (environ 0.99). En outre, les polygones réguliers ayant plus de 85 côtés ont été discrétisés en un même objet discret, qui s'avère être un cercle discret de circularité 1.

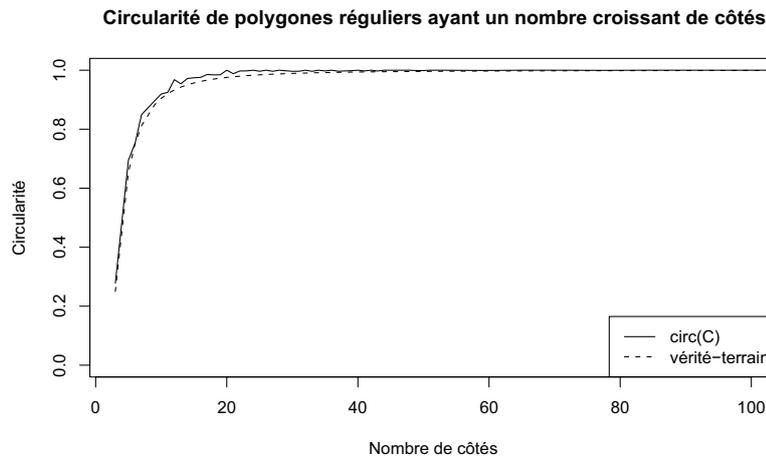


FIG. 6.16 – Évolution de la circularité en fonction du nombre de côtés de polygones réguliers.

6.4.3.2 Ellipses

Une centaine d'ellipses discrètes ont été générées. Elles sont obtenues par discrétisation de Gauss d'ellipses euclidiennes. Les paramètres a et b représentent respectivement les petit et grand demi-axes des ellipses. La circularité a été mesurée pour des ellipses d'élongation a/b croissante. La fig. 6.17 montre que la courbe obtenue est presque confondue avec la vérité-terrain.

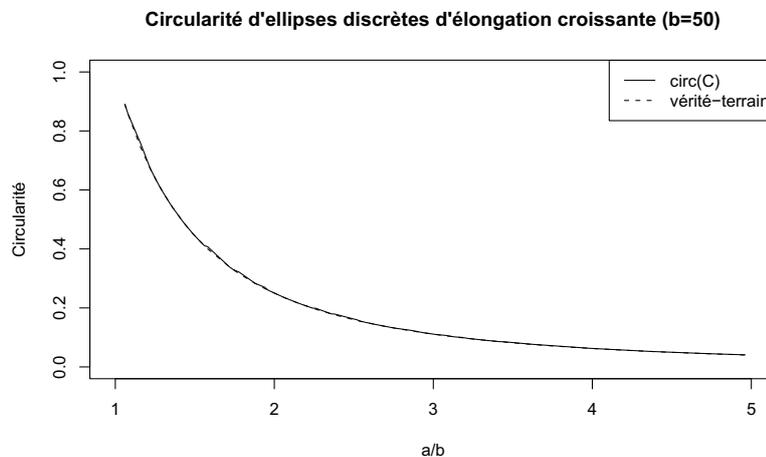


FIG. 6.17 – Évolution de la circularité en fonction de l'élongation a/b des ellipses. Les ellipses sont centrées en l'origine et leurs axes sont parallèles à ceux du plan. $b = 50$ et a est compris entre 10 et 50, de sorte que l'élongation varie entre 1 et 5.

6.4.3.3 Cercles bruités

Une centaine de cercles discrets bruités a été générée. Ces contours sont obtenus par discrétisation de Gauss de cercles de rayon 30, puis par ajout de bruit selon le modèle de Kanungo *et al.* [2000].

La fig. 6.18 montre que la circularité diminue à mesure que le bruit augmente. Cette évolution n'est pas régulière, mais en dents de scie, parce que les points basculent de l'objet au fond et inversement de manière aléatoire. Même avec un bruit important ($\alpha = 15$), la circularité est supérieure à 0,8, ce qui correspond approximativement à la circularité d'un heptagone. Ainsi, la mesure proposée est suffisamment robuste pour différencier les cercles bruités obtenus par le modèle de Kanungo *et al.* [2000] à $\alpha = 15$, des polygones réguliers ayant un nombre de côtés inférieur à 7, tels que les triangles ou les carrés. La comparaison est sensée malgré la différence de périmètre car la mesure ne dépend pas de la taille.

La mesure proposée peut être appliquée en l'état à des parties de contours, à la place du contour entier. La mesure est exacte pour tous les arcs de cercle issus d'un même cercle. Mais plus le cercle est bruité, plus la circularité des petits arcs de cercle s'écarte de celle du contour entier.

Pour se donner une idée de la précision de la circularité des arcs de cercles bruités en fonction de leur longueur, environ 7500 arcs de cercle sont générés. Cinquante cercles bruités sont d'abord générés ($r = 30, \alpha = 15$) (fig. 6.15). Ensuite, pour chaque cercle et pour chaque longueur entre 20 et 180 points environ, un arc de cercle est extrait aléatoirement. La fig. 6.19 montre que les valeurs obtenues sur des arcs de cercle de 20 à 45 points (< 90 degrés) ne peuvent être considérées comme précises, car l'intervalle de confiance à 95% est large (jusqu'à 0.1 point de circularité). Cependant il rétrécit à mesure que la longueur

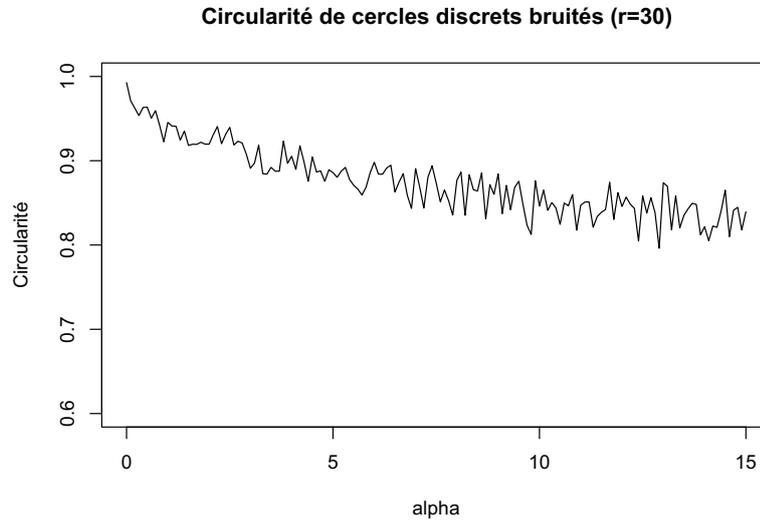


FIG. 6.18 – Évolution de la mesure de circularité en fonction de la quantité de bruit ajoutée (contrôlée par le paramètre α) à des cercles discrets de rayon 30.

de l'arc augmente. Les valeurs obtenues sur des arcs de cercle de plus de 45 points (> 90 degrés) peuvent être considérées comme précises, car l'intervalle de confiance à 95% est réduit (environ 0.01 point de circularité).

6.5 Conclusion

Dans la définition que nous avons adoptée, les points intérieurs et extérieurs d'un arc de cercle sont séparables par un cercle. Ce choix permet d'exploiter des résultats de géométrie algorithmique connus, pour le test, la reconnaissance ou la description par mesure de circularité.

Nous avons proposé un algorithme original de reconnaissance d'arcs de cercle. Il procède par séparation des points intérieurs et extérieurs par un cercle. En projetant verticalement ces points sur un paraboloïde elliptique, ce problème de séparation circulaire dans un espace à deux dimensions est transformé en un problème de séparation linéaire dans un espace à trois dimensions. Ce problème est résolu en deux étapes. La première consiste à calculer les enveloppes convexes tridimensionnelles de ces deux ensembles de points. La seconde consiste à calculer la hauteur entre ces enveloppes de façon à savoir si elles s'intersectent ou non. Ces opérations sont réalisées par des algorithmes classiques de géométrie algorithmique. De plus, la taille des deux ensembles de points à séparer peut être réduite de façon à obtenir un algorithme linéaire en temps.

En revanche, l'algorithme proposé n'est pas incrémental. Pour considérer une donnée supplémentaire, il est nécessaire de reprendre tout le calcul. A cause de cet inconvénient,

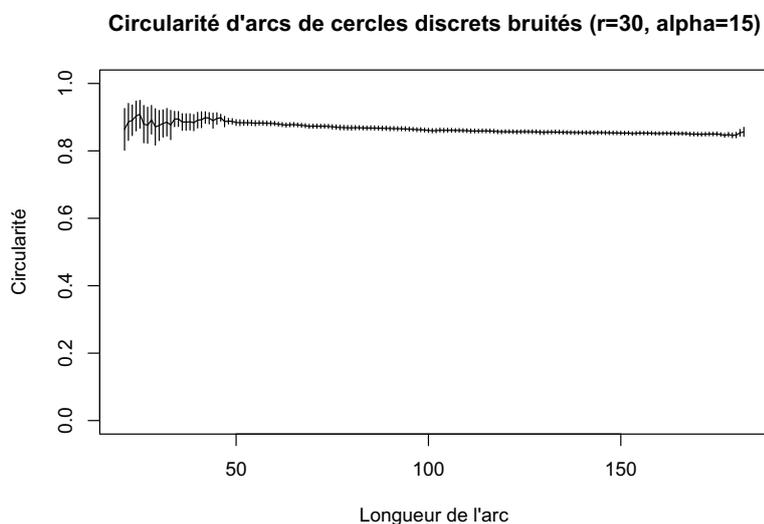


FIG. 6.19 – Cinquante cercles bruités sont générés ($r = 30$, $\alpha = 15$) (fig. 6.15). Pour chaque cercle et pour chaque longueur entre 20 et 180 points, un arc de cercle est extrait aléatoirement. La moyenne des mesures de circularité, ainsi que les barres d'erreur à 95%, sont représentées en fonction de la longueur des arcs de cercle.

décomposer un contour en arcs de cercle maximaux s'avère algorithmiquement coûteux. Dans le chapitre 7, ce problème est contourné grâce à l'analyse d'une version contrainte du problème de reconnaissance pour lequel une solution incrémentale et rapide à calculer existe.

Nous avons adapté aux parties de contour une mesure de circularité d'un ensemble de points utilisée en métrologie. Le plus petit anneau dont le cercle externe englobe les points intérieurs et dont le cercle interne n'englobe aucun point extérieur (ou inversement) est calculé à l'aide des mêmes outils que ceux utilisés pour la reconnaissance des arcs de cercle. Notre mesure de circularité est définie alors comme le rapport des aires du cercle interne et externe de cet anneau. Contrairement aux mesures traditionnelles, elle possède les propriétés suivantes :

- elle s'applique aussi bien aux contours qu'à des parties de contours,
- elle est robuste aux transformations rigides,
- elle est facile à interpréter et à prévoir,
- elle est comprise entre 0 et 1, vaut 1 pour tous les arcs de cercle et uniquement ceux-ci,
- elle fournit les paramètres d'un cercle euclidien dont le contour de la discrétisation de Gauss est le cercle discret traité si la mesure de circularité vaut 1 et les paramètres d'un cercle de meilleure approximation sinon.

*Version contrainte du problème de la reconnaissance
d'arcs de cercle*

Sommaire

7.1	Définition et calcul des P-enveloppes	172
7.1.1	P -disque et \overline{P} -disque	172
7.1.2	P -enveloppes	174
7.2	Séparation par des cercles passant par un point donné	177
7.2.1	Points de support	178
7.2.2	Algorithme de séparation	179
7.2.3	Exemple de déroulement	180
7.3	Décomposition d'un contour en arcs de cercle	183
7.3.1	Principe de l'algorithme	183
7.3.2	Exemple de déroulement	185
7.3.3	Complexité et résultats expérimentaux	187
7.4	Conclusion	190

Dans ce chapitre, une version contrainte du problème de la reconnaissance d’arcs de cercle est étudiée : la reconnaissance d’arcs de cercle passant par un point donné. Ce problème est une généralisation du problème de la reconnaissance de segments de droite. Nous montrons d’abord que l’algorithme de reconnaissance de segments de droite par séparation décrit au paragraphe 4.2.1 s’applique sans restriction aux arcs de cercle passant par un point donné. Nous utilisons ensuite ce résultat pour résoudre le problème plus complexe de la reconnaissance d’arcs de cercle. Ce chapitre est une description détaillée d’une partie du travail présenté à *15-th IAPR International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery* (DGCI’09) [Roussillon *et al.*, 2009b].

7.1 Définition et calcul des P -enveloppes

Dans cette section, l’objectif est de poser les définitions nécessaires à l’application de notre algorithme de séparation de deux ensembles de points par une droite (section 4.2.1) à la séparation de deux ensembles de points par un cercle passant par un point donné. Pour cela, nous introduisons les notions de P -disque et \overline{P} -disque, pour imiter celle de demi-plan orienté (définition 1.14), puis nous proposons la notion de P -enveloppe, qui est une généralisation de l’enveloppe convexe (définition 1.12).

7.1.1 P -disque et \overline{P} -disque

Tout le travail de ce chapitre porte sur une classe de disques contraints composée de P -disques et \overline{P} -disques. Un P -disque est un disque passant par un point fixe P_0 , donné *a priori*. Par deux points quelconques a et b (différents de P_0 et non confondus) passe un et un seul P -disque (fig. 7.1.a). Le bord d’un P -disque est appelé naturellement P -cercle (un P -disque est fermé par convention, c’est-à-dire qu’il contient le P -cercle). Le complémentaire d’un P -disque est noté \overline{P} -disque (fig. 7.1.b).

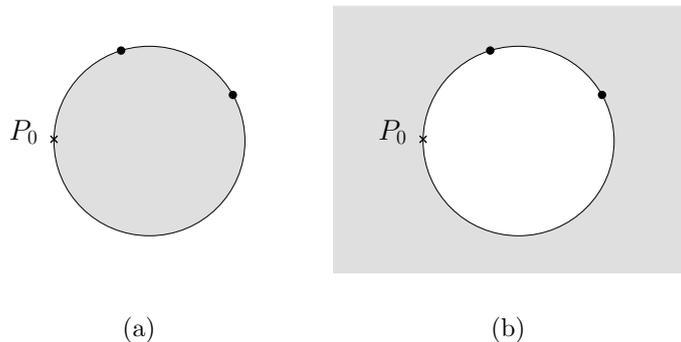


FIG. 7.1 – Étant donné un point fixe P_0 , représenté par une croix, par deux points quelconques, non confondus et distincts de P_0 , représentés par des ronds noirs, passe un P -disque et un \overline{P} -disque.

7.1. Définition et calcul des P -enveloppes

Les P -disques et \overline{P} -disques s'interprètent directement dans l'espace xyz (section 2.2.2). Un P -disque (respectivement \overline{P} -disque) passant par deux points a et b est la projection sur le plan xy de l'intersection entre le parabolöide elliptique d'équation $z = x^2 + y^2$ et le demi-espace qui se trouve au-dessous (respectivement au-dessus) du plan passant par a' , b' et P_0' , les projetés sur le parabolöide des points a , b et P_0 (fig. 7.2).

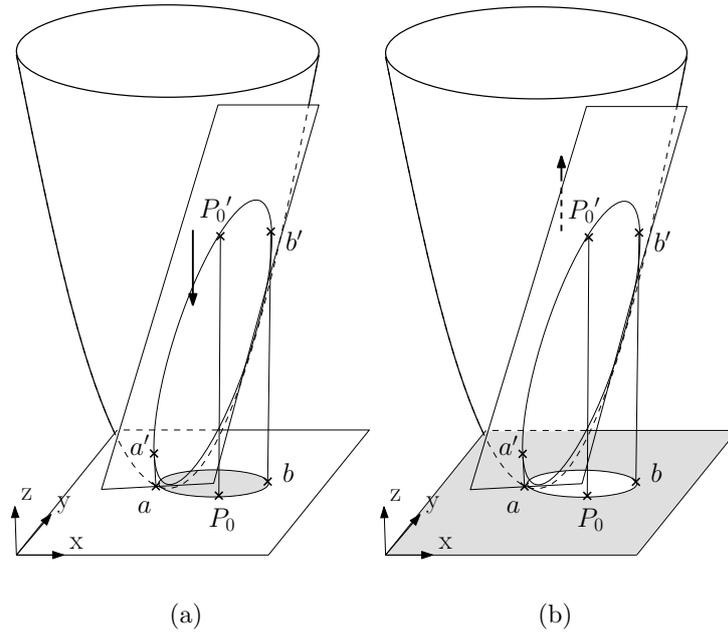


FIG. 7.2 – Un P -disque (respectivement \overline{P} -disque) est la projection sur le plan xy d'un demi-espace situé au-dessous (respectivement au-dessus) d'un plan intersectant le parabolöide elliptique d'équation $z = x^2 + y^2$.

En pratique, étant donnés trois points a , b et c orientés dans le sens des aiguilles d'une montre, décider si c appartient au P -disque passant par a et b revient, dans l'espace xyz (section 2.2.2), à décider si le projeté c' du point c se trouve au-dessous du plan passant par les projetés P_0' , a' et b' des points P_0 , a et b . Ceci est équivalent à évaluer l'expression de l'équation 7.1 :

$$\begin{vmatrix} P_{0x} & P_{0y} & P_{0x}^2 + P_{0y}^2 & 1 \\ a_x & a_y & a_x^2 + a_y^2 & 1 \\ b_x & b_y & b_x^2 + b_y^2 & 1 \\ c_x & c_y & c_x^2 + c_y^2 & 1 \end{vmatrix} \leq 0 \quad (7.1)$$

Or, le prédicat de l'équation 7.1 est équivalent à celui-ci, plus simple à calculer :

$$\left| \begin{array}{ccc} a_x - P_{0x} & b_x - P_{0x} & c_x - P_{0x} \\ a_y - P_{0y} & b_y - P_{0y} & c_y - P_{0y} \\ (a_x - P_{0x})^2 + (a_y - P_{0y})^2 & (b_x - P_{0x})^2 + (b_y - P_{0y})^2 & (c_x - P_{0x})^2 + (c_y - P_{0y})^2 \end{array} \right| \geq 0 \quad (7.2)$$

Dans l'espace xyz , quand le projeté du point P_0 est rejeté à l'infini dans la direction $O\vec{z}$, le prédicat de l'équation 7.1 est équivalent au prédicat d'orientation classique de trois points dans le plan (section 2.3.1, équation 1.1) :

$$\left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_x & a_y & a_x^2 + a_y^2 & 1 \\ b_x & b_y & b_x^2 + b_y^2 & 1 \\ c_x & c_y & c_x^2 + c_y^2 & 1 \end{array} \right| \leq 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{ccc} a_x & a_y & 1 \\ b_x & b_y & 1 \\ c_x & c_y & 1 \end{array} \right| \leq 0 \quad (7.3)$$

7.1.2 P -enveloppes

A l'aide des notions précédentes de P -disque et \overline{P} -disque, nous proposons la définition suivante de P -enveloppe :

Définition 7.1 (P -enveloppe). *La P -enveloppe d'un ensemble de points \mathcal{S} de \mathbb{R}^2 est l'intersection de tous les P -disques et \overline{P} -disques contenant \mathcal{S} .*

Des exemples de P -enveloppes d'un ensemble de points sont dessinés dans la fig. 7.3. Quand le point fixe P_0 est à l'intérieur de l'enveloppe convexe de l'ensemble \mathcal{S} , la P -enveloppe de \mathcal{S} n'est pas définie, car aucun P -disque, ni aucun \overline{P} -disque passant par P_0 ne contient \mathcal{S} (fig. 7.3.c). En revanche, quand P_0 est à l'extérieur de l'enveloppe convexe de l'ensemble \mathcal{S} , la P -enveloppe de \mathcal{S} n'a pour sommets que des points de \mathcal{S} (fig. 7.3.a et fig. 7.3.b). Dans l'espace xyz , quand le projeté P_0' du point P_0 est rejeté à l'infini dans la direction $O\vec{z}$, tous les plans passant par P_0' sont perpendiculaires au plan xy et la P -enveloppe de \mathcal{S} est égale à l'enveloppe convexe de \mathcal{S} (fig. 7.3.d).

Dans l'espace xyz (section 2.2.2), l'intersection de tous les demi-espaces contenant \mathcal{S}' et dont le bord passe par P_0' donne un cône (fig. 7.4). Le bord d'une P -enveloppe est composée d'arcs de cercle qui sont la projection sur le plan xy de l'intersection entre le parabolöide elliptique et les plans portés par les faces du cône issu de P_0' (fig. 7.4).

Une extension du concept de P -enveloppe est nécessaire pour son utilisation dans un algorithme de séparation par des P -cercles.

Soit une séquence \mathcal{S} de points de \mathbb{R}^2 formant une ligne polygonale simple, notée $\Sigma(\mathcal{S})$.

Les P -enveloppes interne et externe sont définies à l'image des enveloppes convexes partielles à gauche et à droite (définition 1.15).

Définition 7.2 (P -enveloppe interne et externe). *Étant donné un point fixe P_0 , la P -enveloppe externe (respectivement interne) de \mathcal{S} est une ligne composée d'arcs de cercle vérifiant les conditions suivantes :*

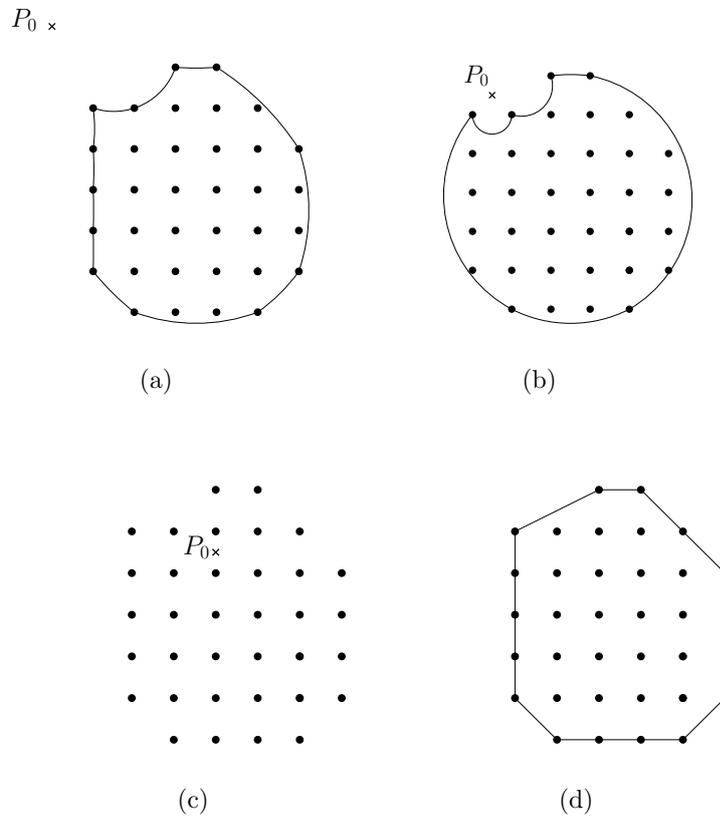


FIG. 7.3 – Quatre exemples de P -enveloppes.

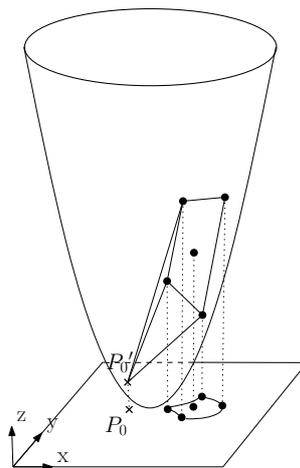


FIG. 7.4 – Interprétation de la P -enveloppe par un cône dans l'espace xyz .

- les points de discontinuité entre deux arcs de cercle, appelés sommets, sont des points de \mathcal{S} ; le premier et le dernier sommets étant le premier et le dernier point de \mathcal{S} ,
- ses arcs entre deux sommets s_k et s_l se trouvent sur le bord d'un :
 - P -disque si le demi-plan à droite défini par s_k et s_l contient P_0
 - \overline{P} -disque si le demi-plan à droite défini par s_k et s_l ne contient pas P_0
 contenant (respectivement ne contenant pas) les points de \mathcal{S} entre s_k et s_l , ainsi que le sommet suivant s_m .

Dans le plan xy , il est nécessaire de distinguer le cas des P -disques et celui des \overline{P} -disques, mais dans l'espace xyz , ces deux objets sont la projection de l'intersection d'un demi-espace avec le parabolôïde elliptique. Ainsi, étant donnés trois points a , b et c , décider si c appartient ou non :

- au P -disque passant par a et b si le demi-plan à droite défini par a et b contient P_0 ,
- au \overline{P} -disque passant par a et b si le demi-plan à droite défini par a et b ne contient pas P_0 ,

revient à évaluer l'expression de l'équation 7.1.

La fig. 7.5 montre un exemple de P -enveloppe externe et interne sur une même séquence de points.

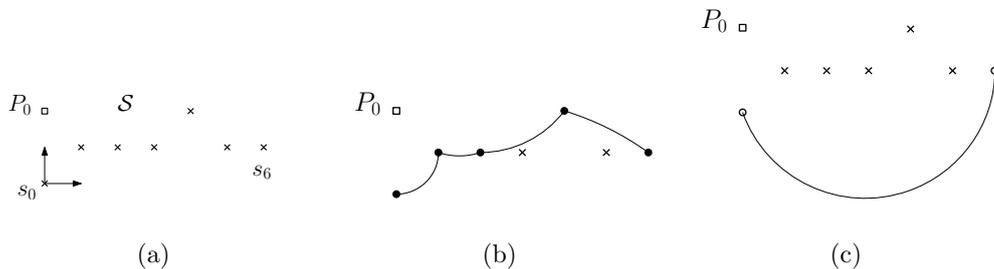


FIG. 7.5 – P -enveloppe externe (b) et interne (c) d'une séquence de points \mathcal{S} (a).

Les P -enveloppes externe et interne se calculent facilement par un algorithme semblable à celui du balayage de Graham (section 2.3.1). Seul le prédicat d'orientation change. L'algorithme 22 utilise le prédicat de l'équation 7.1 pour le calcul de la P -enveloppe externe d'une séquence de points (il suffit de remplacer "vrai" par "faux", ligne 6, pour le calcul de la P -enveloppe interne).

La fig. 7.6 illustre les premières étapes du calcul de la P -enveloppe externe des points de la fig. 7.5.a. La P -enveloppe externe est initialisée avec les deux premiers points. Le demi-plan à droite défini par s_0 et s_1 ne contient pas P_0 . Or s_2 appartient au \overline{P} -disque passant par s_0 et s_1 (fig. 7.6.a). Le prédicat de l'équation 7.1 renvoie vrai ($-6 \leq 0$), s_1 reste sommet de la P_0 -enveloppe externe et s_2 est ajouté à la P_0 -enveloppe externe (fig. 7.6.b). Les mêmes événements se produisent pour s_3 ($-2 \leq 0$). Ils diffèrent en revanche pour s_4 . Le demi-plan à droite défini par s_2 et s_3 ne contient pas P_0 . Or s_4 n'appartient pas au \overline{P} -disque passant par s_2 et s_3 (fig. 7.6.c). Le prédicat renvoie faux ($4 \leq 0$), s_3 ne reste pas sommet de la

7.2. Séparation par des cercles passant par un point donné

Algorithme 22 : Balayage de Graham étendu au calcul d'une P -enveloppe externe

Entrées : P_0 et une séquence de points (s_0, s_1, \dots, s_n) de \mathbb{R}^2

Sorties : La pile contenant les sommets de la P -enveloppe externe

```

1 si  $n > 3$  alors
2   Empiler  $s_0$ ;
3   Empiler  $s_1$ ;
4   Empiler  $s_2$ ;
5   pour  $i$  de 3 à  $n$  faire
6     tant que le prédicat de l'équation 7.1 évalué à partir de  $P_0$ , les 2 derniers
7       points du haut de la pile et  $s_i$  est faux faire
8       |   Dépiler;
9       |   Empiler  $s_i$ ;
9   retourner la pile;

```

P -enveloppe externe (fig. 7.6.d). Le demi-plan à droite défini par s_1 et s_2 ne contient pas P_0 . Or s_4 appartient au \bar{P} -disque passant par s_1 et s_2 , le prédicat renvoie vrai ($-4 \leq 0$), donc le point s_2 est conservé dans la P -enveloppe externe (fig. 7.6.d). Le point s_4 est ajouté à la P -enveloppe externe et reste jusqu'à la fin du calcul comme le montre la fig. 7.5.b.

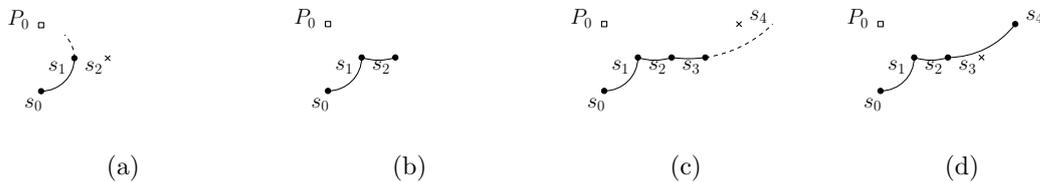


FIG. 7.6 – Déroulement du balayage permettant le calcul d'une P_0 -enveloppe externe.

Comme précédemment, nous considérons que les points de l'ensemble $X_{i|j}$ (respectivement $\bar{X}_{i|j}$) sont naturellement triés selon l'ordre de parcours des points de la partie $C_{i|j}$. Pour résoudre le problème de séparation de $X_{i|j}$ et $\bar{X}_{i|j}$ par des cercles passant par un point donné, nous allons calculer les P -enveloppes partielles de $X_{i|j}$ et $\bar{X}_{i|j}$.

7.2 Séparation par des cercles passant par un point donné

L'objectif est de déterminer, à partir d'une partie de contour $C_{i|j}$ supposée convexe, s'il existe des P -cercles séparant les points intérieurs $X_{i|j}$ des points extérieurs $\bar{X}_{i|j}$. Pour simplifier, $C_{i|j}$ est supposée convexe, de sorte que les points intérieurs $X_{i|j}$ sont les points à encercler, tandis que les points extérieurs $\bar{X}_{i|j}$ sont ceux à ne pas encercler. Pour résoudre

ce problème, nous avons recours à la même approche que celle adoptée au paragraphe 4.2.1 pour la reconnaissance de segments de droite.

7.2.1 Points de support

Un point de $X_{i|j}$ ou $\bar{X}_{i|j}$ se trouvant sur un P -cercle séparant $X_{i|j}$ de $\bar{X}_{i|j}$ est appelé *point de support*. Pour appliquer à notre problème l'algorithme de séparation de $X_{i|j}$ et $\bar{X}_{i|j}$ par une droite, il est nécessaire que (1) $X_{i|j}$ et $\bar{X}_{i|j}$ possèdent chacun au moins un point de support s'ils sont séparables par un P -cercle et que (2), les points de support soient des sommets consécutifs de la P -enveloppe externe de $X_{i|j}$ et de la P -enveloppe interne de $\bar{X}_{i|j}$. Il s'avère que ces conditions, énoncées dans les propositions 7.1 et 7.2, sont toujours vérifiées.

La proposition 7.1 relie l'existence d'un P -cercle séparant $X_{i|j}$ de $\bar{X}_{i|j}$ à l'existence d'un point de support appartenant à $X_{i|j}$ et d'un point de support appartenant à $\bar{X}_{i|j}$.

Proposition 7.1. *Il existe un P -cercle séparant $X_{i|j}$ de $\bar{X}_{i|j}$ si et seulement si au moins un point de $X_{i|j}$ et un point de $\bar{X}_{i|j}$ sont des points de support.*

Démonstration. Par définition, si un point de $X_{i|j}$ ou $\bar{X}_{i|j}$ est un point de support, alors il existe un P -cercle passant par le point de support et contenant $X_{i|j}$, mais pas $\bar{X}_{i|j}$. L'inverse est également vrai. Supposons qu'il existe un P -cercle englobant $X_{i|j}$, mais pas $\bar{X}_{i|j}$, noté $\mathcal{C}_0(\omega_0, r_0)$ (en pointillé sur la fig. 7.7). Le centre ω_0 peut toujours être déplacé en direction de P_0 (respectivement en direction inverse) de façon à ce que \mathcal{C}_0 se contracte (respectivement se dilate) et touche un point qu'il englobe (respectivement qu'il n'englobe pas), c'est-à-dire un point de $X_{i|j}$ (respectivement $\bar{X}_{i|j}$), tout en restant séparant (fig. 7.7). Le point touché par \mathcal{C}_0 est par définition un point de support, puisque \mathcal{C}_0 est séparant. \square

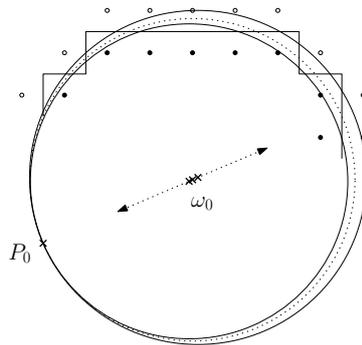


FIG. 7.7 – L'existence d'un P -disque qui contient $X_{i|j}$, mais pas $\bar{X}_{i|j}$ implique l'existence d'un point de support appartenant à $X_{i|j}$ et d'un point de support appartenant à $\bar{X}_{i|j}$.

La proposition 7.2 montre que les points de support sont des sommets consécutifs de la P -enveloppe externe de $X_{i|j}$ ou de la P -enveloppe interne de $\bar{X}_{i|j}$.

Proposition 7.2. *Les points de support de $X_{i|j}$ (respectivement $\bar{X}_{i|j}$) sont des sommets consécutifs de la P -enveloppe externe de $X_{i|j}$ (respectivement de la P -enveloppe interne de $\bar{X}_{i|j}$).*

Démonstration. Considérons un point Q de $X_{i|j}$ qui n'est pas un sommet de la P -enveloppe externe de $X_{i|j}$. Dans la liste des points intérieurs $X_{i|j}$, Q est forcément entre deux points, notés E_{prev} et E_{next} , qui sont sommets de la P -enveloppe externe de $X_{i|j}$. Selon la définition 7.1, E_{next} n'appartient pas au P -disque passant par E_{prev} et Q (fig. 7.8). De même, E_{prev} n'appartient pas au P -disque passant par E_{next} et Q (fig. 7.8). Ainsi, aucun P -disque passant par Q ne peut contenir tous les points de $X_{i|j}$, ce qui est nécessaire pour être séparant. Par définition, Q ne peut être un point de support. Les points de support de $X_{i|j}$, s'ils existent, ne peuvent qu'être des sommets de la P -enveloppe externe de $X_{i|j}$. De manière similaire, les points de support de $\bar{X}_{i|j}$ ne peuvent qu'être des sommets de la P -enveloppe interne de $\bar{X}_{i|j}$.

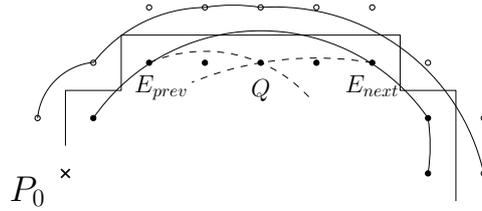


FIG. 7.8 – Les points de support de $X_{i|j}$ (respectivement $\bar{X}_{i|j}$) sont des sommets de la P -enveloppe externe de $X_{i|j}$ (respectivement de la P -enveloppe interne de $\bar{X}_{i|j}$).

De plus, les points de support sont des sommets consécutifs dans les P -enveloppes. Considérons un sommet E de la P -enveloppe externe de $X_{i|j}$. Les sommets précédent et suivant sont respectivement notés E_{prev} et E_{next} . Supposons maintenant que E_{prev} et E_{next} sont points de support. Il existe deux P -disques, notés \mathcal{D}_{prev} et \mathcal{D}_{next} , passant par E_{prev} et E_{next} et contenant $X_{i|j}$, mais pas $\bar{X}_{i|j}$ (en tirets dans la fig. 7.9.a). $\mathcal{D}_{prev} \cap \mathcal{D}_{next}$ contient tous les points de $X_{i|j}$, alors que $\mathcal{D}_{prev} \cup \mathcal{D}_{next}$ ne contient aucun point de $\bar{X}_{i|j}$. Il existe toujours un P -disque, noté \mathcal{D}_0 , passant par E et contenant tous les points de $X_{i|j}$ sans contenir un seul point de $\bar{X}_{i|j}$ (en pointillé sur la fig. 7.9). En effet, \mathcal{D}_0 contient $\mathcal{D}_{prev} \cap \mathcal{D}_{next}$ qui contient tous les points de $X_{i|j}$, tandis que \mathcal{D}_0 est contenu par $\mathcal{D}_{prev} \cup \mathcal{D}_{next}$, qui ne contient aucun point de $\bar{X}_{i|j}$ (fig. 7.9). Ainsi, un sommet de la P -enveloppe de $X_{i|j}$ ne peut pas être encadré par deux sommets qui sont points de support sans être point de support lui-même. Les points de support de $X_{i|j}$ sont donc des sommets consécutifs de la P -enveloppe externe de $X_{i|j}$. De même, les points de support de $\bar{X}_{i|j}$ sont des sommets consécutifs de la P -enveloppe interne de $\bar{X}_{i|j}$. \square

7.2.2 Algorithme de séparation

Les propositions 7.1 et 7.2 signifient que la connaissance de la P -enveloppe externe de $X_{i|j}$ et de la P -enveloppe interne de $\bar{X}_{i|j}$, ainsi que des premier et dernier points de support

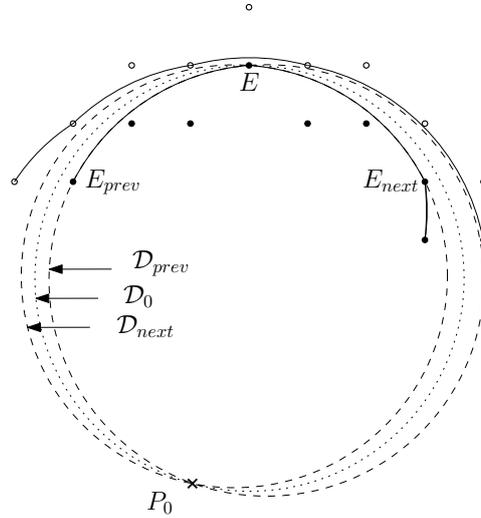


FIG. 7.9 – Les points de support sont des sommets consécutifs des P -enveloppes car \mathcal{D}_0 contient $\mathcal{D}_{prev} \cap \mathcal{D}_{next}$, tandis que \mathcal{D}_0 est contenu dans $\mathcal{D}_{prev} \cup \mathcal{D}_{next}$.

de chacune des deux enveloppes, implique la connaissance de tous les points de support. Ce qui est exactement le cas pour la séparation de X_{ij} et \bar{X}_{ij} par des droites (section 4.2.1).

Les premier et dernier points de support de la P -enveloppe externe de X_{ij} sont notés E_f et E_l , tandis que les premier et dernier points de support de la P -enveloppe interne de \bar{X}_{ij} sont notés I_f et I_l . L'algorithme 8, appelé dans le cadre de la reconnaissance de segments de droite (section 4.2.1), peut tout à fait être appliqué à notre problème grâce aux propositions 7.1 et 7.2. Seul le prédicat change au niveau des lignes 2, 5, 8 et 10. Au lieu d'évaluer celui de l'équation 1.1, c'est celui de l'équation 7.1 qui est calculé. La fig. 7.10 compare la séparation par des P -cercles et celle par des droites. A chaque fois qu'un point est examiné, sa localisation par rapport aux différentes zones délimitées par les premier et dernier points d'appui de chaque enveloppe détermine l'action à entreprendre (fig. 7.10).

7.2.3 Exemple de déroulement

Voici un exemple du déroulement de l'algorithme sur la partie de contour $C_{0|13}$ illustrée dans la fig. 7.11.a. Les P -enveloppes et les premier et dernier points de support de chaque P -enveloppe sont initialisés à partir des deux premiers points de $X_{0|13}$ et des deux premiers points de $\bar{X}_{0|13}$ (fig. 7.11.b).

Un point intérieur est ensuite considéré (fig. 7.12.a). Ce point appartient au \overline{P} -disque défini par E_f et I_l , P_0 n'appartenant pas au demi-plan à droite défini par E_f et I_l . Le prédicat de l'équation 7.1 renvoie vrai ($-8 \leq 0$). Il ne se trouve pas dans la zone 1, mais dans les zones 2 ou 3. Il existe encore un P -cercle séparant. De plus, il n'appartient pas au P -disque défini par I_f et E_l , P_0 appartenant au demi-plan à droite défini par I_f et E_l . Il ne se trouve donc pas dans la zone 3, mais dans la zone 2. Le prédicat renvoie faux ($2 \leq 0$).

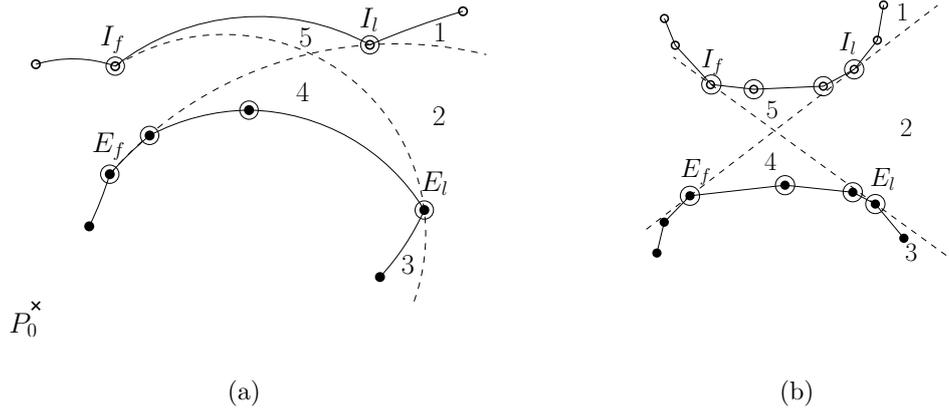


FIG. 7.10 – Comparaison de la séparation de deux ensembles de points par des P -disques en (a) et des demi-plans en (b). Les points de support sont entourés. Les premier et dernier points de support de chaque P -enveloppe délimitent 5 zones, numérotées de 1 à 5.

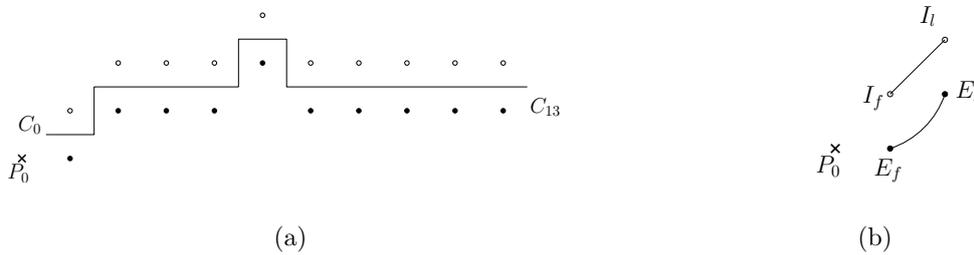


FIG. 7.11 – Initialisation.

Comme il se trouve dans la zone 2, E_l et la P -enveloppe externe de $X_{0|4}$ sont mis à jour (fig. 7.12.b).



FIG. 7.12 – Ajout d'un point intérieur.

Un point extérieur est maintenant examiné (fig. 7.13.a). Ce point n'appartient pas au P -disque défini par I_f et E_l , P_0 appartenant au demi-plan à droite défini par I_f et E_l . Le prédicat de l'équation 7.1 renvoie vrai ($-8 \leq 0$). Il ne se trouve pas dans la zone 1, mais dans les zones 2 ou 3. Il existe encore un P -cercle séparant. De plus, il appartient au \overline{P} -disque défini par E_f et I_l , P_0 n'appartenant pas au demi-plan à droite défini par E_f et I_l . Le prédicat renvoie faux ($6 \leq 0$). Il ne se trouve donc pas dans la zone 3, mais dans la zone 2. Comme il se trouve dans la zone 2, I_l et la P -enveloppe interne de $\overline{X}_{0|4}$ sont mis à jour (fig. 7.13.b). Le point E_f est déplacé car I_l appartient au \overline{P} -disque défini par les deux premiers points de support de la P -enveloppe externe de $X_{0|4}$, P_0 n'appartenant pas au demi-plan à droite défini par ces points (fig. 7.13.b).



FIG. 7.13 – Ajout d'un point extérieur.

A l'ajout du point intérieur associé à la dernière partie élémentaire $C_{12|13}$, il s'avère qu'il n'existe aucun P -disque qui contienne $X_{0|13}$ sans contenir $\overline{X}_{0|13}$, car il appartient à la zone 1 (fig. 7.14).

Ainsi, il existe un algorithme similaire, mais plus général que celui utilisé pour la reconnaissance de segments de droite. Il fournit les P -disques contenant $X_{i|j}$, mais pas $\overline{X}_{i|j}$. Pour l'implémenter, il suffit de remplacer le prédicat d'orientation classique de l'équation 1.1 par celui de l'équation 7.1. Cet algorithme est la routine principale de la méthode de décomposition d'un contour en arcs de cercle que nous présentons ci-dessous.

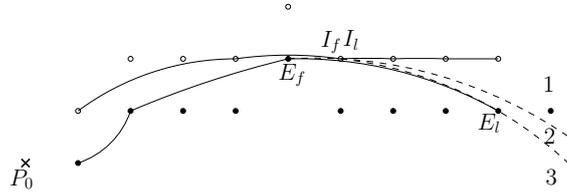


FIG. 7.14 – Fin de l'algorithme.

7.3 Décomposition d'un contour en arcs de cercle

Cette section traite de la décomposition d'un contour en une succession d'arcs de cercle discrets. Cette décomposition comprend un balayage du contour dans lequel chaque arc de cercle est étendu le plus possible vers l'avant.

Définition 7.3 (Arc de cercle maximal). *Un arc de cercle $C_{k|l}$ d'un contour C qui ne peut être étendu à l'avant, c'est-à-dire tel que $C_{k|l+1}$ n'est pas un arc de cercle, est un arc de cercle maximal à l'avant.*

L'algorithme de reconnaissance d'arcs de cercle que nous avons proposé au paragraphe 6.2 effectue de l'ordre de $\mathcal{O}(n \log n)$ opérations. Comme cet algorithme n'est pas incrémental, vérifier qu'un arc de cercle étendu d'un nouveau point est toujours un arc de cercle exige de reprendre le calcul de zéro en considérant tous les points déjà traités. Ainsi, décomposer un contour en arcs de cercle maximaux à l'avant requiert de l'ordre de $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ opérations.

Parmi les deux méthodes incrémentales de reconnaissance d'arcs de cercle existantes, celle de Kovalevsky [1990] et de Coeurjolly *et al.* [2004] sont évaluées en $\mathcal{O}(n^2 \log n)$, ce qui n'est pas mieux que notre méthode non incrémentale. A l'aide d'un prétraitement (section 6.3), Coeurjolly *et al.* [2004] abaissent la complexité de leur algorithme à $\mathcal{O}(n^{\frac{4}{3}} \log n)$.

Après un tel prétraitement, nous proposons dans cette section une solution en $\mathcal{O}(n^{\frac{4}{3}})$, linéaire en pratique, donc bien moins coûteuse que les solutions existantes. Notre méthode repose sur l'algorithme précédent, vu au paragraphe 7.2.

7.3.1 Principe de l'algorithme

Supposons sans perte de généralité que la partie $C_{i|j}$ est convexe. Dans ce cas, $C_{i|j}$ est un arc de cercle si et seulement s'il existe un disque contenant $X_{i|j}$, mais pas $\bar{X}_{i|j}$. Le principe est de calculer incrémentalement le disque de plus petit rayon contenant $X_{i|j}$, mais pas $\bar{X}_{i|j}$. Dans l'espace des paramètres abc (section 2.2.2), le disque de plus petit rayon contenant $X_{i|j}$, mais pas $\bar{X}_{i|j}$ est le point du domaine le plus proche (en terme de distance verticale) du parabolôïde elliptique d'équation $r^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2$. La fig. 7.15.a illustre ce phénomène sur le plan de coupe ac . Si ce point est contenu dans le demi-espace résultant d'une nouvelle contrainte, il reste le disque de plus petit rayon (fig. 7.15.b). Mais si ce n'est pas le cas, soit il n'existe pas de disque contenant $X_{i|j}$ et ne contenant pas $\bar{X}_{i|j}$ (fig. 7.15.c),

soit le disque de plus petit rayon se trouve au bord du demi-espace (fig. 7.15.d). C'est un résultat classique de programmation convexe et de géométrie algorithmique [de Berg *et al.*, 2000].

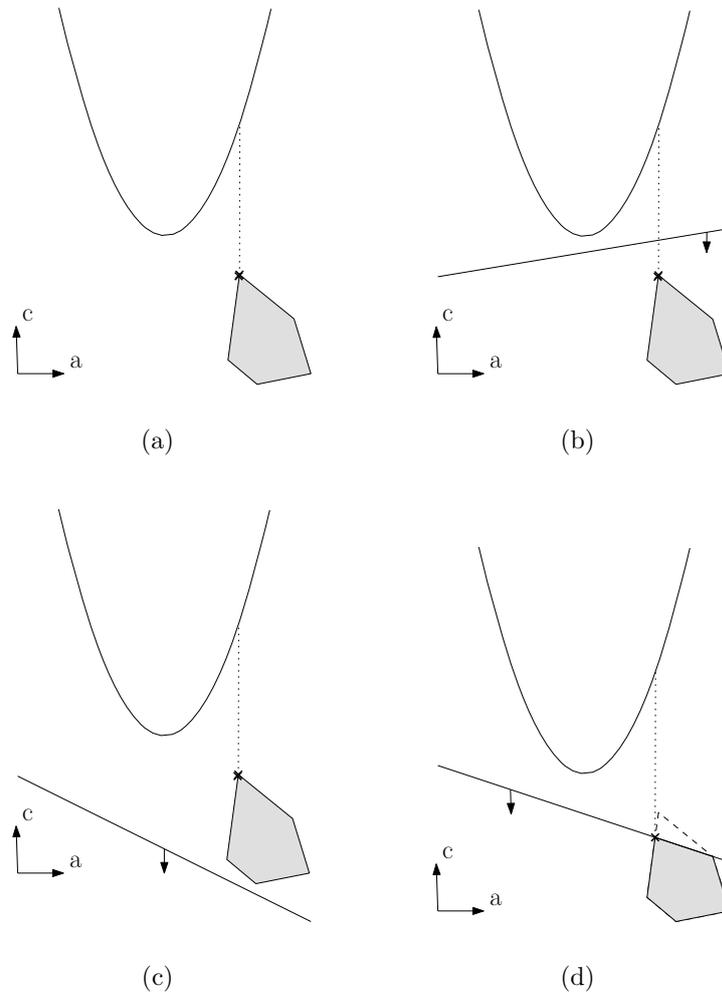


FIG. 7.15 – Si une nouvelle contrainte ne contient pas le disque de plus petit rayon (b) et si le nouveau domaine n'est pas vide (c), alors le nouveau disque de plus petit rayon se trouve sur cette contrainte (d) [de Berg *et al.*, 2000].

L'algorithme précédent, vu au paragraphe 7.2.2, est appliqué quand le disque de plus petit rayon n'est pas contenu dans le demi-espace résultant d'une nouvelle contrainte, c'est-à-dire quand le point intérieur (respectivement extérieur) de $C_{k|k+1}$ ($i \leq k < j$) se trouve à l'extérieur (respectivement intérieur) du disque. Quand ce point se présente, il est noté P_0 . S'il n'existe aucun disque passant par P_0 qui contienne $X_{i|k}$ mais pas $\bar{X}_{i|k}$, alors il n'existe aucun disque qui contienne $X_{i|k}$, mais pas $\bar{X}_{i|k}$. Dans le cas contraire, parmi les disques qui passent par P_0 et qui contiennent $X_{i|k}$ mais pas $\bar{X}_{i|k}$, il reste à déterminer celui de rayon

minimal. Pour cela, il suffit de calculer le rayon de tous les disques contenant $X_{i|k}$, mais pas $\bar{X}_{i|k}$, caractérisés par les points de support de $X_{i|k}$ et $\bar{X}_{i|k}$, puis de trouver celui de rayon minimal.

7.3.2 Exemple de déroulement

Voici un exemple du fonctionnement de notre méthode sur la partie de contour $C_{0|19}$ illustrée dans la fig. 7.16.

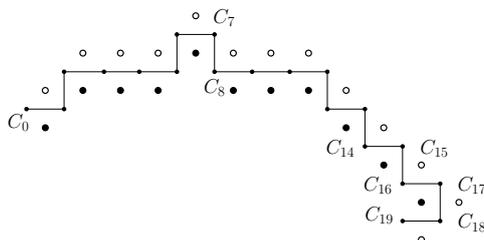


FIG. 7.16 – La partie de contour $C_{0|19}$.

Une reconnaissance de segments de droite sert à l'initialisation (fig. 7.17.a). Une description de cet algorithme est donnée au paragraphe 4.2.1. Le résultat de cet algorithme permet de déterminer, parmi l'ensemble de points intérieurs et l'ensemble de points extérieurs, lequel des deux ensembles est celui à encercler et lequel est celui à ne pas encercler. Si le premier point à faire échouer la reconnaissance est un point intérieur, $X_{0|19}$ et $\bar{X}_{0|19}$ sont circulairement séparables si et seulement s'il existe un disque contenant $\bar{X}_{0|19}$ mais pas $X_{0|19}$. Inversement, si c'est un point extérieur comme c'est le cas ici, $X_{0|19}$ et $\bar{X}_{0|19}$ sont circulairement séparables si et seulement s'il existe un disque contenant $X_{0|19}$ et non $\bar{X}_{0|19}$. En outre, ce point devient le premier point fixe P_0 . Dans la fig. 7.17.b, P_0 est le point extérieur de la partie élémentaire $C_{7|8}$. Le disque contenant $X_{0|8}$ et non $\bar{X}_{0|8}$, passant par P_0 et de plus petit rayon existe. Il est calculé à partir des points de support, encerclés, fournis par l'algorithme de la section 7.2. Il est dessiné dans la fig. 7.17.b en pointillé.

L'étape suivante consiste à tester la localisation des points intérieurs et extérieurs par rapport au disque obtenu. Les points de $X_{8|14}$ se trouvent à l'intérieur du disque, tandis que les points de $\bar{X}_{8|14}$ se trouvent à l'extérieur du disque (fig. 7.18.a). En revanche, le point intérieur de la partie élémentaire $C_{14|15}$ n'est pas à l'intérieur du disque (fig. 7.18.a). Ce point devient le deuxième point fixe P_1 . Le disque contenant $X_{0|15}$ mais pas $\bar{X}_{0|15}$, passant par P_1 et de plus petit rayon est calculé à l'aide de l'algorithme de la section 7.2.2. Il est dessiné dans la fig. 7.18.b en pointillé.

La localisation des points intérieurs et extérieurs est à nouveau testée par rapport au disque obtenu. Le point extérieur de la partie élémentaire $C_{15|16}$ se trouve bien à l'extérieur du disque (fig. 7.19.a). En revanche, le point intérieur de la partie élémentaire $C_{16|17}$ se trouve aussi à l'extérieur du disque (fig. 7.19.a). Ce point devient le troisième point fixe P_2 . Le disque contenant $X_{0|17}$ mais pas $\bar{X}_{0|17}$, passant par P_2 et de plus petit rayon est calculé à l'aide de l'algorithme de la section 7.2.

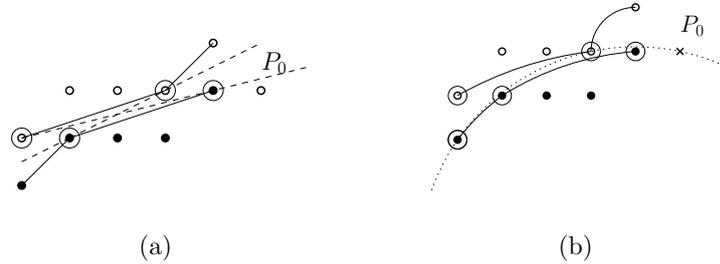


FIG. 7.17 – Le premier point fixe P_0 est le premier point qui fait échouer la reconnaissance de segments de droite en (a). Le disque séparant de plus petit rayon, en pointillé, passe par P_0 et deux points de support, encadrés, fournis par l'algorithme de la section 7.2.2 en (b).

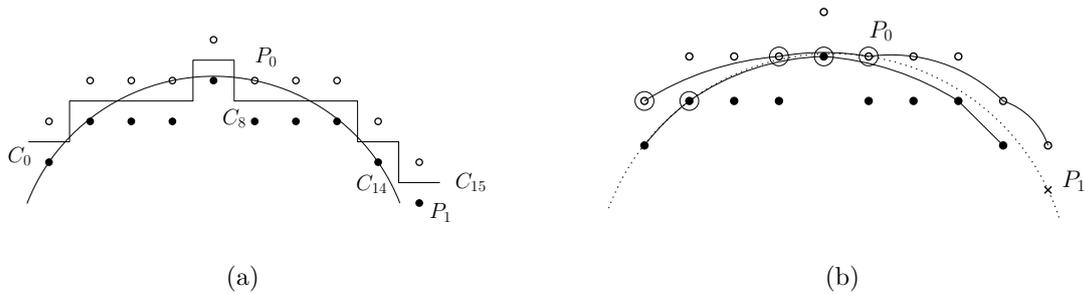


FIG. 7.18 – (a) Le point intérieur de la partie élémentaire $C_{14|15}$ n'est pas à l'intérieur du disque séparant de plus petit rayon. Il devient le point fixe P_1 . (b) Le disque contenant $X_{0|15}$ mais pas $\bar{X}_{0|15}$, passant par P_1 et de plus petit rayon est calculé à l'aide de l'algorithme de la section 7.2.

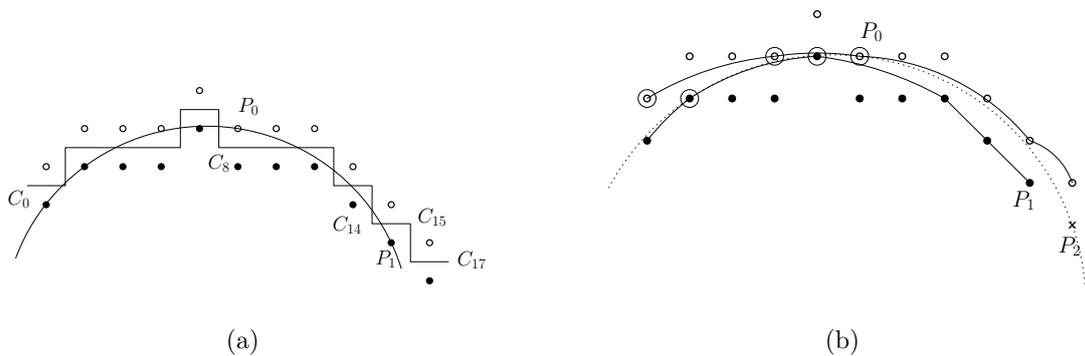


FIG. 7.19 – (a) Le point intérieur de la partie élémentaire $C_{16|17}$ n'est pas à l'intérieur du disque séparant de plus petit rayon. Il devient le point fixe P_2 . (b) Le disque contenant $X_{0|17}$ mais pas $\bar{X}_{0|17}$, passant par P_2 et de plus petit rayon est calculé à l'aide de l'algorithme de la section 7.2.

7.3. Décomposition d'un contour en arcs de cercle

Le point extérieur de la partie élémentaire $C_{17|18}$ se trouve bien à l'extérieur du disque obtenu (fig. 7.20). En revanche, le point extérieur de la partie élémentaire $C_{18|19}$ se trouve à l'intérieur du disque (fig. 7.20). Or l'algorithme de la section 7.2 nous permet de savoir qu'aucun disque passant par ce point ne contient $X_{0|19}$ sans contenir un point de $\bar{X}_{0|19}$. Ainsi, $X_{0|19}$ et $\bar{X}_{0|19}$ ne sont pas circulairement séparables et $C_{0|19}$ n'est pas un arc de cercle.

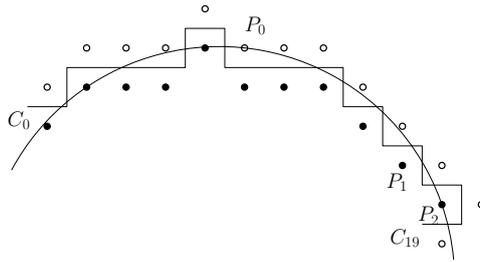


FIG. 7.20 – Fin de l'algorithme.

7.3.3 Complexité et résultats expérimentaux

L'exemple précédent montre que tous les points déjà traités, c'est-à-dire $\mathcal{O}(n)$ points, sont examinés à chaque appel de l'algorithme du paragraphe 7.2. Or, cet algorithme est appelé au plus n fois. Ainsi, notre méthode est quadratique, c'est-à-dire en $\mathcal{O}(n^2)$. Cependant, le même type de prétraitement que celui proposé par Coeurjolly *et al.* [2004] et qui abaisse la complexité de la reconnaissance de cercle (section 6.3) peut être utilisé ici. Ce prétraitement élimine les points intérieurs et extérieurs inutiles. Les points à encercler sont les sommets du polygone de longueur minimale, tandis que les points à ne pas encercler sont les points de Bezout les plus proches de la médiatrice de chaque arête du polygone (section 5.4.1). Notre méthode s'applique parfaitement sur les points retenus, car les points à traiter sont toujours ordonnés. Il reste $\mathcal{O}(n^{\frac{2}{3}})$ points après le prétraitement, pour des contours ayant un nombre de parties convexes et concaves indépendant de leur longueur n . La complexité de notre méthode tombe donc à $\mathcal{O}(n^{\frac{4}{3}})$ dans ce cas.

La fig. 7.21 représente un cercle discret. En noir et blanc sont représentés respectivement les points intérieurs et extérieurs pris en compte dans le calcul. Ils sont au nombre de 91, alors que le contour est constitué de 289 points. Le cercle séparant de plus petit rayon est dessiné en rouge.

Nous avons compté le nombre de points retenus après le prétraitement pour un millier de cercles discrets dont le rayon varie entre 100 à 10000 (l'unité est le pixel). La fig. 7.22, montre qu'il y a, conformément aux résultats théoriques [Acketa et Zunić, 1995], de l'ordre de $\mathcal{O}(n^{\frac{2}{3}})$ points retenus. D'après nos données expérimentales, la constante est évaluée par régression à environ 2.1, c'est-à-dire que m , le nombre de points retenus, est à peu près égal à $2.1 \times n^{\frac{2}{3}}$. La courbe de régression en pointillé est quasiment invisible car confondue avec les données.

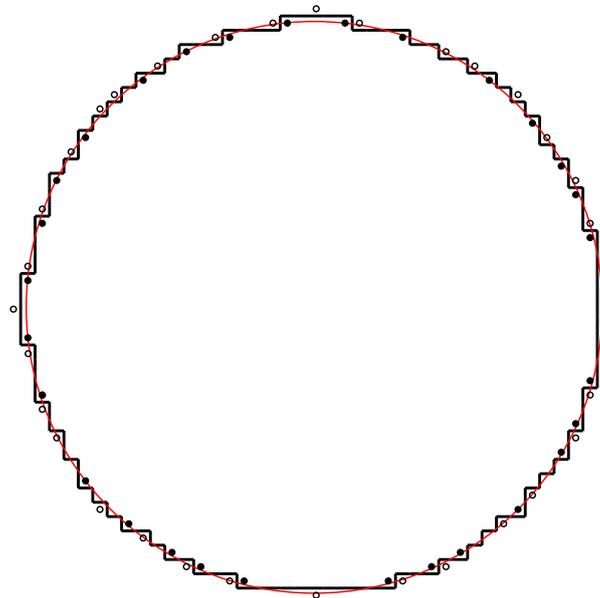


FIG. 7.21 – Reconnaissance d'un arc de cercle.

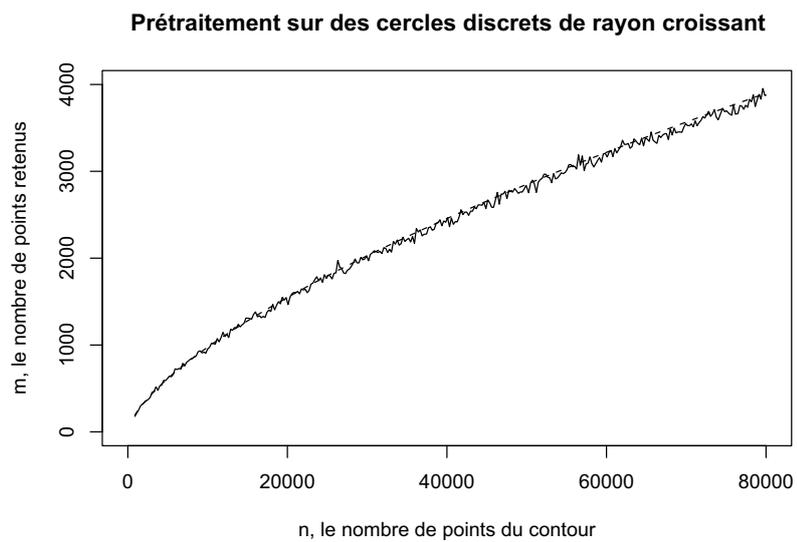


FIG. 7.22 – Nombre de points retenus pour la reconnaissance d'arcs de cercle.

7.3. Décomposition d'un contour en arcs de cercle

Nous avons aussi dénombré combien de fois ces points sont pris en compte dans l'algorithme (globalement et non rapporté à chaque point). Cette quantité est bien sûr plus importante que le nombre de points retenus, puisque chaque point peut être considéré plusieurs fois. Théoriquement, au plus n fois ; en pratique, bien moins. D'après la fig. 7.23, le nombre total de fois que sont considérés les points retenus au cours d'une reconnaissance varie linéairement avec la taille n des contours.

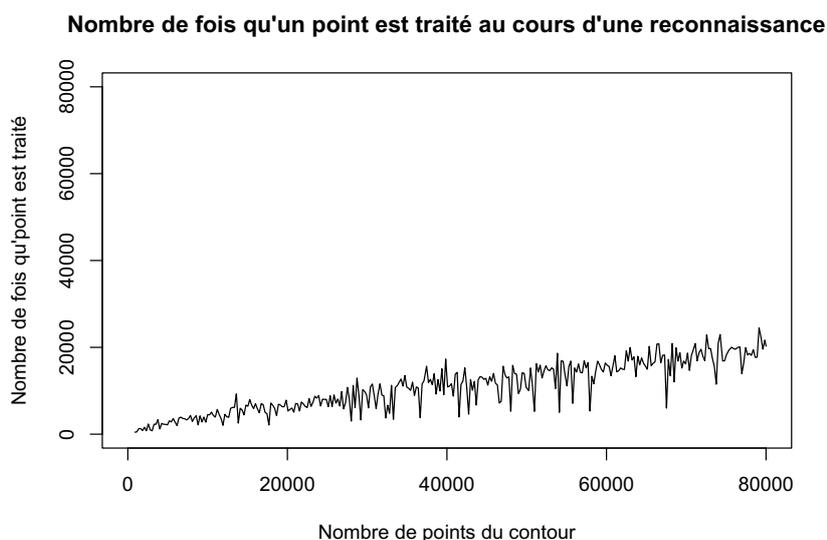


FIG. 7.23 – Nombre de fois qu'un point est pris en compte au cours d'une reconnaissance à la volée d'un arc de cercle.

Comme l'illustre la fig. 7.24, le temps d'exécution de notre méthode s'avère être particulièrement faible, puisqu'il est du même ordre de grandeur que celui des méthodes de reconnaissance de segments de droite (fig. 4.19). La complexité de notre méthode, théoriquement en $\mathcal{O}(n^{\frac{4}{3}})$, est linéaire en pratique. Cette rapidité tient d'une part au prétraitement qui réduit fortement le nombre de points à traiter pour un coût moindre et d'autre part à la simplicité de notre méthode (des listes de points, un prédicat évalué en nombres entiers, des retours en arrière peu fréquents).

La fig. 7.25.a représente une partie du contour de la discrétisation de Gauss d'une ellipse. En noir et blanc sont représentés respectivement les points intérieurs et extérieurs pris en compte dans le calcul. Les extrémités de chaque arc de cercle sont indiquées par les flèches noires. Leur cercle séparant de plus petit rayon est dessiné en rouge. Pour plus de lisibilité, la partie du cercle située à l'extérieur du contour a été effacée. L'arc de cercle de plus petit rayon est bien situé dans la zone la plus courbe du contour.

La fig. 7.25.b représente le contour de la discrétisation de Gauss d'une rosace. Les parties concaves, étant trop légèrement incurvées, sont assimilées à des segments de droite, tandis que les parties convexes sont décomposées en un ou deux arcs de cercle. Cette figure

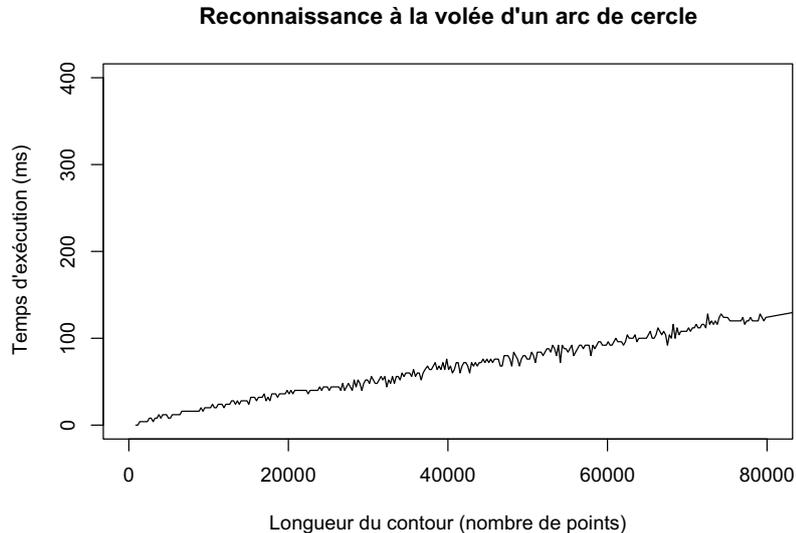


FIG. 7.24 – Temps d'exécution pour la reconnaissance à la volée d'arcs de cercle.

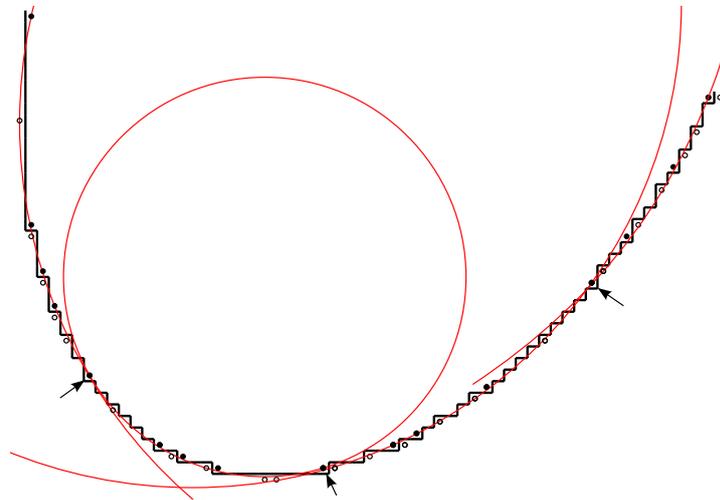
illustre un nouvel avantage de l'opération de prétraitement. Elle permet une distinction directe entre parties convexes, parties concaves et segments d'inflexion et une décomposition réalisée indépendamment sur chacune d'elles. Ainsi, la décomposition en arcs de cercle obtenue est une représentation particulièrement fidèle du contour.

7.4 Conclusion

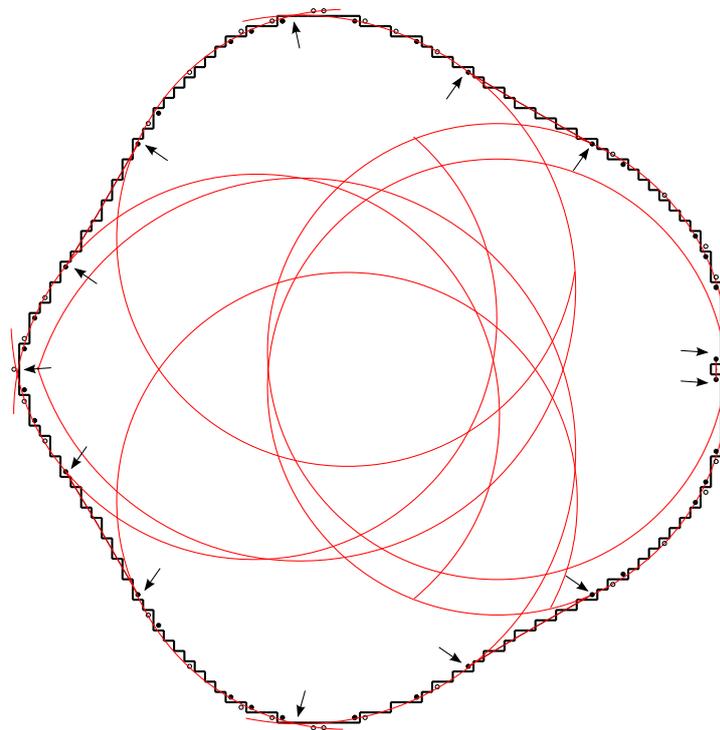
Nous avons étudié une version contrainte du problème de la reconnaissance d'arcs de cercle : la reconnaissance d'arcs de cercle passant par un point donné. Pour résoudre ce problème, nous appliquons notre algorithme de reconnaissance de segments de droite par séparation en modifiant le prédicat utilisé. Au lieu de tester l'appartenance d'un point à un demi-plan, nous testons l'appartenance d'un point à un disque passant par un point donné. Ce prédicat s'évalue en nombres entiers, ce qui mène à un algorithme ne souffrant d'aucune imprécision.

Comme l'algorithme que nous avons proposé pour la reconnaissance d'arcs de cercle passant par un point donné est une généralisation de celui proposé pour la reconnaissance de segments de droite, il peut être un bon outil pour mettre en relief ce qui ressemble ou diffère de la reconnaissance de segments de droite. Par exemple, les programmes qui les implémentent peuvent être lancés pour compter le nombre de points de support. Sont-ils limités à quatre comme dans le cas des segments de droite ou à un nombre supérieur ?

D'autres versions contraintes de la reconnaissance d'arcs de cercle peuvent être étudiés dans ce but : la reconnaissance d'arcs de cercle de rayon donné ou d'arcs de cercle dont le centre appartient à une droite donnée.



(a)



(b)

FIG. 7.25 – Décomposition du contour d'une ellipse (a) et d'une rosace (b) en arcs de cercle.

D'un point de vue pratique, nous avons montré que l'algorithme que nous avons proposé pour la reconnaissance d'arcs de cercle passant par un point donné peut être utilisé comme routine pour résoudre le problème plus général de la reconnaissance d'arcs de cercle. Notre approche consiste à calculer incrémentalement le plus petit cercle séparant les points intérieurs et extérieurs d'une partie d'un contour. A chaque fois qu'un nouveau point remet en cause le caractère séparant du cercle, nous calculons l'ensemble des cercles séparants passant par ce point pour trouver le nouveau plus petit cercle séparant. Grâce à un prétraitement rapide éliminant les points inutiles, la complexité de la méthode passe de $\mathcal{O}(n^2)$ à $\mathcal{O}(n^{\frac{4}{3}})$, pour des contours présentant un nombre de parties convexes et concaves indépendant de leur longueur. Les résultats expérimentaux montrent que la décomposition en arcs de cercle, obtenue en un temps très court, est une représentation fidèle du contour.