L'UNIVERSITÉ LUMIÈRE LYON 2

LYON France

École Doctorale ED485 EPIC [Éducation, Psychologie, Information et Communication] en Sciences de l'Éducation.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO – UFRPE

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PPGEC

Vladimir Lira Veras Xavier de Andrade

Les concepts de mesures de tendance centrale et de dispersion dans la formation statistique en lycée au Brésil et en France. Approche exploratoire dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique et de la théorie de champs conceptuels

Os conceitos de Medidas de Tendência Central e de Dispersão na Formação Estatística no Ensino Médio no Brasil e na França. Abordagem Exploratória no Quadro da Teoria Antropológica do Didático e da Teoria dos Campos Conceituais

Volume I

Recife, 2013

Vladimir Lira Veras Xavier de Andrade

Les concepts de mesures de tendance centrale et de dispersion dans la formation statistique en lycée au Brésil et en France. Approche exploratoire dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique et de la théorie de champs conceptuels

Os Conceitos de Medidas de Tendência Central e de Dispersão na Formação Estatística no Ensino Médio no Brasil e na França. Abordagem Exploratória no Quadro da Teoria Antropológica do Didático e da Teoria dos Campos Conceituais

Volume I

Thèse en cotutelle dans le cadre des conditions requises pour l'obtention du titre de docteur en Sciences de l'Éducation à l'Université Lumière Lyon2

Tese em cotutela como parte dos requisitos para obtenção do título de doutor em Ensino de Ciências pela Universidade Federal Rural de Pernambuco

Directeur de thèse (orientador) de l'Université Lumière/Lyon2:
Jean-Claude Régnier.

Orientadora (directrice de thèse) da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE): Anna Paula de Avelar Brito Lima

Recife, 2013

Ficha catalográfica

A553c Andrade, Vladimir Lira Veras Xavier de
Os conceitos de medidas de tendência central e de dispersão na formação estatística no ensino médio no Brasil e na França. Abordagem exploratória no quadro da teoria antropológica do didático e da teoria dos campos conceituais = Les concepts de mesures de tendance centrale et de dispersion dans la formation statistique en lycée au Brésil et en France. Approche exploratoire dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique et de la théorie des champs conceptuels / Vladimir Lira Veras Xavier de Andrade. – Recife, 2013.
2 v. (233; 315 f.) : il.

Orientadores: Anna Paula de Avelar Brito Lima e Jean-Claude Régnier.
. Tese em co-tutela (Doutorado em Ensino das Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Educação e L'Université Lumière Lyon 2 (Doutorado em Sciences de l'Éducation). Recife, 2013.
Referências.

1. Medidas de tendência central e de dispersão 2. Transposição didática 3. Teoria antropológica do didático 4. Teoria dos campos conceituais 5. Ensino médio I. Lima, Anna Paula de Avelar Brito, orientadora II. Régnier, Jean-Claude, orientador III. Título

CDD 507

FOLHA DE APROVAÇÃO

Vladimir Lira Veras Xavier de Andrade

Les concepts de mesures de tendance centrale et de dispersion dans la formation statistique en lycée au Brésil et en France. Approche exploratoire dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique et de la théorie de champs conceptuels

Thèse en cotutelle dans le cadre des conditions requises pour l'obtention du titre de docteur en Sciences de l'Éducation à l'Université Lumière Lyon2

Orientador (directeur de thèse) Directeur de thèse de l'Université Lumière/Lyon2:
Jean-Claude Régnier:

Os conceitos de Medidas de Tendência Central e de Dispersão na Formação Estatística no Ensino Médio no Brasil e na França. Abordagem Exploratória no Quadro da Teoria Antropológica do Didático e da Teoria dos Campos Conceituais

Tese em cotutela como parte dos requisitos para obtenção do título de doutor em Ensino de Ciências pela Universidade Federal Rural de Pernambuco

Orientadora (diretora de tese) da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE):
Anna Paula de Avelar Brito Lima

Defendida e aprovada em: 13 de novembro de 2013.

Banca examinadora

Profa. Dra. Anna Paula DE AVELAR BRITO LIMA
Presidente/1ª examinadora/orientadora UFRPE
Instituição: Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE

Prof. Dr. Jean-Claude RÉGNIER
2º examinador/orientador Université Lumière Lyon 2
Instituição: Université Lumière Lyon2

Profa. Dra. Mônica Maria LINS SANTIAGO
3ª examinadora interna
Instituição: Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE

Profa. Dra. Nadja Maria ACIOLY-RÉGNIER
4ª examinadora interna
Instituição: Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE

Prof. Dr. Jorge Tarcísio DA ROCHA FALCÃO
5º examinador externo
Instituição: Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

Prof. Dr. Saddo AG ALMOULOUD
6º examinador externo
Instituição: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer as inúmeras oportunidades que tive na vida, da família que tenho, das pessoas que conheci, das oportunidades que me foram dadas em um mundo com tantos problemas sociais. Essas oportunidades propiciaram o caminho que trilho hoje. Este caminho almejado também é fruto do desejo de trilhá-lo que corresponde a uma escolha de vida que envolve a vontade e o prazer por ensinar e pesquisar. Destaco por outro lado a responsabilidade social deste caminho trilhado.

Agradeço à Anna Paula de Avelar Brito Lima, uma grande orientadora e querida amiga, que desde que nos conhecemos sempre me norteou no caminho das pesquisas. Agradeço pela sua grande paciência e por tudo que tive a oportunidade de aprender com você, não apenas para a tese, mas para a vida. Agradeço também por ter me apresentado a duas pessoas que tenho grande apreço: o professor Jean-Claude Régnier e a professora Nadja Acioly-Régnier.

Ao meu querido orientador e amigo professor Jean-Claude Régnier, por todo o apoio e orientação durante este meu percurso profissional e com quem sempre estou aprendendo algo novo. Essa trajetória, que começou antes da tese na organização/participação de eventos científicos, no debate e realização de pesquisas precedentes. Pelos contatos e percursos profissionais, que me ajudaram a abrir as portas nesta nova etapa da minha vida, que avança no sentido do ensino e da pesquisa e pelas suas obras que foram utilizadas como alicerce para construção da tese.

À professora Nadja Maria Acioly-Régnier que teve um papel muito importante durante o meu percurso, assim como no desenvolvimento desta tese e pelas suas importantes contribuições teóricas, como também pela sua obra que utilizei como referência. Agradeço pelas inúmeras sugestões e orientações para o aperfeiçoamento desta e pelo apoio com quem sempre contei. Agradeço por ter aceitado participar da banca de defesa.

À minha querida esposa, Paula Virgínia Chaves Cabral Andrade e amiga de todos os momentos. Com quem dividimos e compartilhamos juntos o nosso trajeto nesta existência. Pela sua paciência e apoio que sempre teve neste percurso da tese, assim como em outros percursos. Com quem compartilho, lado a lado, nossos sonhos, alegrias e momentos dificéis. Pelo que pude aprender com você, pelas trocas, por tudo, o meu agradecimento.

Ao professor Saddo Ag Almoloud pelas inúmeras e pertinentes sugestões fornecidas durante a qualificação que foram muito importantes para o aperfeiçoamento desta tese. Pela suas obras que li e que me auxiliaram na construção da tese. Agradeço também por sua aceitação em participar da minha defesa, pela sua vinda a Recife diante de tantas ocupações profissionais em São Paulo.

Ao professor Jorge Tarcísio da Rocha Falcão, que tive a oportunidade de assistir diversas palestras em eventos científicos, como também de ler seus textos. Que apesar das inúmeras atividades que desenvolve, aceitou participar da defesa, o meu agradecimento.

À professora Mônica Maria Lins Santiago, que apesar das inúmeras atribuições, aceitou participar da banca de defesa, o meu agradecimento.

Agradeço à banca escolhida, formada por pesquisadores altamente qualificados que enobrecem e trazem importantes contribuições à minha pesquisa.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências da UFRPE, com que tive a oportunidade de discutir e ampliar a minha pesquisa, em especial à professora e orientadora, Anna Paula de Avelar Brito Lima, à professora Edenia Maria Ribeiro do Amaral, à professora Heloísa Flora Brasil Nóbrega Bastos (que contribuiu também como minha orientadora no mestrado) e à professora Helaine Sivini Ferreira (professora e coordenadora do programa).

Aos professores da Universidade de Lyon 2 e Lyon 1, com quem tive a oportunidade de expor a minha pesquisa, cursar disciplinas, enquanto aluno de Lyon 2, e participar de eventos científicos e cursos. Em especial ao professor Jean-Claude Régnier, à professora Nadja Acioly-Régnier, ao professor Christian Buty e ao professor Bernard Coutanson, o meu agradecimento.

Ao professor Bernard Coutanson, obrigado pelas inúmeras sugestões, pelas orientações dadas durante os períodos em que estive em Lyon, na França.

Aos membros do grupo ADATIC, coordenado pelo professor Jean-Claude Régnier, com a participação do professor Christian Buty e da professora Nadja Acioly-Régnier, pelas suas inúmeras contribuições e aos colegas de diversos países (Brasil, China, Colômbia, França (Continental e Nova Caledônia), Haiti, Madagascar, Rússia, Senegal, Síria, Tunísia e Uruguai) que participavam do grupo pelas sugestões e apoio.

Aos nossos amigos e pesquisadores que conhecemos em Lyon e que contribuíram em nossa pesquisa, em especial à Núbia Frutuoso, Gimena Perez, Marie Baraud, Paulo Andrade, Cristina Elyote Marques, Sônia Matos e Diane Diaz.

Ao professor Marcelo Câmara dos Santos, pelas contribuições e apoio durante a minha pesquisa de doutorado e desde antes como pesquisador e professor.

Ao nosso colega, professor e pesquisador Abraão Juvencio de Araújo, pelas sugestões e orientações sobre a TAD.

À nossa amiga, professora e pesquisadora Lúcia de Fátima Araújo pelas suas contribuições.

Aos colegas do grupo de pesquisa Fenômenos Didáticos na Classe de Matemática pelas sugestões e contribuições.

Aos nossos colegas, da primeira turma de doutorado em Ensino das Ciências da UFRPE, Gisela Rodrigues, Kilma Lima, Marcos Barros, Nadja Almeida, Rita Patrícia e Suzane França.

Aos professores e colegas do Departamento de Matemática da UFRPE pelo incentivo em participar do doutorado, em especial, aos professores: Cícero Monteiro de Souza, Marny Pessoa Araújo e Ana Paula Guedes de Andrade.

Ao professor Gérard Leloup pela forma especial com que explora o aprendizado da língua francesa, pelo que aprendi com você.

Ao professor Patrick Chevin pelas contribuições na língua francesa.

À minha querida família que sempre contribuiu na minha formação e incentivou a realização do doutorado. Em especial, à minha querida mãe, Maria José Lira Véras de Andrade, que sempre se preocupou com a minha formação, norteando o caminho para o estudo e em especial à apreciação da arte e da cultura, ensinando a ver que o "essencial é invisível aos olhos" (SAINT-EXUPÉRY). Ao meu pai, José Bonifácio Xavier de Andrade, que desde cedo iniciou a minha entrada no mundo do conhecimento, pelos inúmeros debates criados em casa, junto com os meus irmãos nas mais diversas áreas do conhecimento, e em especial à Sociologia, do qual foi professor da UFPE. Aos meus irmãos, com quem sempre aprendi muito e aos demais membros queridos da minha família.

Aos demais amigos e familiares, que de alguma forma, contribuíram para o caminho que trilhei e não foram citados no meu agradecimento.

Em função de ser aluno da Universidade de Lyon 2 e realizar parte da minha pesquisa na França, tive que me ausentar mais de uma vez do Brasil para desenvolver atividades nesse país. Contei em um período com uma bolsa de apoio da FACEPE e em outro período com uma bolsa da CAPES, fundamentais para o desenvolvimento das minhas pesquisas na França, para participar das atividades enquanto doutorando da universidade de Lyon 2 (cursar disciplinas, participar de seminários etc) e atuar no laboratório ICAR ligado à escola doutoral EPIC 485. Assim, gostaria de agradecer às agências financiadoras:

- FACEPE – Bolsa AMD que custeou uma parte de um período de 2 meses na França.
- CAPES – Bolsa que custeou o período mais longo de 1 ano em que estive na França. Bolsa CAPES – PDSE.

Agradecemos à Universidade Federal Rural de Pernambuco pela liberação para realização do doutorado, em especial ao Departamento de Matemática. Ao magnífico Reitor, na época da assinatura do convênio, Valmar Corrêa de Andrade, pela assinatura do convênio e o apoio para realização do doutorado. Ao professor José Carlos Dubeux, que na época da assinatura do acordo era coordenador das relações internacionais e até pouco tempo Pró-Reitor de pesquisa e pós-graduação, pelo apoio dado e pelo importante papel que exerceu no crescimento e ampliação das relações internacionais na UFRPE.

Agradecemos também o importante apoio da Universidade Lumière Lyon 2, da escola doutoral EPIC 485 e ao conselho Regional Rhône-Alpes.

Agradecemos a Deus por tudo.

RESUMO

A Estatística é importante para a educação científica e cidadã e por essa razão ela é adotada nos programas do ensino fundamental e médio de vários países, entre eles, o Brasil e a França. Dois conceitos fundamentais da estatística descritiva são as medidas de tendência central e de dispersão. Partindo de problemas identificados em diversas pesquisas sobre a aprendizagem dessas medidas na educação básica e em cursos de graduação, propomos como hipótese que existe uma relação entre esses problemas e a forma como esse saber é transposto para o livro didático e os programas. Consideramos também que essas medidas devem ser ensinadas de forma articuladas com a dispersão. Nesse sentido, este estudo tem por objetivo a análise da forma como as medidas de tendência central e de dispersão são apresentadas nos programas e em alguns livros didáticos utilizados no Brasil e na França no ensino médio. Para esta investigação, realizamos uma pesquisa bibliográfica. Apoiamos este estudo em diversos teóricos e pesquisas. Destacando em especial a teoria antropológica do didático e a teoria dos campos conceituais. Entre os resultados produzidos, temos a própria proposta de sistematização da pesquisa pela tese, um capítulo sobre o saber científico relativo às medidas de tendência central e de dispersão e a análise da transposição didática dos programas e dos livros que envolvem uma discussão sobre as características desses elementos no Brasil e na França. Os resultados indicam limitações entre os programas e livros selecionados, o que pode indicar que em parte os problemas indicados, nas pesquisas levantadas, estão relacionados à forma como esse conhecimento é transposto nos programas e livros didáticos.

Palavras-chave: medidas de tendência central e de dispersão; transposição didática; teoria antropológica do didático; teoria dos campos conceituais; ensino médio.

Título: Os conceitos de Medidas de Tendência Central e de Dispersão na Formação Estatística no Ensino Médio no Brasil e na França. Abordagem exploratória no quadro da Teoria Antropológica do Didático e da Teoria dos Campos Conceituais.

RÉSUMÉ

La statistique est d'une grande importance pour l'éducation scientifique et citoyenne, et a été adoptée pour cette raison dans les programmes des collèges et lycées dans plusieurs pays, parmi lesquels le Brésil et la France. Les mesures de tendance centrale et les mesures de dispersion sont deux concepts fondamentaux de la statistique descriptive. À partir des problèmes identifiés dans différentes recherches sur l'apprentissage des mesures de tendance centrale et de dispersion dans l'enseignement secondaire et supérieur, nous formulons l'hypothèse qu'il existe une relation entre ces problèmes d'apprentissage et la façon dont ce savoir est transposé dans les manuels et les programmes. Nous considérons également que ces mesures doivent être enseignées en articulation avec la dispersion. Dans ce sens, cette étude se propose d'analyser la façon dont les mesures de tendance centrale et de dispersion sont présentées dans les programmes et dans certains manuels scolaires utilisés dans les lycées Brésiliens et Français. L'objet principal de cette recherche a donc été la réalisation d'une recherche bibliographique. Cette étude s'appuie sur un ensemble de recherches et de théories, et en particulier sur la théorie anthropologique de la didactique et la théorie des champs conceptuels. Les résultats produits incluent une proposition de systématisation de notre recherche de thèse, un chapitre sur le savoir scientifique relatif aux mesures de tendance centrale et de dispersion ainsi que l'analyse de la transposition didactique des programmes et des manuels scolaires qui comportent une discussion sur les caractéristiques de ces éléments au Brésil et en France. Les résultats indiquent des limitations parmi les programmes et les manuels scolaires sélectionnés, ce qui peut indiquer que les problèmes mis en évidence dans les recherches étudiées sont en partie liés à la façon dont cette connaissance est transposée dans les programmes et les manuels scolaires.

Mots-clé: mesures de tendance centrale et dispersion; théorie anthropologique du didactique; théorie de la transposition didactique, théorie des champs conceptuel; Lycée.

Titre: Les concepts de Mesures de Tendance Centrale et de Dispersion dans la Formation Statistique en Lycée au Brésil et en France. Approche exploratoire dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique et de la Théorie de Champs Conceptuels

ABSTRACT

The statistic has a great importance in the scientific and civic education, and was adopted for this reason in the programs of middle and high schools in several countries, among which Brazil and France. Central tendency measures and dispersion measures are two fundamental concepts for descriptive statistic. From the problems identified in various researches about learning central tendencies and dispersion in secondary and higher education, we hypothesize that there is a relation between these learning problems and the way this knowledge is transposed in handbooks and school programs. We also consider that these measures must be taught articulated with dispersion. In that sense, this study offers to analyze how central tendency and dispersion measures are presented in some programs and handbooks used in Brazilian and French high schools. The main objet of this research was the realization of a bibliographical research. This study is built on various theories and researches and in particular the anthropological theory of didactics and the theory of conceptual fields. The results produced include the proper proposition of systematization of the thesis research, a chapter about the scientific knowledge related to central tendency measures and dispersion measures as well as the analysis of didactic transposition of the programs and scholar handbooks that include a discussion about the characteristics of these elements in France and Brazil. The results show limitations among the selected handbooks and programs, which points out the problems highlighted in the studies are partly linked to how this knowledge is transposed in programs and handbooks.

Key-words: Central tendency measures and dispersion measures; anthropological theory of didactics; theory of conceptual fields; high schools.

Title: The concepts of central tendency measures and dispersion in Brazilian and French high schools' statistical training. Exploratory approach within the frame of anthropological theory of didactics and conceptual fields theory.

LISTA DE FIGURAS DO VOLUME I

Figura 1 – Esquema dos objetivos e das operações atribuídos à estatística 34
Figura 2 – Participação de diferentes grupos na Noosfera. 52
Figura 3 – Relação de um membro da equipe da OCEM e a noosfera. 53
Figura 4 – Transposição didática. 62
Figura 5 – Determinação das medidas do retângulo do histograma referente ao intervalo [31; 40[. 74
Figura 6 – Histograma de uma variável contínua. 75
Figura 7 – Histograma: área proporcional ao número de observações existentes no intervalo. 75
Figura 8 – Comparação de duas séries pela posição e pela dispersão: 3 exemplos. 80
Figura 9 – Medidas numéricas. 82
Figura 10 – média como ponto de equilíbrio. 87
Figura 11 – Distância entre um ponto a uma reta. 89
Figura 12 – Distância entre dois pontos. 89
Figura 13 – Distância entre dois pontos no contexto de uma cidade. 90
Figura 14 – Dependência linear da média de um novo valor 97
Figura 15 – Mediana para dados agrupados. 117
Figura 16 – Solução gráfica para determinação da mediana (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p.92) 118
Figura 17 – Solução gráfica com determinação da mediana para os dados da tabela 118
Figura 18 – Classificação das variáveis estatísticas segundo Régnier (2011a) 130
Figura 19 – Emprego da média, mediana e moda em função do tipo de variável. 131
Figura 20 – Relação entre a moda, mediana e média. 134
Figura 21 – Diagrama comparativo da empresa 1 com a 2. 138
Figura 22 – Duas séries de mesma amplitude: A e B. 140
Figura 23 – Três conjuntos de observações de mesma amplitude e mesmo número de efetivos, mas com dispersões diferentes. 141
Figura 24 – Desvios principais e casos especiais. 143
Figura 25 – Diagrama comparativo das empresas 1 e 2 utilizando o desvio padrão como elemento de análise. 157
Figura 26 – Divisão dos dados em quatro partes. 164
Figura 27 – Intervalo interquartil e desvio interquartil. 166

Figura 28 – Média como resultante do nivelamento de todas as observações. 177
Figura 29 – Níveis de codeterminação didática 197
Figura 30 – Exemplo dos níveis de codeterminação para a classe seconde (França) 198
Figura 31 – Apresentação da média em um livro do primeiro ano do ensino médio na França (seconde) – Fr_C1 (p. 134). 210
Figura 32 – Apresentação de um enunciado com a sua solução em um livro do primeiro ano do ensino médio na França (seconde) – Fr_C1.1[A]. 212
Figura 33 – Distribuição uniforme das barras de chocolate para determinar a média. 214
Figura 34 – A média como ponto de equilíbrio. 215
Figura 35 – Via de ensino geral e tecnológica. 227

LISTA DE GRÁFICOS DO VOLUME I

Gráfico 1 – Gráfico de bastões 70

Gráfico 2 – Gráfico de barras vertical (A) e horizontal (B). 70

Gráfico 3 – Gráfico de barras I e II da mesma variável qualitativa nominal. 71

Gráfico 4 – Idade dos empregados de uma empresa A. 72

Gráfico 5 – Histograma segundo Dodge. 73

Gráfico 6 – Histograma da idade dos visitantes de uma homepage. 74

Gráfico 7 – gráfico da função fa = i = 1n[(3-a)2 + (6-a)2 + (9-a)2]. 94

Gráfico 8 – A mediana divide uma curva em duas partes iguais. 119

Gráfico 9 – Gráfico da função fx = 3-x + 6-x + 9-x traçado com auxílio do Excel 124

Gráfico 10 – Série B: Preferência dos clientes de um salão de beleza pela cor dos cabelos. 125

Gráfico 11 – Moda absoluta e relativa segundo Dehon, Droesbeke, Vermandele (2008) 127

Gráfico 12 – Moda para dados contínuos 127

Gráfico 13 – A moda, mediana e média em uma distribuição simétrica dos dados 132

Gráfico 14 – A moda, mediana e média em uma distribuição simétrica bimodal. 132

Gráfico 15 – Distribuição assimétrica à direita. 133

Gráfico 16 – Distribuição assimétrica à esquerda. 133

Gráfico 17– Distribuição ideal moderadamente assimétrica 134

LISTA DE QUADROS DO VOLUME I

Quadro 1 – Determinação da posição dos quartis segundo Régnier (2000a)......................... 163
Quadro 2. Questão aplicada por Merino (2003)... 181
Quadro 3. Questão proposta por Merino (2003). 183
Quadro 4. Questão proposta por Merino (2003). 184
Quadro 5 – Gênero de tarefa, tipo de tarefa, subtipo de tarefa e tarefa................................. 189
Quadro 6 – Praxeologia: Bloco prático-técnico e bloco tecnológico.................................... 193
Quadro 7 – Comparação entre a Educação Básica no Brasil e na França............................. 225

LISTA DE TABELAS DO VOLUME I

Tabela 1 – Efetivos e frequência em uma tabela. 65
Tabela 2 – Tabela associada à distribuição do número de veículos por família. 66
Tabela 3 – Topo da tabela 2 substituindo alguns dos termos pelos apresentados por Dodge (2007a) 66
Tabela 4 – Valor da variável e centro do intervalo (RÉGNIER, 2010, p.48, tradução nossa). 68
Tabela 5 – Idade dos empregados de uma empresa A. 71
Tabela 6 – Tabela com dados do histograma do gráfico 5. 72
Tabela 7 – Idade dos visitantes de uma homepage 74
Tabela 8 – A média como ponto de equilíbrio. 88
Tabela 9 – Minimização dos desvios da média: variação de y em função de a. 94
Tabela 10 – Linearidade da média aritmética 101
Tabela 11 – Idade dos funcionários na empresa A. 113
Tabela 12 – Idade dos funcionários na empresa B. 114
Tabela 13 – Idade dos funcionários na empresa C. 114
Tabela 14 – Participantes de um estudo sobre o uso da internet conforme a idade. 115
Tabela 15 – Série A: Idade dos alunos matriculados nas aulas de reforço de matemática 125
Tabela 16 – Série B: Preferência dos clientes de um salão de beleza pela cor dos cabelos 125
Tabela 17 – Nível de escolaridade dos frequentadores de uma biblioteca pública. 126
Tabela 18 – Idade dos funcionários de uma empresa D. 128
Tabela 19 – Nível de escolaridade dos torcedores do time de futebol A. 130
Tabela 20 – Comparação entre distribuição de alturas barométricas em quatro estações resultantes de observações diárias. 135
Tabela 21 – Distribuição dos salários na empresa E. 135
Tabela 22 – Tamanho ideal de família: levantamento em famílias de baixa renda 136
Tabela 23 – Idade dos funcionários em duas empresas. 137
Tabela 24 – Salários dos funcionários de uma empresa D. 149
Tabela 25 – Salários dos funcionários de uma empresa E. 150
Tabela 26 – Simplificando o cálculo da variância. 151
Tabela 27 – Média e medidas de dispersão. 156
Tabela 28 – Salários dos funcionários de uma empresa F em 2012 161
Tabela 29 – Salários dos funcionários de uma empresa F em 1988 162

Tabela 30 – Resultado da pesquisa realizada por Cazorla (2002) à questão: “o que é a média aritmética?”. 170
Tabela 31 – Resultado a problemas sobre média ponderada aplicado por Cazorla (2002) ... 171
Tabela 32 – Propriedades presentes nas questões propostas por Gitirana et al. (2010). 178
Tabela 33. Tabela com as respostas tal como apresentadas em Merino (2003).................... 182
Tabela 34. Ajustes nos dados da tabela 33. 182
Tabela 35. Respostas à questão do quadro 4. 183
Tabela 36. Tabela apresentada por Merino (2003, p. 164) 184
Tabela 37 – Candidatos ao baccalauréat de 2010, 2011 e 2012 agrupados nas vias geral, tecnológica e profissional. 230
Tabela 38 – Candidatos inscritos nos baccalauréat de 2010, 2011 e 2012 agrupados nas séries científica, econômica e literária. 230

LISTA DE FÓRMULAS DO VOLUME I

Fórmula 1: Fórmula para calcular a frequência (RÉGNIER, 2007, p. 7). 65
Fórmula 2: Média aritmética conforme Kendall e Yule (1948, p. 143)................................. 84
Fórmula 3: Média aritmética conforme Spiegel (1993, p. 67) 84
Fórmula 4: Média aritmética para série estatística não ordenada segundo Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008, p. 76)... 85
Fórmula 5: Média aritmética para série estatística ordenada segundo Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008, p. 76)... 85
Fórmula 6: Média aritmética para dados de população, segundo Mann (2006). 85
Fórmula 7: Média aritmética para dados de amostra, segundo Mann (2006) 85
Fórmula 8: Média aritmética para dados de população segundo Régnier (2007, p. 9). 85
Fórmula 9: Média aritmética para dados de amostra segundo Régnier (2007, p. 9)............... 86
Fórmula 10: Soma dos desvios em relação à média (DEHON;DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p.78).. 86
Fórmula 11: Soma dos desvios em relação à média (DEHON, DROESBEKE E VERMANDELE, 2008, p.80).. 92
Fórmula 12: Soma dos desvios em relação à média (RÉGNIER, 2011a, p.20)...................... 92
Fórmula 13: Soma dos desvios em relação à média (DODGE, 2007a, p. 359). 92
Fórmula 14: Função definida pela soma dos quadrados dos desvios em relação a uma série dada. 93
Fórmula 15: Média aritmética de uma série calculada tendo em vista duas componentes e o número de observações das séries componentes (KENDALL; YULE, 1948, p. 149). ... 95
Fórmula 16: Média aritmética de uma série calculada com base no número de observações e média das suas componentes (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p.81). 95
Fórmula 17: Média aritmética combinada de dois conjuntos de dados (MANN, 2006, p.81). 96
Fórmula 18: Média aritmética a partir de uma nova observação (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p.81).. 96
Fórmula 19: Média aritmética a partir de uma nova observação. 96
Fórmula 20: Média aritmética a partir de uma nova observação. 96
Fórmula 21: Média aritmética da soma das observações de duas séries de igual número de observações é igual à soma das médias destas séries... 97

Fórmula 22: Média aritmética da diferença das observações de duas séries de igual número de observações é igual à diferença das médias destas séries. 97
Fórmula 23: Obtenção da soma das observações de uma série tendo por base a média e o número de observações. (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p.78). 98
Fórmula 24: Linearidade da média ao somarmos um valor às observações. 99
Fórmula 25: Linearidade da média ao subtrairmos um valor às observações......................... 99
Fórmula 26: Linearidade da média ao multiplicarmos um valor às observações. 100
Fórmula 27: Linearidade da média ao multiplicarmos um valor a e somarmos um valor b às observações. 100
Fórmula 28: Linearidade da média ao dividirmos todas as observações por um valor constante... 100
Fórmula 29: Linearidade da média ao multiplicarmos um valor a e/ou dividirmos por um valor c e/ou somarmos a um valor b e/ou subtrairmos um valor d às observações. 101
Fórmula 30: fórmula da distribuição observada segundo Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008, p.83) 103
Fórmula 31: Média da população de acordo com Régnier (2007, p.9)................................ 104
Fórmula 32: Média da amostra conforme Régnier (2007, p.9).. 104
Fórmula 33: Média da população de acordo com Régnier (2007, p.9)................................ 104
Fórmula 34: Média da amostra conforme Régnier (2007, p.9).. 104
Fórmula 35: média aritmética para dados agrupados de população (KENDALL; YULE, 1948, p.144) 105
Fórmula 36: média aritmética para dados agrupados de população (MANN, 2006, p.90).... 105
Fórmula 37: média aritmética para dados agrupados de amostra (MANN, 2006, p.90) 105
Fórmula 38: Média aritmética para dados agrupados de população (RÉGNIER, 2007, p.9) 105
Fórmula 39: Média aritmética para dados agrupados da amostra (RÉGNIER, 2007, p.9).... 105
Fórmula 40: Média aritmética combinada (MANN, 2006, p.81).. 107
Fórmula 41: Média aritmética combinada (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p.81) 107
Fórmula 42: Média aritmética ponderada (MANN, 2006, p. 82) 107
Fórmula 43: Somatório dos pesos de uma média aritmética ponderada (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p.94) 108
Fórmula 44 - Fórmula para determinar o coeficiente de ponderação para o cálculo da média aritmética ponderada 108

Fórmula 45: fórmula da média aritmética ponderada (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p.94) 109
Fórmula 46: fórmula da média aritmética ponderada considerando as frequências como ponderações. Adaptamos da fórmula da média de uma distribuição observada. 109
Fórmula 47: mediana para o número total de observações (n) ímpar (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p.88). 112
Fórmula 48: Mediana para o número total de observações (n) par (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p.89). 112
Fórmula 49: Fórmula para calcular a mediana para dados agrupados (CARVALHO, 2006). 115
Fórmula 50: Fórmula para calcular a mediana para dados agrupados (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p. 92). 117
Fórmula 51: Fórmula para calcular a mediana para dados agrupados (CARVALHO, 2006). 117
Fórmula 52: Soma dos desvios em valor absoluto é mínimo com a mediana (DODGE, 2007a, p. 1326). 122
Fórmula 53: Função formada pelo módulo dos desvios médios, considerando xi cada observação. 123
Fórmula 54: Densidade de frequência de um intervalo. Onde ni corresponde ao efetivo de cada intervalo, N representa o total dos efetivos, h representa a amplitude de cada intervalo 128
Fórmula 55: Relação empírica entre a moda, a mediana e a média (KENDALL; YULE, 1948, p. 155). 134
Fórmula 56. Amplitude onde E = Étendue (francês) = amplitude, x(n) corresponde ao maior valor observado ou ainda valor n considerando os valores ordenados de 1 a n, x(1) menor valor observado (primeiro valor ordenado do menor para o maior). 139
Fórmula 57. Amplitude segundo Dodge (2007a, p.170) 139
Fórmula 58. Amplitude para distribuições agrupadas segundo Dodge (2007a, p.170) 139
Fórmula 59. Medida da amplitude 140
Fórmula 60: Desvio médio absoluto (RÉGNIER, 2012, p.20). 144
Fórmula 61: Segundo momento ou momento de segunda ordem 2 (KENDALL; YULE, 1948). 145
Fórmula 62: Momento centrado de ordem 2 (RÉGNIER, 2012, p.20, tradução nossa). 145

Fórmula 63: Cálculo do momento de segunda ordem (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p. 114). 145
Fórmula 64: Variância sobre a população (RÉGNIER, 2007, p. 12) 146
Fórmula 65: Variância sobre a amostra (RÉGNIER, 2007, p. 12) 147
Fórmula 66: Variância sobre a população (adaptado de RÉGNIER, 2007, p. 12) 147
Fórmula 67: Variância sobre a amostra (adaptado de RÉGNIER, 2007, p. 12) 147
Fórmula 68: Cálculo da variância (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008). 147
Fórmula 69- Cálculo da variância. 148
Fórmula 70: Variância para população (RÉGNIER, 2007, p. 13), substituímos na fórmula V(x) por σ2 148
Fórmula 71: Variância para amostra (RÉGNIER, 2007, p. 13), substituímos na fórmula V(x) por σ2 148
Fórmula 72: Desvio quadrático médio adaptado de Kendall e Yule (1948). 153
Fórmula 73: Cálculo do desvio padrão (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008). 154
Fórmula 74 - Cálculo do desvio padrão (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008). 154
Fórmula 75: Desvio padrão sobre a população (RÉGNIER, 2007, p. 5; p.12) 154
Fórmula 76: Desvio padrão sobre a amostra (RÉGNIER, 2007, p. 5; p.12) 154
Fórmula 77: Desvio padrão sobre a população (adaptado de RÉGNIER, 2007, p. 5; p.12) 155
Fórmula 78: Desvio padrão sobre a amostra (adaptado de RÉGNIER, 2007, p. 5; p.12) 155
Fórmula 79: Desvio padrão sobre a população (RÉGNIER, 2007, p. 5; p.12) 155
Fórmula 80: Desvio padrão sobre a amostra (RÉGNIER, 2007, p. 5; p.12) 155
Fórmula 81: Fórmula para coeficiente de variação (C.V.) proposta com base nos símbolos utilizados por Régnier (2007) para desvio padrão e média. 160
Fórmula 82: Fórmula para coeficiente de variação (C.V.) proposta com base nos símbolos utilizados por Régnier (2007) para desvio padrão e média. 160
Fórmula 83: Medida do intervalo interquartil. 165
Fórmula 84: amplitude semi-interquartil ou desvio quartil (KENDALL; YULE, 1948). 165
Fórmula 85: amplitude semi-interquartil ou desvio interquartil. 165

LISTA DE PROPRIEDADES SOBRE A MÉDIA ARITMÉTICA

PROPRIEDADE (m) 1. A média aritmética é influenciada por valores extremos. 86

PROPRIEDADE (m) 2. A soma dos desvios em relação à média, considerando os seus respectivos sinais é nula (propriedade apresentada por KENDALL; YULE, 1948). 86

PROPRIEDADE (m) 3. A média aritmética como ponto de equilíbrio................................ 87

PROPRIEDADE (m) 4. A média é o valor que está mais próximo de todos os valores. 88

PROPRIEDADE (m) 5. A média dos desvios em relação à média aritmética, considerando os seus respectivos sinais é nula (RÉGNIER, 2011). 91

PROPRIEDADE (m) 6. A média aritmética é o número real que minimiza o quadrado dos desvios de uma série (DODGE, 2007a). 92

PROPRIEDADE (m) 7. A média aritmética de uma série formada por duas componentes pode ser obtida em função das médias das componentes (KENDALL;YULE, 1948). ... 94

PROPRIEDADE (m) 8. "A média da soma total das (ou da diferença total entre as) observações correspondentes de duas séries de igual número de observações é igual à soma (ou à diferença) das médias de suas séries" (KENDALL; YULE, 1948, p.149). .. 97

PROPRIEDADE (m) 9. A soma dos valores de uma série pode ser obtida em função da média aritmética e do número de observações desta série 98

PROPRIEDADE (m) 10. Linearidade da média aritmética 98

PROPRIEDADE (m) 11**.** A média pode ser empregada na estimação de uma quantidade desconhecida considerando a presença de erros nos instrumentos de medição. 101

PROPRIEDADE (m) 12. A média aritmética se limita a operações com variáveis estatísticas quantitativas (discretas e contínuas).. 102

PROPRIEDADE (m) 13. A média é um valor que deve estar compreendido entre o valor máximo e o mínimo das observações.. 172

PROPRIEDADE (m) 14. O valor da média é influenciado pelos valores de cada uma das observações. 176

PROPRIEDADE (m) 15. A média é representativa dos valores usados no cálculo da média. 176

PROPRIEDADE (m) 16. A média como conceito nivelador: representa o valor representativo de todas as observações levadas em consideração para o cálculo da média se elas fossem niveladas. Assim se considerarmos que um aluno obteve ao longo de quatro unidades a nota 7, considerando todas de mesmo peso, seria como se distribuíssemos o total de pontos nas quatro unidades de forma uniforme. 177

LISTA DE OBSERVAÇÕES SOBRE A MÉDIA ARITMÉTICA

OBSERVAÇÃO (m) 1. Em uma média aritmética os valores observados devem ser numéricos. Assim uma escala qualitativa (escala nominal ou ordinal) não possui média aritmética (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008). Desta observação propomos uma propriedade: ... 102

OBSERVAÇÃO (m) 2. A média aritmética é valor típico único para uma série: uma série não pode ter várias médias aritméticas distintas, embora duas séries podem possuir a mesma média aritmética (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008). ... 102

OBSERVAÇÃO (m) 3. Uma média aritmética não corresponde necessariamente a um valor observado. Em um grupo pode não existir um indivíduo cuja medida seja igual à média do grupo (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008). ... 102

OBSERVAÇÃO (m) 4. A média corresponde à mesma unidade utilizada na série. ... 102

OBSERVAÇÃO (m) 5. Ao comparar duas médias elas devem estar expressas na mesma unidade. ... 103

OBSERVAÇÃO (m) 6. Deve-se no cálculo da média considerar todos os valores observados, inclusive o zero. ... 173

OBSERVAÇÃO (m) 7. A média de uma variável quantitativa discreta pode ser um número não inteiro que não faz sentido no contexto dos dados. ... 174

LISTA DE PROPRIEDADES SOBRE A MEDIANA

PROPRIEDADE (md) 1. A mediana distribui a população em duas partes de mesmo efetivo (RÉGNIER, 2007). 119
PROPRIEDADE (md) 2. A mediana não é influenciada por valores extremos (ao contrário da média). (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008). 119
PROPRIEDADE (md) 3. A mediana frequentemente corresponde ao valor de um dos dados, ao contrário da média. 120
PROPRIEDADE (md) 4. A mediana corresponde ao menos a 50% dos valores observados abaixo desta ou acima desta. 120
PROPRIEDADE (md) 5. A mediana é o número real que minimiza o módulo dos desvios de uma série. 122

LISTA DE OBSERVAÇÕES SOBRE A MEDIANA

OBSERVAÇÃO (md) 1. As seis condições de uma medida de tendência central: caso da mediana (KENDALL; YULE, 1948) 121
OBSERVAÇÃO (md) 2. Para o cálculo da mediana é necessário conhecer a distribuição dos dados. 122

LISTA DE PROPRIEDADES SOBRE A MODA

PROPRIEDADE (mo) 1. A moda pode ser usada tanto com variáveis quantitativas como com variáveis qualitativas. Ao contrário da média (quantitativas) e mediana (variáveis quantitativa e qualitativa ordinal).. 128
PROPRIEDADE (mo) 2. Nas variáveis quantitativas discretas e nas variáveis qualitativas, a moda corresponde ao efetivo máximo ou frequência máxima de uma observação;...... 128
PROPRIEDADE (mo) 3. Em uma variável quantitativa contínua, a moda corresponde à densidade de frequência máxima. 128
PROPRIEDADE (mo) 4. Quando temos a moda agrupada em classes de mesmo comprimento, a moda corresponde à classe com maior valor. 128
PROPRIEDADE (mo) 5. Em variáveis quantitativas discretas e variáveis qualitativas, a moda vai corresponder sempre a um valor observado. 128

LISTA DE OBSERVAÇÕES SOBRE A MODA

OBSERVAÇÃO (mo) 1. Uma série pode não ter moda (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008). 129
OBSERVAÇÃO (mo) 2. Ao contrário da média e mediana, podemos ter mais de uma moda em uma série. 129
OBSERVAÇÃO (mo) 3. Podemos ter uma moda com valor zero. 129
OBSERVAÇÃO (mo) 4. Um conjunto de dados pode ter mais de uma moda. Quando ele possui duas modas é chamado de bimodal. Quando este possui três modas é chamado de trimodal. Quando temos um número maior pode ser chamado de plurimodal (DODGE, 2007a).. 129

LISTA DE PROPRIEDADES SOBRE A AMPLITUDE

PROPRIEDADE (a) 1. A amplitude não é influenciada por mudanças na distribuição interna dos dados. Alterando os valores internos, sem alterar o mínimo e máximo valor da série, a amplitude não sofre alteração. 141
PROPRIEDADE (a) 2. A amplitude não indica os valores máximos e mínimos dos intervalos, apenas a diferença entre eles. 141
PROPRIEDADE (a) 3. A amplitude não é influenciada por mudança na unidade de origem. Esta propriedade será discutida com maior detalhe ao tratarmos da variância. 141
PROPRIEDADE (a) 4. Ela é influenciada por valores extremos. Como no cálculo da amplitude considera-se o maior valor e o menor valor, ela inclui desta forma os valores extremos. 141
PROPRIEDADE (a) 5. A amplitude nos dá uma ideia da variabilidade dos dados e serve para comparar a variabilidade de uma variável em duas amostras diferentes. 142

LISTA DE PROPRIEDADES SOBRE A VARIÂNCIA

PROPRIEDADE (var) 1. Tomando a fórmula do momento de segunda ordem, o desvio é mínimo, quando ele é tido em relação à média. Nesse caso temos a variância. 148
PROPRIEDADE (var) 2. A variância não é influenciada pela mudança na unidade de origem (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008). 149
PROPRIEDADE (var) 3. A variância não é influenciada pela soma e subtração 151
PROPRIEDADE (var) 4. A variância é influenciada pela multiplicação e divisão 151
PROPRIEDADE (var) 5. A variância é influenciada por valores extremos. 152
PROPRIEDADE (var) 6. A variância jamais poderá ter valores negativos (MANN, 2006). 152

LISTA DE OBSERVAÇÕES SOBRE A VARIÂNCIA

OBSERVAÇÃO (var) 1. O seu valor pode ser igual à zero (MANN, 2006) 152
OBSERVAÇÃO (var) 2. As unidades de medida da variância são sempre elevadas ao quadrado, embora em alguns casos não faça muito sentido. Por exemplo: a folha de pagamento de uma amostra de cinco empresas é de 230 milhões de reais ao quadrado (reais ao quadrado). O que é real ao quadrado? Ou euro ao quadrado? É preciso esclarecer este contexto aos alunos. 152

LISTA DE PROPRIEDADES SOBRE O DESVIO PADRÃO

PROPRIEDADE (dp) 1. É rigorosamente definido. 157
PROPRIEDADE (dp) 2**.** Baseia-se em todas as observações feitas. 157
PROPRIEDADE (dp) 3. É facilmente calculado. 157
PROPRIEDADE (dp) 4. Permite um tratamento algébrico e é menos afetada por flutuações da amostra. 157
PROPRIEDADE (dp) 5. Não é influenciado pela mudança na unidade de origem. Esta propriedade foi apresentada ao tratarmos da variância. 157
PROPRIEDADE (dp) 6. É influenciado por valores extremos. Tal como a média aritmética, o desvio padrão é afetado por valores extremos. 157
PROPRIEDADE (dp) 7. O valor do desvio padrão não sofre alteração ao somarmos ou subtrairmos um valor constante a todas as observações. 157
PROPRIEDADE (dp) 8. Ao multiplicarmos ou dividirmos um valor constante às observações, o valor do desvio padrão também será multiplicado ou dividido por esta constante..... 158
PROPRIEDADE (dp) 9. Jamais poderá ter valores negativos (MANN, 2006). 158
PROPRIEDADE (dp) 10. Quanto maior o desvio padrão, maior a dispersão em torno da média. O inverso é válido. Quanto menor o desvio padrão, menor a dispersão em torno da média. 158
PROPRIEDADE (dp) 11.Quanto maior o desvio padrão, a média torna-se menos representativa de uma série. 158

LISTA DE OBSERVAÇÕES SOBRE O DESVIO PADRÃO

OBSERVAÇÃO (dp) 1. O seu valor pode ser igual à zero (MANN, 2006)......................... 158
OBSERVAÇÃO (dp) 2. Caso o valor do desvio padrão seja nulo, não temos variação e todas as observações tem o mesmo valor. 159
OBSERVAÇÃO (dp) 3. Caso tenhamos duas séries com exatamente os mesmos valores, teremos a mesma média e o mesmo desvio padrão. Contudo, a recíproca não é válida. Duas séries com a mesma média e o mesmo desvio padrão não possuem obrigatoriamente as mesmas observações (PONCY; GUICHARD;RUSSIER, 2011).. 159
OBSERVAÇÃO (dp) 4. O número de observações maiores em uma série do que em outra não indicam que temos um desvio padrão maior (PONCY; GUICHARD; RUSSIER, 2011). 159
OBSERVAÇÃO (dp) 5. Ao acrescentarmos um novo valor à série, o desvio padrão se altera. Se este valor for igual à média, teremos um valor do desvio padrão menor do que antes da inserção deste valor e, neste caso, o valor da média não sofre alteração. 159
OBSERVAÇÃO (dp) 6. Quanto mais próximo as observações de uma série estão da média, menor o desvio padrão. Dessa forma, se quisermos diminuir o valor do desvio padrão, é necessário modificar os valores da série de modo que fiquem mais próximos da média. Alterando um valor mais afastado da média por um mais próximo da média, a medida do desvio padrão diminui. 159

LISTA DE PROPRIEDADES SOBRE INTERVALO INTERQUARTIL

PROPRIEDADE [Q1;Q3]1. No intervalo interquartil temos aproximadamente 50% das observações de uma série (RÉGNIER, 2007). 164
PROPRIEDADE [Q1;Q3] 2. A medida do intervalo interquartil ou desvio interquartil não é influenciado por valores extremos. 164

LISTA DE OBSERVAÇÕES SOBRE INTERVALO INTERQUARTIL

OBSERVAÇÃO [Q1;Q3] 1. A medida do desvio interquartil depende dos valores dos quartis. Desta forma, o valor do desvio interquartil nem sempre é um número inteiro............. 165
OBSERVAÇÃO [Q1;Q3] 2. Ao multiplicarmos os valores de todos os efetivos de uma série por um número natural, diferente de zero, o valor do desvio interquartil não se alterará, uma vez que a posição dos quartis não se alteram. O mesmo não podemos afimar para os valores das observações (PONCY; GUICHARD; RUSSIER, 2011). 165

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
IASE	International Association for Statistical Education (Associação Internacional para a Educação Estatística).
INED	Institut national d'études démographiques (Instituto Nacional de Estudos Demográficos – França).
INSEE	Institut national de la statistique et des étude économiques (Instituto Nacional da Estatística e dos Estudos Econômicos - França)
ISI	International Statistical Institute (Instituto Estatístico Internacional)
LD	Livro Didático
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MEC	Ministério da Educação (Brasil)
MEN	Ministère de l'éducation nationale (Ministério da Educação Nacional/França)
MTCD	Medidas de Tendência Central e de dispersão
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics (Conselho Nacional de Professores de Matemática)
OCEM	Orientações Curriculares para o Ensino Médio
OD	Organização didática
OM	Organização matemática
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PCN+EM	Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio
PNE	Plano Nacional de Educação
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PNLEM	Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio
SBEM	Sociedade Brasileira de Educação Matemática
SFdS	Société Française de Statistique (Sociedade Francesa de Estatística)
TAD	Teoria antropológica do didático
TCC	Teoria dos campos conceituais
TD	Transposição didática

SUMÁRIO DO VOLUME I

INTRODUÇÃO 30
1.1. JUSTIFICATIVA 32
1.2. OBJETIVOS DE PESQUISA 39
1.2.1. OBJETIVO GERAL 39
1.2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS 40
1.3. HIPÓTESES 40
1.4. ESTRUTURA DA TESE 41
PARTE 1: FUNDAMENTOS TEÓRICOS E ELEMENTOS DE PESQUISA 43
1. TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA 46
1.1. NOOSFERA 48
1.2. O PROGRAMA 55
1.3. SABER ESCOLAR 57
2. EXPLORAÇÃO DO SABER CIENTÍFICO ESTATÍSTICO: O CASO DAS MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL E DE DISPERSÃO 63
2.1. INTRODUÇÃO 63
2.1.1. FREQUÊNCIA E EFETIVOS 64
2.1.2. VARIÁVEL E CLASSE 66
2.1.3. INTERVALO 68
2.1.4. GRÁFICO DE BARRAS E DO HISTOGRAMA 69
2.1.5. O EMPREGO DAS UNIDADES 76
2.1.6. O EMPREGO DO SÍMBOLO DE SOMATÓRIO 77
2.2. AS MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL E DE DISPERSÃO 79
2.3. MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL 80
2.3.1. MÉDIA ARITMÉTICA 83
2.3.1.1. Média aritmética de uma distribuição observada 103
2.3.1.2. Média aritmética para variáveis estatísticas contínuas 104
2.3.1.3. Média combinada (tratada com mais detalhes na propriedade 7) 106
2.3.1.4. Média aritmética ponderada 107
2.3.1.5. Média aritmética amparada 110
2.3.2. MEDIANA 110
2.3.2.1. Determinação da mediana de uma distribuição de efetivos representada através de uma tabela. 112
2.3.2.2. Determinação da mediana para dados agrupados. 115
2.3.3. MODA 124
2.3.4. USO DA MÉDIA, DA MODA E DA MEDIANA 129
2.3.4.1. Tipo de variável 129
2.3.4.2. Forma da distribuição dos dados 132
2.3.4.3. Objetivos da pesquisa 136
2.3.5. OUTRAS MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL 137
2.4. MEDIDAS DE DISPERSÃO 137
2.4.1. AMPLITUDE 138
2.4.2. DESVIO 142
2.4.3. SOMA DOS DESVIOS EM MÓDULO 143
2.4.4. DESVIO MÉDIO E/OU DESVIO MÉDIO ABSOLUTO OU PRIMEIRO MOMENTO 144
2.4.5. SEGUNDO MOMENTO OU MOMENTO DE SEGUNDA ORDEM 145
2.4.6. VARIÂNCIA 146
2.4.7. DESVIO QUADRÁTICO MÉDIO 153
2.4.8. DESVIO PADRÃO 153
2.4.8.1. O desvio padrão e a dispersão 155
2.4.8.2. Propriedades do desvio padrão 157
2.4.9. MEDIDAS ABSOLUTAS DE DISPERSÃO 159
2.4.10. COEFICIENTE DE VARIAÇÃO 160
2.4.11. INTERVALO INTERQUARTIL (INTERVALLE INTERQUARTILE EM FRANCÊS) ... 162
2.4.12. AMPLITUDE SEMI-INTERQUARTIL OU DESVIO INTERQUARTIL 165

2.4.13. RELAÇÃO EMPÍRICA ENTRE O INTERVALO INTERQUARTIL E O DESVIO PADRÃO 166
2.4.14. CONSIDERAÇÕES SOBRE O SABER CIENTÍFICO 167
3. REVISÃO DE LITERATURA DAS PESQUISAS SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM DAS MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL E DE DISPERSÃO 169
3.1. PESQUISAS SOBRE AS MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL 169
4. A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO E AS MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL E DE DISPERSÃO 186
4.1. PRAXEOLOGIA 187
4.1.1. GÊNERO DE TAREFA, TIPO DE TAREFA, SUBTIPO DE TAREFA E TAREFA. 188
4.1.2. TÉCNICA 189
4.1.3. TECNOLOGIA 190
4.1.4. TEORIA 192
4.1.5. OS BLOCOS PRÁTICO-TÉCNICO E TECNOLÓGICO-TEÓRICO 192
4.1.6. TRANSPOSIÇÃO DAS PRAXEOLOGIAS 194
4.1.7. CODETERMINAÇÃO DIDÁTICA 196
4.1.8. ANÁLISE DE UM DETERMINADO TEMA EM MATEMÁTICA 201
4.1.9. ANÁLISE DE UMA ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA 202
5. A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS E OS CONCEITOS DAS MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL E DE DISPERSÃO NOS LIVROS DIDÁTICOS 204
6. O ENSINO MÉDIO NO BRASIL E NA FRANÇA 218
6.1. A EDUCAÇÃO BÁSICA NO BRASIL 218
6.1.1. LEI DE DIRETRIZES E BASES DA EDUCAÇÃO NACIONAL (LEI Nº 9.394, DE 20 DE DEZEMBRO DE 1996) 219
6.1.2. PNE – PLANO NACIONAL DE EDUCAÇÃO 220
6.1.3. PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS 221
6.1.4. ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA O ENSINO MÉDIO 221
6.2. A EDUCAÇÃO BÁSICA NA FRANÇA 222
6.3. COMPARAÇÃO GERAL ENTRE OS DOIS SISTEMAS 224
6.4. O ENSINO MÉDIO NA FRANÇA – (LYCÉE) 226
6.4.1. A VIA PROFISSIONAL 226
6.4.2. VIA DE ENSINO GERAL E TECNOLÓGICA 227
6.4.2.1. Via tecnológica do lycée 227
6.4.2.2. via geral do lycée 228
6.4.3. COMPARANDO AS VIAS 229
CONCLUSÃO DA PRIMEIRA PARTE 232

INTRODUÇÃO

A nossa preocupação com o ensino, a pesquisa e extensão vêm de mais de uma década enquanto professor e pesquisador de uma universidade federal. No caso mais específico das pesquisas com a estatística, o nosso desenvolvimento nesse rico campo iniciou-se com o professor Jean-Claude Régnier que conheci nas atividades de organização do 2º SIPEMAT em 2008. Nessa ocasião, tivemos também um grande prazer de iniciar um longo período de trabalho com a professora Anna Paula de Avelar Brito Lima e da participação no grupo de pesquisa Fenômenos Didáticos na Classe de Matemática. Junto com o professor Jean-Claude Régnier publicamos alguns artigos, frutos de pesquisas em conjunto na área da Didática da Estatística (ANDRADE; RÉGNIER, 2010, 2009a, 2009b). Junto com a professora Anna Paula de Avelar Brito Lima, participamos de diversas atividades, inclusive da organização em conjunto de um livro (ANDRADE, V. L. V. X. de.; ARAÚJO, L. F.; BRITO LIMA, A. P.; LIMA, I. M. da S., 2010) junto ao grupo de pesquisa em Fenômenos Didáticos na Classe de Matemática, no qual a transposição didática e mais recentemente a teoria antropológica do didático (TAD) vem sendo objeto de investigação, tendo em especial como produto as teses de doutorado de Araújo (2009) e Bessa de Menezes (2010) que utilizamos como referência nesta tese.

Outra questão pertinente é o nosso interesse pelo tema. Em nosso percurso dentro da didática da estatística, observamos algumas pesquisas que apontavam para dificuldades na aprendizagem das medidas de tendência central, pesquisas que envolviam da educação básica ao ensino superior. Esses estudos apresentavam uma análise do processo final da transposição didática que pode ser representado pelos traços dos alunos, ou dito de outra forma, a resposta escrita a questões propostas pelos pesquisadores, o que nos levou a pensar sobre o processo de transposição didática. Então surgiu a ideia de investigá-los em uma pesquisa de doutorado. Outro ponto importante era nortear o caminho desta pesquisa. Nesse sentido, tivemos a sugestão da professora Anna Paula de na investigação sobre a transposição didática das medidas de tendência central e dispersão utilizarmos como aporte teórico a teoria antropológica do didático que fazia parte das discussões do grupo de pesquisa, no Brasil (com a defesa de tese de Araújo em 2009) e de Bessa (2010), no mesmo ano que entrei no doutorado. A teoria antropológica do didático acrescenta em nossas pesquisas elementos teóricos que permitem aprofundar a discussão sobre a transposição didática. Acrescentamos a essa teoria, outra teoria também robusta, que foi a teoria dos campos conceituais utilizada pelo nosso orientador da França e que também veio enriquecer a nossa tese de doutorado. Dessa forma, esses elementos teóricos que dão suporte à pesquisa se entrelaçam num percurso profissional de um professor e pesquisador.

A nossa pesquisa se insere dentro do quadro de uma cotutela, assim temos dois vínculos no doutorado, um no Brasil e outro na França. O primeiro vínculo do doutorado é como aluno do Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências e Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE) e o outro vínculo como aluno da Universidade de Lyon 2, na França, na linha de pesquisa UMR 5191 ICAR (Interações, Corpus, Aprendizagem, Representações) ligada à Escola Doutoral ED 485 EPIC "Educação, Psicologia, Informação e Comunicação". O doutorado em Ensino das Ciências e Matemática da UFRPE é novo, sendo esta tese a primeira defendida no programa. Esse programa foi avaliado pela CAPES em nível 4. Já o ICAR foi avaliado em nível 1 (nível máximo no padrão europeu). O convênio de cotutela é feito de aluno por aluno em uma seleção. Ele é assinado entre os dirigentes de cada universidade (no Brasil, o reitor; e na França, o diretor). Esse acordo de cotutela é o primeiro da Universidade Federal Rural de Pernambuco. Ele obriga o doutorando a participar das atividades nas duas universidades. Assim, durante todo o percurso de doutorado, quando não estava fazendo atividades em uma universidade estava na outra. Ao contrário de um estágio doutoral (chamado de doutorado sanduíche), no qual o pesquisador vai coletar os dados. Na cotutela era necessário participar de diversas atividades como doutorando da universidade francesa Lyon 2, além da coleta de dados. Dessa forma, tivemos um ritmo intenso de atividades que gerou um enriquecimento como professor/pesquisador. Na França tivemos a oportunidade de trabalhar em um grupo de pesquisa com doutorandos de quase todos os continentes. Considerando que um doutorado, muito mais que um produto (uma tese), é um processo que qualifica transformando o doutorando em um pesquisador com mais experiências. A vivência enquanto doutorando em cotutela foi bastante rica, ampliando os nossos conhecimentos e contatos em um mundo globalizado do conhecimento e da pesquisa.

1.1. JUSTIFICATIVA

O tema desta pesquisa se insere dentro da didática da estatística. A Estatística conduz a indagações sobre a natureza do conhecimento científico que procura no lugar de uma "verdade", um conhecimento provisório que possibilite a interação com o mundo, permitindo fazer previsões sobre eventos que venham a ocorrer (ANDRADE; RÉGNIER, 2009a). O espírito estatístico se propõe à "renúncia da utilização sistemática da ideia de verdade para procurar dominar a de 'aparente verdade', de plausibilidade" (RÉGNIER; BRAGA, 2008, p. 3). A formação estatística se faz presente em situações do dia a dia em que são necessárias tomadas de decisões, a correta interpretação de uma informação divulgada pelos meios de comunicações, o planejamento familiar etc. Dessa forma, um maior destaque da estatística na educação básica serve de apoio para o desenvolvimento das competências básicas à formação do cidadão, como também à preparação para estudos posteriores.

O ensino de Estatística tem sido uma preocupação desde a criação do International Statistical Institute (ISI) em Londres, em 1885. Em 1948, o ISI cria um comitê específico para a educação que visava formar e criar um número suficiente de técnicos em estatística (BATANERO, 2001). Em 1991, a ISI cria o IASE (International Association for Statistical Education), uma das preocupações do IASE é com o ensino de estatística em qualquer nível de escolaridade (BATANERO, 2001).

A crescente importância da estatística na formação básica, como também a atuação de diversas instituições, como as citadas sobre o ensino de estatística, levou a um crescimento dessa área, inclusive na educação básica. Podemos observar isso em 1980, quando o National Council of Teachers of Mathematics (NTCM) dos Estados Unidos apresentou um conjunto de orientações para o ensino de Matemática no documento "agenda para a ação". Essas recomendações tiveram uma influência em reformas que ocorreram no mundo. Entre os pontos de convergência dessa reforma, temos a "importância de trabalhar com um amplo espectro de conteúdos, incluindo já no ensino fundamental, por exemplo, elementos de estatística, probabilidade e combinatória, para atender a demanda social que indica a necessidade de abordar esses assuntos" (BRASIL, 1998, p.20).

Essas orientações se refletem na proposta dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) que organizam os conteúdos do ensino fundamental em quatro grandes blocos. A estatística é representada pelo bloco **tratamento da informação**. A inclusão desse bloco é destacada como forma de "evidenciar sua importância, em função de seu uso atual na sociedade”. Esse documento destaca ainda a importância para “calcular algumas medidas estatísticas como média, mediana e moda com o objetivo de fornecer novos elementos para interpretar dados estatísticos” (BRASIL, 1998, p.52).

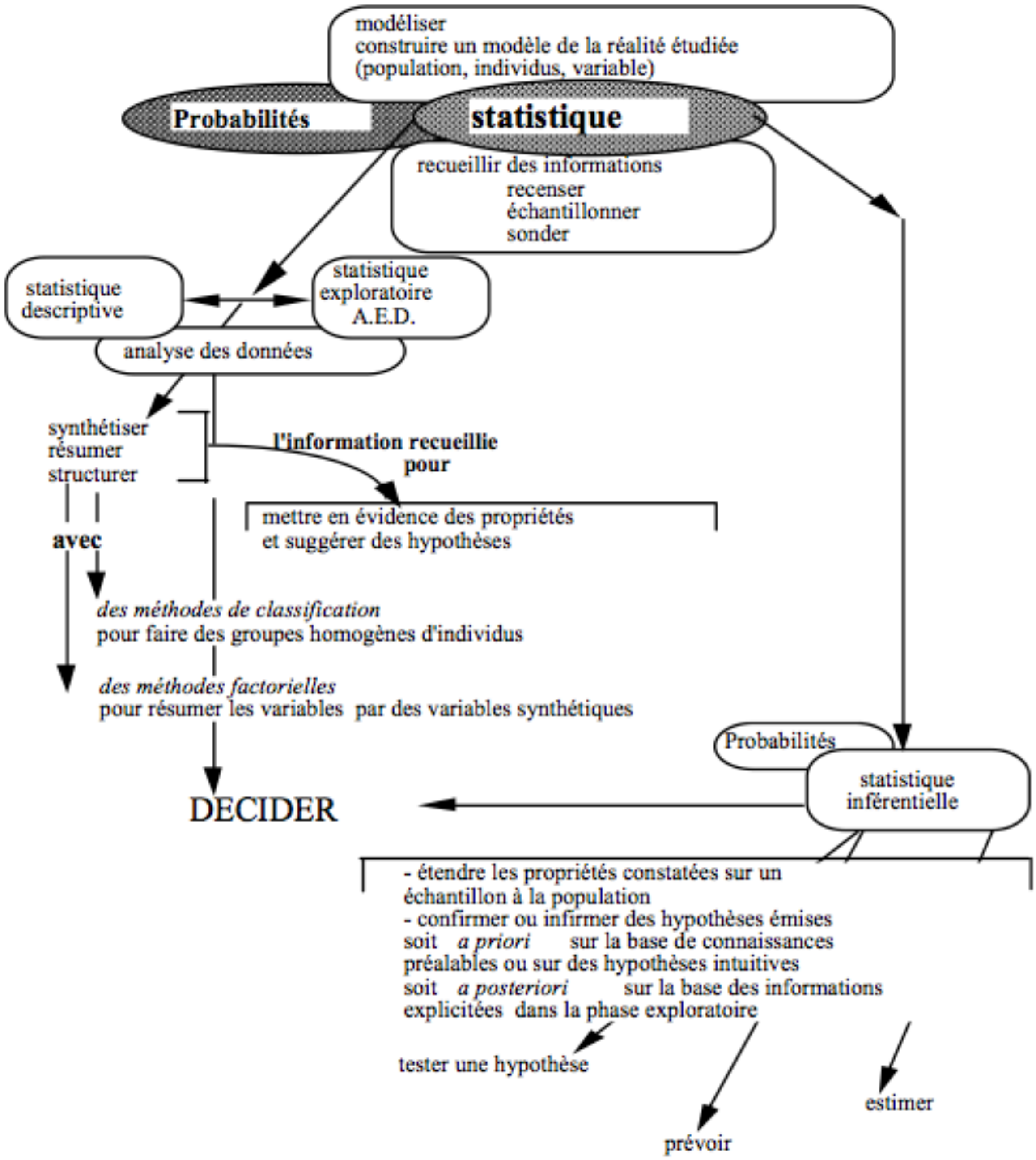
No Brasil, podemos observar nos Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio (PCN+EM) a divisão dos conteúdos do ensino médio em torno de três eixos ou temas, sendo um deles a análise de dados (BRASIL, 2002). Nas Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (OCEM), por sua vez, temos uma proposta de divisão dos conteúdos do ensino médio de Matemática em quatro blocos, sendo um deles a análise de dados e probabilidade.

O NCTM propõe a organização dos conteúdos de Matemática para o ensino fundamental em cinco padrões de conteúdos. Devido à importância já destacada, a estatística forma um desses padrões de conteúdos chamado de **análise de dados e probabilidade**. No ensino médio (high school), a análise de dados e probabilidades continuam como um dos cinco padrões de conteúdo (WALLE, 2009).

Na França, os conteúdos de matemática para o ensino fundamental são organizados em torno de quatro domínios, sendo um deles a **organização e gestão de dados**. No ensino médio (Lycée) a estatística continua sendo um elemento relevante. Os conteúdos de Matemática para o primeiro ano do ensino médio, na França (tronco comum para o lycée geral e tecnológico), agrupa essa disciplina em três grandes temas, um deles é a **estatística e a probabilidade**.

A Estatística pode ser dividida em duas grandes áreas: estatística descritiva e inferencial. Para analisar um grande volume de dados e extrair conclusões é mais fácil quando eles se apresentam de forma resumida. Dessa forma, a estatística descritiva oferece técnicas que permitem de forma sistemática “organizar, descrever, analisar e interpretar dados oriundos de observações ou experimentos realizados em qualquer área do conhecimento” (CAZORLA; SANTANA, 2010, p. 115). Já na estatística inferencial, procura-se partindo de uma amostra, utilizando-se métodos adequados, fazer previsões sobre uma população. Mann (2006, p.4,) destaca que a probabilidade estabelece uma “medida de que um determinado fenômeno venha a acontecer, atua como uma ligação entre a estatística descritiva e a estatística inferencial”. Régnier (1998a) apresenta um aprofundamento dessa descrição, como podemos observar na figura 1. Esse autor esclarece que temos dois níveis. No primeiro nível temos na estatística descritiva o estudo dos modos de utilização e tratamento dos dados, no sentido da produção e descrição das informações. Em um segundo nível, a estatística inferencial “estende estas informações descritas a um domínio de validade não explorada diretamente, com, se possível, um controle de riscos incluindo no raciocínio indutivo" (RÉGNIER, 2000b, p. 194, tradução nossa).

Figura 1 – Esquema dos objetivos e das operações atribuídos à estatística



Fonte: Régnier (1998a, p. 8).

A estatística descritiva deve ser, segundo documentos que orientam o currículo, explorada desde a educação básica. Os dados podem ser apresentados por meio de tabelas, gráficos e medidas descritivas numéricas. As medidas descritivas numéricas são bastante úteis quando precisamos descrever um conjunto de dados. Dentre as medidas numéricas, uma das mais utilizadas é a média aritmética.

A média aritmética, pela sua relevância, está presente nas propostas curriculares para o ensino de Matemática na educação básica em diversos países, inclusive o Brasil. Sendo também um tema abordado em cursos superiores. Cazorla (2002, p.29-30) destaca que “a maioria dos dados relatados em revistas científicas utilizam a média e as inferências lidam, quase que exclusivamente, com médias ou diferenças entre médias”. Ela esclarece que “Isso decorre do fato da média proporcionar indicador que pode ser interpretado como um escore típico que representa um conjunto de dados” (Ibid., p.30). Dessa forma, podemos observar a importância do conhecimento desse conceito e aplicação do mesmo, tanto pelo cidadão como pelo pesquisador, o que reforça a importância do ensino desse tema.

Apesar da importância desse assunto, observamos em diversos estudos problemas com o ensino e/ou a aprendizagem da média (POLLATSEK; LIMA; WELL, 1981; MEVARECH, 1983; GOODCHILD, 1988; STRAUSS; BICHLER, 1988; ZAWOJEWSKY, 1988; LEON; ZAWOJEWSKY, 1990; LI; SHEN, 1992; CAI, 1995; GAL, 1995; MOKROS; RUSSELL, 1995; WATSON, 1996; BATANERO, 2000; CAZORLA, 2002; STELLA, 2003; LIMA, 2005; GITIRANA et al, 2010; KHALIL, 2010; CARVALHO, 2011). Tais pesquisas envolvem desde alunos do ensino fundamental até o ensino superior. Essas apontam para o estágio final de um processo de produção e difusão do conhecimento que inicia na academia e finaliza com o aluno. Um processo interinstitucional: instituições produtoras do saber, instituições de transposição do saber e instituições de ensino.

Esses problemas não se limitam à média, existem estudos como o realizado por Batanero, Mayén e Díaz (2009) com 518 estudantes no México que indicam problemas nas respostas apresentadas pelos estudantes na educação básica a questões sobre mediana. Como também estudos que envolvem a média, mediana e moda (MERINO, 2003; MAYÉN et al, 2007; MAYÉN, 2009; LEITE, 2010; MAYÉN; BATANERO, 2011).

Ao tratarmos das medidas de tendência central, devemos considerar além da média e da mediana, a moda. Nem sempre a média é a medida de tendência central mais adequada para apresentar um conjunto de dados. Em dados qualitativos a moda se apresenta como a mais adequada. Dependendo da forma como os dados se organizam, podemos utilizar a mediana. Dessa forma, não adianta apenas conhecer essas medidas descritivas, é importante saber em que situações utilizá-las e qual a mais adequada. A forma como os dados se apresentam também pode indicar qual medida é mais adequada ou se faz sentido utilizar essas medidas. Em função dessas razões expostas, faz-se necessário também explorar a dispersão.

Apesar da importância das medidas de posição e da assimetria e curtose, as medidas de tendência central e de dispersão são as mais exploradas na educação básica e por essa razão escolhemos como objeto de investigação. Estudos realizados na França (RÉGNIER, 2013) apontam para problemas no ensino superior para o cálculo do desvio padrão, indicando assim problemas com essa medida de dispersão.

Os problemas com o ensino das medidas de tendência central, apresentados em diversas pesquisas que vão desde a educação básica aos cursos superiores, conduziram-nos ao seguinte questionamento: qual o papel dos programas e dos livros didáticos na existência desses problemas? Inicialmente realizamos um estudo sobre esse saber científico (as medidas de tendência central e de dispersão). Um estudo que toma como referência a forma como esse saber é apresentado por alguns estatísticos que são respeitados pela sua produção na área da estatística ou pesquisadores conhecidos na área da didática da estatística. Também foi feito um levantamento de pesquisas sobre o ensino e/ou aprendizagem das medidas de tendência central e de dispersão formando um outro capítulo desta tese. Algumas propriedades e observações sobre esse saber científico foram confrontadas com pesquisas sobre o ensino e/ou aprendizagem aprofundando a discussão. Do saber científico para os programas e livros didáticos temos um processo de transposição didática.

A transposição didática trata das mudanças por que passa o saber científico até chegar à sala de aula, constituindo-se como um saber a ser ensinado. Em um primeiro momento, temos a transposição do saber científico para os programas de ensino e em um segundo momento, temos a passagem desses para o livro didático. A essa fase, Chevallard (1991) chamou de transposição didática externa. O segundo momento, compreendido como transposição didática interna, tem lugar na sala de aula e é realizado pelo professor. Nessa fase, temos como elementos: o professor, o saber (a forma como o professor e o aluno se relacionam com esse saber) e o aluno. Brito Menezes (2006, p. 83) destaca que:

> [...] na relação didática, o professor nem sempre (quase nunca, na verdade) terá acesso ao saber 'original', mas à sua adaptação/deformação, através dos manuais de ensino e livros didáticos e ainda responsável por mais uma adaptação, que acontecerá no seio da relação didática.

Nessa adaptação, influenciam a concepção de como o aluno constrói o conhecimento e também na relação que o professor tem com esse conhecimento. Essa relação faz com que o tempo de exposição (CÂMARA DOS SANTOS, 1997, p.5) e a forma como este conhecimento é apresentado mudem conforme muda o objeto de estudo.

Embora as reflexões fundadas na noção de transposição didática permitam-nos avançar bastante em relação à diferença dos saberes nos vários níveis: comunidade científica, documentos oficiais de ensino, livro didático e sala de aula, entendemos que a análise desse saber em cada um desses níveis exige um aprofundamento que nem sempre conseguimos atingir, ancorando-nos apenas nesse primeiro enfoque de Chevallard.

É o próprio Chevallard (1985, 1991, 1992, 1996, 1999, 2002a, 2002b, 2003, 2009) que nos dá o suporte teórico que permite aprofundar tal análise, ao propor a teoria antropológica do didático e abrir espaço para a análise da praxeologia do saber.

O livro didático tem um papel relevante na transposição didática como podemos observar nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006, p. 86): “o livro didático vem assumindo, há algum tempo, o papel de única referência sobre o saber a ser ensinado, gerando, muitas vezes, a concepção de que ‘o mais importante no ensino da matemática na escola é trabalhar o livro de capa a capa’”. Essa importância do livro na transposição reforça a necessidade de investigação de como as medidas de tendência central são tratadas nos livros didáticos, quais os limites dessa apresentação e possíveis relações com a natureza dos problemas encontrados nas pesquisas investigadas e que podem estar associados à forma como ela é apresentada no livro didático. Considerando que a disposição desse saber a ser ensinado no livro influencia a forma como o docente trata esse saber a ser ensinado e que por sua vez possui um papel importante na apropriação do mesmo pelo discente.

Dessa forma, nesta pesquisa, procuramos analisar além do saber (científico e a ser ensinado) a forma como ele se apresenta nos programas de ensino e nos livros didáticos do Brasil e a França. O nosso foco é a educação básica, mais precisamente o ensino médio. Nossa escolha se deu por diversas razões:

- É no ensino médio que o aluno sistematiza muito do que viu no ensino fundamental;
- Nos PCN+EM e nos livros didáticos do Brasil no ensino médio, observamos uma apresentação mais completa da dispersão;

- Na França[1], as medidas de tendência central e de dispersão são apresentadas no ensino médio (Lycée).

Outra questão que pode ser colocada sobre a nossa pesquisa é porque foi escolhido além do Brasil, a França. Ao tomarmos como referência a TAD, podemos dizer que as instituições de transposição didática, elaboração do livro e do programa são diferentes e mereceram ser investigadas essas diferenças. Quando consideramos do ponto de vista do programa no Brasil, temos orientações e na França, esse programa tem força de lei e possui características diferentes que repercutem no livro didático desses dois países. No caso do livro didático da França, ele deve seguir com um maior rigor o programa, sendo inclusive uma parte desse programa apresentado nesse manual, como forma de mostrar que o livro atende às instruções oficiais. No Brasil, apesar do programa oferecer sugestões, temos um sistema de avaliação do livro didático, o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) que tem um papel fundamental na regulamentação da qualidade desses livros didáticos produzidos no Brasil. Outro aspecto importante é que não se podem considerar as mudanças porque passam o ensino de forma isolada, mas podemos observar a influência dos programas e os pesquisadores de um país sobre o outro. Nos programas que iremos apresentar no Brasil, podemos ver a influência do National Council of Teachers of Mathematics (NTCM) dos Estados Unidos, da Didática Francesa e das pesquisas na França e etc. A França tem uma forte contribuição teórica na área da educação matemática que exerce influência nos programas de matemática no Brasil. Assim, consideramos que comparar os programas e os livros didáticos, considerando suas diferenças e seus aspectos positivos no sentido de contribuição para o aperfeiçoamento de ambos é importante. Outro aspecto é que os problemas que apresentamos no ensino das medidas de tendência central e de dispersão não se limitam ao Brasil, mas também a diversos países, entre eles a França. Por último, dentro do quadro de uma cotutela, o estudo do programa e livro didático do Brasil e da França pode oferecer contribuições às instituições brasileira e francesa envolvidas.

Dessa forma, a nossa pesquisa se restringiu ao ensino médio no Brasil e na França. Neste estudo, investigamos as relações entre os problemas identificados sobre a compreensão e aplicação do conceito das medidas de tendência central e a forma como essas medidas são apresentadas nos programas dos governos brasileiro e francês e em algumas coleções de livros didáticos nesses dois países. Observamos também a necessidade de não se limitar às

[1] As medidas de tendência central são vistas no ensino fundamental na França. Contudo, no ensino médio, elas são vistas de forma mais elaborada junto com a dispersão.

pesquisas que citamos anteriormente sobre as medidas de tendência central e de dispersão, uma vez que essas não abrangem as MTCD como um todo. Assim, com base em algumas das características desse saber científico (levantadas nesta pesquisa) e apoiando-se num referencial teórico consistente, desenvolvemos uma metodologia de análise dos programas e livros didáticos. Entre as teorias utilizadas por nós, nesta pesquisa, destacamos a teoria do antropológico do didático (TAD) que vem sendo utilizada em pesquisas recentes de doutorado em educação no Brasil (ARAÚJO, 2009; BESSA DE MENEZES, 2010) e em outros países como a França (MATHIEU-WOZNIAK, 2005). A TAD também vem sendo objeto de congressos internacionais, sendo realizados até o momento três congressos internacionais sobre a teoria antropológica do didático. O primeiro e o terceiro foram realizados na Espanha nos anos de 2005 e 2010. O segundo congresso internacional sobre a teoria antropológica do didático foi realizado em 2007 na França. Um termo muito utilizado na TAD é o de Praxeologia. O estudo praxeológico pode envolver o estudo do conhecimento matemático (praxeologia matemática) e a maneira como se apresenta o estudo deste tema (praxeologia didática).

Ressaltamos que a nossa proposta de análise, além da TAD, inclui a teoria dos campos conceituais (VERGNAUD, 1990, 1996). Essa última permite ampliar o olhar para as situações que envolvem as questões indicadas nos livros didáticos que se apresentam como geradora de dificuldades na compreensão do conceito das medidas de tendência central e de dispersão ou por outro lado podem permitir ampliar o nível de conceptualização deste conceito. Tomando por referência essas características e justificativas desta pesquisa, passamos a explicitá-la em torno de objetivos de pesquisa.

1.2. OBJETIVOS DE PESQUISA

Tomando por base o que foi exposto, apresentamos o objetivo geral desta pesquisa junto com os objetivos específicos.

1.2.1. OBJETIVO GERAL

Analisar a transposição didática das medidas de tendência central e de dispersão para os programas e livros didáticos de matemática do ensino médio do Brasil e da França, procurando levantar se existem limitações na transposição didática que possam influenciar o processo de ensino-aprendizagem dessas medidas no ensino médio do Brasil e da França.

1.2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Caracterizar o saber científico, o conceito e as organizações praxeológicas das medidas de tendência central e de dispersão;
- Desenvolver uma proposta de análise das medidas de tendência central e de dispersão nos programas e livros didáticos de matemática franceses e brasileiros;
- Analisar a forma como as medidas de tendência central e de dispersão são apresentadas em coleções de livros didáticos de matemática e nos programas do ensino médio no Brasil e na França.

1.3. HIPÓTESES

Partimos de uma hipótese geral:

H_G. Existem limitações na transposição didática das medidas de tendência central e de dispersão para os programas e para os livros didáticos de matemática do ensino médio no Brasil e na França.

Com base nesta, apresentamos hipóteses específicas resultantes do detalhamento da hipótese geral que serão testadas:

H1. Existem limitações na transposição didática das medidas de tendência central e de dispersão para os programas de matemática brasileiros e franceses do ensino médio.

H2. Existem limitações na transposição didática das medidas de tendência central e de dispersão para os livros didáticos de matemática brasileiros e franceses do ensino médio.

H3. As limitações na transposição didática das medidas de tendência central e de dispersão para os programas de matemática brasileiros e franceses do ensino médio são de naturezas diferentes.

H4. As limitações na transposição didática das medidas de tendência central e de dispersão para os livros didáticos de matemática brasileiros e franceses do ensino médio são de naturezas diferentes.

Essas hipóteses indicam que existem limitações. Consideramos que essas limitações podem ser pela ausência ou pouca exploração dos elementos que consideramos em nossa metodologia como importantes para a construção do conceito das medidas de tendência central e de dispersão. Quando colocamos naturezas diferentes, queremos dizer que o que pode ser uma ausência no livro do Brasil, pode ser algo explorado ou pouco explorado no livro da França, em função das diferenças dos programas e dos livros em cada país.

1.4. ESTRUTURA DA TESE

A tese está dividida em três grandes partes.

- Parte 1: Fundamentos teóricos e elementos de pesquisa;
- Parte 2: Problemática e metodologia da construção e tratamento dos dados;
- Parte 3: Resultados, discussões e prolongamentos.

Na primeira parte, tratamos da transposição didática e como ela se insere dentro da nossa pesquisa. Abordamos no segundo capítulo desta parte, o levantamento do saber científico que envolve as medidas de tendência central e de dispersão. No terceiro capítulo, tratamos da revisão de literatura das pesquisas sobre o ensino e aprendizagem das medidas de tendência central e de dispersão (MTCD). No quarto capítulo, abordamos a teoria antropológica do didático que dá um suporte para analisar a transposição didática, das praxeologias e outros elementos dos programas e livros didáticos analisados. No quinto capítulo, tratamos da teoria dos campos conceituais e as MTCD. E como esta teoria pode dar suporte para análise de algumas das situações presentes nos livros didáticos brasileiros e franceses. No sexto capítulo, apresentamos o ensino médio no Brasil e na França e as características dos programas e livros didáticos nos dois países.

A segunda parte desta tese trata da problemática e metodologia da construção dos dados. Ela é dividida em dois capítulos. No primeiro, fizemos uma retomada das questões trazidas na introdução e como a primeira parte foi importante para aprofundar esta discussão. Logo, apresentamos assim uma problematização das questões da tese e retomamos as hipóteses. No segundo capítulo, tratamos da construção e tratamento dos dados. Este foi dividido em duas seções. Na primeira abordamos os programas e na segunda os livros didáticos. Procuramos nestas duas seções descrevemos que elementos serão levados em conta para analise e tratamento dos dados e como ela foi feita. Foram também abordadas as questões da seleção da amostra do programa e do livro, os períodos selecionados, características e codificações dos elementos analisados.

Na terceira parte, apresentamos os resultados, discussões e prolongamentos. Esta parte esta organizada em três capítulos. O primeiro capítulo versa sobre o programa, apresentamos uma análise de como as MTCD estão descritas pelos programas, tratamos da questão da codeterminação didática (TAD), procuramos levantar elementos que pudessem remeter as praxeologias e o desenvolvimento do conceito das MTCD, como também observar os limites destas apresentações comparando sempre a proposta brasileira com a francesa. No segundo capítulo apresentamos os resultados e análises sobre os livros didáticos. Para isto, fazemos uma análise inicial da participação da estatística, da estatística descritiva e mais especificamente das MTCD dentro de sete coleções brasileiras e francesas selecionadas. Indicamos assim como está planejado o ensino nos livros destes dois países, os limites e problemas com esta forma de organização. Na segunda parte, selecionamos uma coleção de cada país, para uma análise mais detalhada das questões apresentadas tanto do ponto de vista da análise praxeológica, como também, das situações que envolvem estes conhecimentos (T.C.C.). No terceiro capítulo, apresentamos o prolongamento das discussões, indicando os limites desta tese e o que pretendemos fazer para dar continuidade à pesquisa iniciada com a tese.

No final da tese, apresentamos uma grande síntese com uma parte que trata da conclusão geral.

PARTE 1: FUNDAMENTOS TEÓRICOS E ELEMENTOS DE PESQUISA

Tomando por base os objetivos e hipóteses desta pesquisa, organizamos a parte 1 em 6 capítulos:

1) Transposição didática;
2) Exploração do saber científico estatístico: o caso das medidas de tendência central e de dispersão;
3) Revisão da literatura das pesquisas sobre o ensino e aprendizagem das medidas de tendência central e de dispersão;
4) A teoria antropológica do didático e as medidas de tendência central e de dispersão;
5) A teoria dos campos conceituais e os conceitos das medidas de tendência central e de dispersão nos livros didáticos;
6) O ensino médio no Brasil e na França.

A nossa pesquisa procurou investigar de que forma as MTCD são apresentadas nos livros didáticos e nos programas de Matemática do ensino médio. Dessa forma, iniciamos essa parte tratando do fenômeno da transposição didática, na qual nos apoiamos nesta pesquisa.

Para investigar a transposição do saber científico, consideramos necessário inicialmente analisar este saber, quais suas características e propriedades. Para isso, recorremos a instituições e estatísticos conhecidos.

Da Rocha Falcão (2008) destaca que "os conteúdos ministrados em sala de aula vêm efetivamente de um contexto de produção do saber, sofrendo transformações e "adaptações" para uso em sala de aula". Na sala de aula, esse saber sofre transformações e aparece através dos livros didáticos, entre outros meios que podem ser usados pelo docente. Esse processo de mudanças continua até o que é aprendido. As pesquisas na área de educação estatística indicam problemas com o aprendizado das medidas de tendência central e de dispersão (MTCD). Assim, consideramos importante levantar esses problemas, alguns deles podem ser aparentemente lógicos para as entidades produtoras do saber. Contudo, eles podem apresentar obstáculos à aprendizagem (RÉGNIER, 2000b, 2011b), necessitando de criações didáticas, observações que informem alguns aspectos dessas medidas e organizações didáticas que levem o aluno a refletir sobre o saber. Dessa forma, algumas das propriedades e observações sobre o saber científico foram balizadas com base nos resultados desta pesquisa, neste capítulo. Este capítulo também serviu de base para certas reflexões sobre o processo de transposição didática.

Ao investigarmos no segundo capítulo deste volume o saber científico relativo às MTCD e noções introdutórias que serviram para delimitar a forma como tratamos alguns termos, representações e conceitos da estatística, destacamos que este saber não é consensual, ou seja, ele pertence a instituições humanas nas quais existem divergências. Para dar suporte a isso, nos apoiamos na teoria antropológica do didático. Um conceito importante nessa teoria é o de instituição. Segundo a TAD, um determinado saber é de uma instituição (que pode ser um grupo de pesquisadores, por exemplo, de uma universidade ou uma entidade como a SFdS). Este saber de uma instituição sofre adaptações para fazer parte de outras instituições. Um outro elemento importante desta teoria são as praxeologias. A noção de praxeologia, tal como formulada por Chevallard (1999) na teoria antropológica do didático, pode ser utilizada para análise das instituições produtoras de saber e de ensino e as suas práticas através de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias. Dessa forma, consideramos que, para analisar as medidas de tendência central e de dispersão nos livros e programas, devemos investigar essas praxeologias. Quando pensamos no ensino, consideramos que as praxeologias não dão conta de tudo. As revisões de literaturas sobre as pesquisas que envolviam a aprendizagem das medidas de tendência central e de dispersão nos conduziram a pensar também sobre o conceito destas medidas e a teoria dos campos conceituais que traz um importante aporte teórico para uma reflexão apoiada no ensino de conceitos.

No quinto capítulo desta primeira parte tratamos da teoria dos campos conceituais. Com base nas pesquisas levantadas, fizemos uma investigação sobre o ensino dos conceitos das medidas de tendência central e de dispersão e como esta teoria poderia fornecer instrumentos para investigar nos livros didáticos e programas, possíveis limitações que poderiam estar associadas à deficiência na construção desses conceitos. As questões levantadas neste capítulo servirão de base para, na segunda parte desta tese, propormos elementos que serão investigados nesta pesquisa.

No sexto capítulo, fizemos uma apresentação do ensino médio no Brasil e na França, suas características, as normas oficiais que tratam da mesma e os elementos que utilizamos para definir que parte do ensino médio será analisado na França, uma vez que mesmo no ensino médio geral, temos na França, ao contrário do Brasil, três percursos definidos a partir do segundo ano do ensino médio.

As conclusões desta primeira parte servirão de base para a segunda parte desta tese apresentada em um segundo volume. Esta segunda parte trata da problemática e da metodologia da construção e tratamento dos dados.

1. TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

O saber científico apresenta obedecendo a uma forma de apresentação e de validação aceita pelo meio no qual ele deve ser apresentado. Este meio é formado por uma comunidade científica e deve, a princípio, estar em acordo com o paradigma aceito por esta comunidade. Quando se trata de um saber em matemática, esse processo deve obedecer às regras de um sistema lógico-dedutivo.

O saber tal como apresentado nas academias precisa modificar-se, transformar-se e sofrer adaptações em um saber a ser ensinado. Esse processo de transformação, de deformação do saber, de maneira que ele adquira uma roupagem didática foi chamado de transposição didática. Neste processo serão selecionados os saberes que deverão ser transpostos. Estes saberes podem não ser a preocupação atual dos cientistas, pode representar outra época na evolução das ciências, com outro paradigma dominante, contudo pode se considerar adequado para um determinado nível de escolaridade. Um exemplo disso é o ensino da mecânica clássica nas aulas de Física do ensino médio. O Teorema de Pitágoras representou em uma determinada época um avanço na matemática. Os Elementos de Euclides (2009) apresentam uma demonstração deste teorema. Atualmente ele é utilizado como ferramenta na resolução de problemas simples e não como um objeto de investigação dos matemáticos. Apesar de não ser um objeto de estudo dos matemáticos, pode ser uma ferramenta para estes. Na Educação Básica, ele é considerado como objeto de estudo.

A ideia de transposição didática foi proposta por Michel Verret (BETTONE et al, 2004) e aparece no seu livro intitulado "temps des études" no qual ele afirma "toda prática de ensino de um objeto pressupõe com efeito a transformação de fato, a transformação prévia deste objeto em objeto de ensino" (VERRET, 1975, p. 140, tradução nossa). Algumas ideias apresentadas neste texto são desenvolvidas por Yves Chevallard na primeira escola de verão em didática da matemática em 1980 (BETTONE et al., 2004).

Devido ao importante papel de desenvolvimento desta ideia por Yves Chevallard (1985, 1991), dando um corpo teórico consistente na análise do fenômeno da transposição didática, a transposição didática é muitas vezes associada a Chevallard. Chevallard (1991) apresenta como uma problemática se considerar, em um projeto social de ensino e aprendizagem, conteúdos do saber científico serem pensados como conteúdos a ensinar. Como se pudéssemos apresentar no primeiro ano do ensino fundamental a matemática que é discutida na academia pelos matemáticos. Como se o processo de elaboração dos programas levassem em conta apenas o saber das academias. A transposição didática vem apresentar a ideia que o saber se modifica quando se transforma em saber a ser ensinado.

Chevallard (1991, p. 39) apresenta uma definição para a transposição didática quando ele afirma que "o 'trabalho de um objeto do saber a ensinar faz um objeto de ensino é chamado transposição didática". Chevallard (1991) apresenta dois níveis de transposição, a "transposição didática em um sentido restrito (stricto sensu)" e a "transposição didática em um sentido amplo (lato sensu)". No primeiro sentido, temos a passagem de um objeto específico do saber que passa por transformações adaptativas para uma versão didática deste objeto. Podemos, por exemplo, ter um conceito apresentado por um matemático e sua versão didática ensinada em um determinado ano do ensino fundamental. No segundo sentido, temos o processo que requer um estudo científico pelos pesquisadores da didática da matemática, da passagem do objeto do saber para um objeto a ser ensinado e deste em objeto de ensino. Chevallard (1991, p.39, tradução nossa) apresenta um esquema sobre essa passagem:

→ Objeto do saber → objeto a ensinar → objeto de ensino → objeto de aprendizagem

Ao abordar a transposição didática, Chevallard (1986, 1991) trata da mudança de um savoir savant para um savoir enseigné. O termo savoir savant numa tradução literal seria saber sábio. Chevallard (2002b, p.1) fala da "evolução do conhecimento científico em matéria de didática". Ao tratar da transposição em matemática, devemos levar em conta não apenas o saber matemático, mas também entre outros saberes o saber em didática. Este saber científico também pode aparecer nos livros didáticos na forma como é organizado o estudo. Ele também pode aparecer na forma como o saber escolar é tratado. Podemos pensar desta forma no saber desenvolvido pelos pesquisadores sobre um determinado saber matemático. Estes saberes também produzem termos próprios que podem ser adaptados para os livros didáticos. Eles podem propor a utilização de elementos das outras ciências, como a experimentação, como o uso de balanças para introduzir a álgebra na escola. O que foge aos princípios da matemática que "joga a carta da dedução e não a da experimentação" (CHEVALLARD, 2002b, p. 14). Dessa forma, na transposição didática em matemática são transpostos não apenas elementos do saber matemático, mas também o saber na área da didática sobre o ensino de matemática.

No caso da estatística, podem ser utilizados outros elementos adaptados ao ensino dessa, como é o caso da balança, para introduzir o conceito de média como ponto de equilíbrio.

Quem participa direta ou indiretamente da passagem do saber científico para o saber a ser ensinado? Chevallard (1991) propõe o nome de noosfera para tratar desta esfera formada por todos aqueles que de certa forma atuam nesta passagem.

1.1. NOOSFERA

O saber a ser ensinado pode entrar em desacordo com o saber científico, uma vez que este muda com o tempo, necessitando de mudanças no saber a ser ensinado. Estas mudanças também podem ser decorrentes das demandas da sociedade, como destacamos ao tratar da introdução da estatística na educação básica. Existem outros fatores que também influenciam as mudanças no saber ensinar, como por exemplo, as mudanças trazidas pelas necessidades do mercado de trabalho, pelo desenvolvimento tecnológico que levam à demanda de desenvolvimento de novas competências e tornam obsoletos conhecimentos ligados à uma época em que certos processos eram feitos pelo homem. Como exemplos deste tipo, temos as réguas de cálculo que deixaram de ser usadas no ensino e nas atividades profissionais dos engenheiros. As tábuas de logaritmos que não fazem mais sentido, uma vez que os artefatos tecnológicos atuais como computadores, máquinas de calcular mais sofisticadas, tablets, entre outros, podem realizar tais cálculos. Algumas mudanças também podem ser impulsionadas por interesse político de apresentar aparentes resultados em uma dada administração. Como exemplo de justificativa de mudanças nos programas, temos a apresentada pelo ministro da educação nacional da França para a atual reforma por que passa o ensino médio neste país. Uma das principais justificativas das reformas é melhor orientar os alunos nas suas escolhas profissionais. Como argumentos temos que a cada ano 50.000 jovens abandonam o ensino médio sem realizar o exame que lhe dá o "atestado" de conclusão do ensino médio e possibilita a entrada na faculdade, o baccalauréat. Outro dado que faz parte das justificativas é que um em cada dois estudantes não obtêm êxito no primeiro ano da universidade. Esses problemas orientam os três objetivos principais da reforma: "uma orientação mais pessoal, progressiva e contínua; um acompanhamento personalizado ao longo de toda escolaridade; uma maior abertura do ensino médio à sua época" (FRANCE, 2010b, p.1, tradução nossa). Estas demandas de mudanças no sistema educativo cria a necessidade de reforma nos documentos oficiais. Neste momento fica mais visível o papel da noosfera.

Fazem parte da noosfera todos que de alguma forma influenciam essa passagem, tais como o ministro da Educação Nacional da França, o presidente da associação dos professores, um professor militante, os representantes da sociedade (os pais dos alunos, os especialistas no ensino de um dado conteúdo). Para Chevallard (1991), a noosfera funciona como os bastidores do sistema de ensino que está sobre a influência da sociedade. Um primeiro produto mais visível do trabalho da noosfera são os programas.

Quem participa da noosfera que influencia as mudanças por que passa a estatística? Essas mudanças são locais ou existem influências de grandes grupos internacionais sobre as mudanças locais? Pelo levantamento que apresentamos a seguir, existem diversas entidades que participam da noosfera. Existe influência de grandes grupos, mas também características próprias de cada país (a realidade social, os grupos políticos, os grupos de pesquisadores, etc.) e das entidades formadas neste país que influencia essas mudanças.

A estatística pelo seu papel dentro da sociedade atual, na qual os indivíduos precisam tomar decisões rápidas com base em diferentes informações, vem sendo colocada em destaque em programas de todo o mundo. O que gerou mudanças de programas em diversos países, como tratamos na introdução desta tese. O documento produzido pelos National Council of Teachers of Mathematics (NTCM) dos Estados Unidos nos anos 80 colocava a importância de se trabalhar com a estatística no ensino fundamental (BRASIL, 1998). No Brasil a estatística foi introduzida através dos PCN (BRASIL, 1998) no ensino fundamental nos anos 90. A introdução da estatística na França na serie científica (dois últimos anos do ensino médio) ocorreu na década passada.

Régnier (2005) coloca em evidência o papel da "praxeologia da estatística" no ensino dessa disciplina . Esta praxelogia da estatística (no sentido usado por Régnier) é formada por um meio sociocultural, no qual a estatística se aprimora e se manifesta "nas instituições universitárias, nas organizações associativas no seio do qual a ciência estatística se desenvolve, seus paradigmas se confrontam, a formação em estatística é organizada (p. 5, tradução nossa). Para exemplificar as sociedades que influenciam este meio, Régnier (2005) apresenta algumas destas entidades profissionais:

- SFdS – Sociedade Francesa de Estatística[2];
- ISI – International Statistical Institute[3];
- IASE – International Association for Statistical Education[4].

---

[2] http://www.sfds.asso.fr
[3] http://www.isi-web.org
[4] O IASE surge em 1991 (MERINO, 2003). Site do IASE: http://iase-web.org

Merino (2003) apresenta outras instituições de algumas países com seções dedicadas a educação estatística como:

- ASA (American Statistical Association);
- AERA (American Education Research Association);
- Royal Statistical Society - Inglaterra;
- Sociedade Estatística Japonesa;
- Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática;
- Sociedad Española de Estadística e Investigación Operativa;
- Sociedad Argentina de Estadística;
- Sociedad Chilena de Estadística;

Podemos observar no IASE as seguintes sociedades associadas:

- Australian Bureau of Statistics – Austrália
- National Bureau of Statistics – China
- Sociedade Portuguesa de Estatística - Portugal
- Higher School of Economics Russian Federation - Rússia
- Instituto d'Estadística de Catalunya (IDESCAT) Espanha
- Eastern Africa Statistical Training Centre (EASTC) – Tanzânia;
- Kharkiv National University of Economics – Ucrânia;
- VSN International Ltd – Reino Unido;
- Royal Statistical Society – Reino Unido;
- Department of Statistics, UCLA - Estados Unidos.

Régnier (2005) destaca também outros meios de manifestações, tais como colóquios nacionais, internacionais e revistas. Acrescentamos também o papel da França do Grupo de Ensino da Estatística (Groupe Enseignement de la Statistique[5]) organizado dentro da SFdS e ligado ao IASE, em que vamos designá-lo pela sigla GES. Esse grupo possui uma revista a "Revue Statistique et Enseignement", além de organizar jornadas e desde 2008, a cada dois anos, um colóquio internacional francófono sobre o ensino da estatística, chamado de CFIES (Colloque International Francophone sur l'Enseignement de la Statistique). O último CFIES ocorreu em 2012. Nele foram apresentados diversos trabalhos sobre estatística na educação

[5] http://www.sfds.asso.fr/70-Presentation_des_objectifs_du_groupe

básica (Ensino/aprendizagem/currículo etc). Assim temos diversos exemplos de entidades que podem influenciar as mudanças no ensino de estatística.

Destacamos no Brasil algumas entidades importantes ligadas à estatística:

- ABE – Associação Brasileira de Estatística[6];
- IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística;
- SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Cazorla (2009) destaca o papel do IBGE para o desenvolvimento da estatística no Brasil. Essa instituição tem como papel oferecer uma visão desse país através de diferentes indicadores, análises realizadas e documentos produzidos com dados estatísticos. No que se refere à produção científica de artigos, ela serve de modelo para publicação de tabelas, conforme orienta a Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) nas normas referentes à produção acadêmica, como as normas atuais: NBR 15287 (ABNT, 2011b), que tratam de informação e documentação de projetos de Pesquisa; NBR 14724 (ABNT, 2011a), que trata da informação e documentação de trabalhos acadêmicos.

A ABE possui uma revista e boletins que segundo Cazorla (2009) são de cunho técnico, não publicando matérias de artigos relacionados ao Ensino de Estatística. A ABE possui um evento nacional chamado Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística (SINAPE). Em 2006, a ABE criou uma divisão relacionada à educação Estatística. Cazorla (2009) ao tratar do SINAPE destaca que: "são poucos os trabalhos que abordam os problemas de ensino-aprendizagem de conceitos estatísticos, à luz das teorias de aprendizagem, ou ainda que os relacionem aos aspectos afetivos, tais como atitudes, ansiedade dentre outros aspectos".

A SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática) tem tido uma forte atuação no ensino de Matemática na educação básica. Tendo criado em 2001 um grupo de trabalho específico da educação estatística, o GT12 (Grupo de trabalho ensino de probabilidade e estatística). Através das suas revistas e eventos nacionais (ENEM), internacionais (SIPEM) e organizados pelas diretorias locais, observa-se a apresentação de trabalhos ligados à educação estatística.

De outro lado, muitos ligados a este primeiro grupo temos os grupos de pesquisa que estão ligados à academia. Nestes grupos, estão pesquisadores da área de estatística que

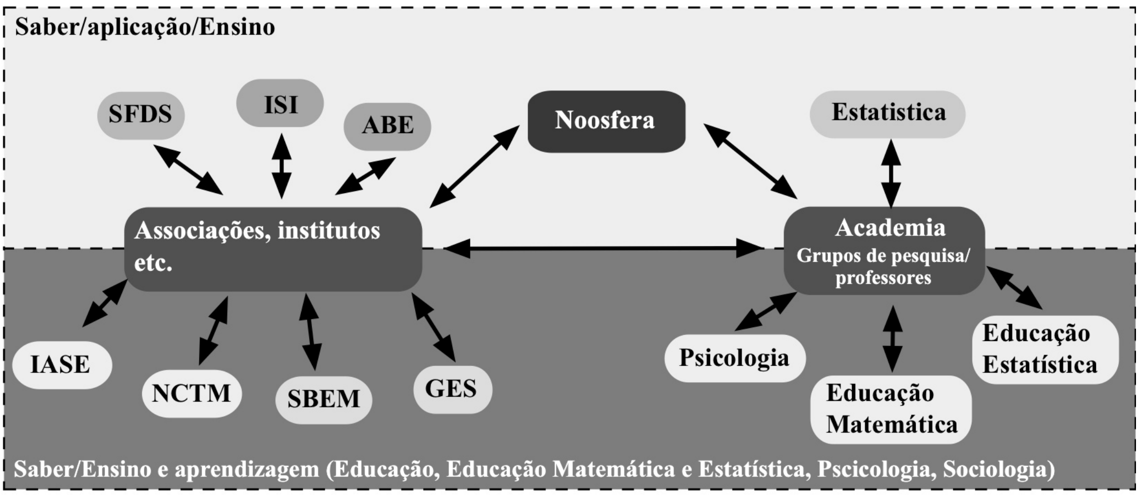
[6] http://www.redeabe.org.br

desenvolvem pesquisas ligadas a essa disciplina e sua aplicação (fazendo a ligação entre a estatística matemática e a estatística aplicada a diversas áreas do conhecimento) como também relacionadas ao ensino. Grupos da área da educação matemática e da educação estatística e da psicologia que desenvolvem pesquisas ligadas ao ensino e à aprendizagem de estatística.

Cazorla (2009) também destaca a atuação da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação (ANPED), em que esta organiza reuniões anuais. Em 1999 foi criado um grupo que trata da educação matemática (GT19). Segundo levantamento realizado por Cazorla (2009) o GT19 entre 2000 e 2004 aprovou 92 trabalhos para as reuniões anuais da ANPED, entre estes trabalhos, 11 eram ligados ao ensino de Estatística.

Na figura 2, procuramos representar estas ligações. Além do que já comentamos, acrescentamos mais uma divisão na figura 2. Na parte superior organizamos os grupos ligados aos matemáticos e estatísticos que produzem pesquisas na área da matemática e estatística (sobre o saber sábio), contudo estes grupos também estão ligados ao ensino destas disciplinas, sobretudo o ensino superior. Na parte de baixo, os grupos ligados aos processos de ensino-aprendizagem, a educação (em suas diversas áreas que podem estar relacionadas ao ensino de estatística), a educação matemática e estatística, a psicologia. Questões como a afetividade, compreensão de conceitos estatísticos, o meio social em que vive o aluno e o seu papel na aprendizagem de conceitos estatísticos, atitudes, entre outros ficariam mais ligados a este segundo grupo. Evidente que esta divisão não é rígida, pois existem pesquisadores que atuam nestes dois grupos. Na França o GES está vinculado à SFdS.

Figura 2 – Participação de diferentes grupos na Noosfera.



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Podemos observar a participação destes grupos nos programas. Tomemos como exemplo as Organizações Curriculares Nacionais ou OCEM (BRASIL, 2006) cuja parte trata do conhecimento matemático que engloba também o ensino de estatística. O documento de matemática teve a participação de 4 consultores e 7 leitores críticos. Para exemplificar, selecionamos 2 consultores e 1 leitor crítico. Tomemos então como exemplo de consultor o professor Marcelo Câmara dos Santos que tem uma participação importante na SBEM, um pesquisador respeitado na área da educação matemática, que foi professor do Colégio de Aplicação da UFPE e atua no programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (Edumatec) entre outras atividades. Levantamos, indicadas na figura 3, algumas ligações atuais ou anteriores deste pesquisador.

Figura 3 – Relação de um membro da equipe da OCEM e a noosfera.

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Podemos observar nestes vínculos, ligações com o meio profissional ligado à educação matemática (SBEM), ligação forte com a academia, ligação como professor com a educação básica e com os professores que ensinam nessa modalidade de ensino. Como pesquisador podemos ver a sua atuação junto a órgãos que fomentam a pesquisa, junto a um programa de pós-graduação e como líder de um grupo de pesquisa, dentre outras ligações que não incluímos.

Como leitor crítico temos o professor Paulo Figueiredo que foi presidente da SBEM, teve e tem uma atuação marcante na área da educação matemática, além de fazer parte também do grupo formado pelos matemáticos. Temos também o professor Paulo Cezar Pinto Carvalho que faz parte do Instituto de Matemática Pura e Aplicado (IMPA) com linhas de pesquisa na área de análises de imagens médicas, modelagem e visualização, realidade virtual, modelagem geométrica e física. Este faz parte do grupo formado pelos matemáticos, atua como pesquisador e professor dentre outras atribuições. Dessa forma, os 3 exemplos citados estão ligados tanto à academia como a determinadas instituições ligadas a produção, ao ensino e a pesquisas relacionadas a matemática. Além destes 11 consultores que podem ter pontos de vistas diferentes, existem outras influências, demandas e pressões externas que devem ser consideradas na elaboração do programa.

Podemos observar o papel da noosfeera na França, por exemplo, nas mudanças que ocorreram no programa em 1999 na qual foi introduzida na classe première e terminale S (segundo e terceiro anos do ensino médio da via científica) a estatística e probabilidade[7], estas mudanças foram realizadas pelo Conselho Nacional dos Programas (FRANCE, 2000). No dia 23 de abril de 2005 foi criado na França o Alto Conselho da Educação Nacional ligado ao Ministério da Educação Nacional do Ensino Superior e da Pesquisa. Ele tem como objetivo formular proposições sobre o programa, sobre a pedagogia, a organização, os resultados do sistema educativo e a formação de professores. Desta forma, este conselho tem uma participação decisiva nas mudanças nos programas. Este é composto por três pessoas designadas pelo presidente da republica, duas pelo presidente do senado, duas pelo presidente da assembleia nacional, e duas pelo presidente do conselho econômico, social e ambiental. A cada ano ele deve remeter um relatório ao presidente da republica com os resultados do sistema educativo bem como as experiências colocadas em prática. Com este fim este conselho é assistido por um comitê de consulta formado por organizações sindicais, profissionais, de pais dos alunos, de associações e todas as pessoas que atue nos domínios dos quais se exige sua competência.

A atuação de pesquisadores da área de educação, na elaboração dos programas, também norteia o nosso olhar para as pesquisas em educação compartilhada por pesquisadores desta área. Apontam também para problemas ligados ao ensino e aprendizagem, ao currículo, aos livros didáticos e que de certa forma devem ser levadas em consideração na análise dos programas e dos livros didáticos. Em função das características do nosso estudo, centraremos na próxima etapa em estudos ligados às medidas de tendência central e de dispersão.

Uma segunda etapa da transposição ocorre nos livros didáticos, observamos nesta etapa a participação de outros agentes:

[7] No programa anterior de 1992 tínhamos apenas a probabilidade que era vista junto com a álgebra.

- O Ministério da Educação ou equivalente em cada país e as suas politicas ligadas ao livro didático;
- No Brasil, o Programa Nacional do Livro Didático é responsável por avaliar e selecionar livros que atendam a um padrão mínimo de qualidade. Os livros aprovados nessa avaliação poderão ser selecionados para serem adotados pelas escolas públicas;
- As editoras que incluem a equipe de marketing procuram produzir um material que irá atrair a escolha dos professores, como também realizar estudos sobre o que motiva a escolha do livro pelo professor;
- Os alunos que influenciaram o trabalho das editoras e dos professores e autores de livros escolares;
- Os professores que escolheram os livros que devem ser adotados;
- Outros agentes que terão participação no processo, tais como: diretores de escolas, proprietários de escolas particulares, equipes pedagógicas das escolas formadas por professores e outras pessoas como pedagogos, psicólogos etc;
- Os autores e a equipe multidisciplinar responsável pela concepção, elaboração do livro e das mudanças que serão implementadas nas novas edições.

1.2. O PROGRAMA

No programa, temos informações sobre que elementos do saber devem ser considerados no ensino. Esses constituem uma primeira etapa do processo de transposição didática. Eles podem orientam e/ou definir o que devem ser abordados nos livros, o que deve ou pode fazer parte do currículo escolar.

Os programas são elaborados fora da escola para sua aplicação nessa. No caso do Brasil, os programas podem sofrer adaptações em um detalhamento nos governos estaduais e prefeituras.

Chevallard (1985) tomando como referência o sistema de ensino francês, faz algumas reflexões sobre o papel do programa. O programa não se trata de um quadro vazio, ele já vem preenchido, e algumas vezes com excesso de informações, o que dificulta o cumprimento total do mesmo. Cabe ao professor desenvolver meios específicos para o seu cumprimento. No caso de outros profissionais como o encanador ou um mecânico, esses não têm que desenvolver meios específicos para realizar um conserto de uma peça defeituosa, eles precisam realizar esse conserto. No caso do professor, será que é diferente? O professor precisa realizar sua tarefa. Contudo ao contrário dos outros dois ele atua em um jogo com dois jogadores (enquanto os outros atuam sozinhos ou ainda contra a natureza) o que é comparado por Chevallard como o trabalho de um general de exército. O docente "joga" com o aluno. O general com o "inimigo". Para o sucesso no "jogo" faz-se necessário a participação dos dois jogadores (docente e discente). Chevallard (1985, p. 8, tradução nossa):

> Como o docente, o aluno tem suas tendências, intenções, estratégias. E o professor não pode se comprometer absolutamente com nenhum objetivo determinado. No máximo ele pode se comprometer a desenvolver, de maneira "correta", certos meios didáticos colocados a sua disposição, e fazer com mais ou menos talento. Paradoxalmente talvez, o docente não tem como missão obter dos alunos que eles aprendam, mas de fazer com que eles possam aprender. Eles têm por tarefa, não de cuidar da aprendizagem – que por natureza fica fora do seu poder – mas de cuidar da criação das condições de possibilidade da aprendizagem.

Dessa forma, como avaliar se os meios oferecidos pelo professor foram adequados ou se, por outro lado, foram as escolhas feitas pelos alunos que resultaram em uma possível ausência de êxito? Os alunos não são objetos do mundo físico que possam ser esculpidos por um artista. Eles são indivíduos que podem, por escolhas pessoais, recusar-se a aprender, recusar-se a envolver-se nas tarefas e nos processos desenvolvidos tendo em vista o seu aprendizado. Como avaliar os "jogadores" envolvidos no processo de ensino-aprendizagem? Caso uma parcela pequena dos alunos não tenha conseguido êxito, poderemos pensar em isentar o professor? Por outro lado, se a maioria dos alunos tiveram problemas e não se desenvolveram como esperado, podemos atribuir a responsabilidade ao professor? Contudo, Chevallard (1985) aponta uma exceção a isso. Caso isso se repita em outras salas com outros professores de forma generalizada, o professor deixa de ser o foco e passa-se a questionar os meios didáticos ou ainda os programas. Chevallard (1985, p.8-9) esclarece que "o programa é apenas um "atualizador" (ou, diz respeito às partes "novas" do programa, um operador) da transposição didática. Atrás do programa, que é apenas um sinal e um índice, existe a formidável pressão da transposição didática". Para esse autor, o programa representa apenas limitações de algo infinitamente mais amplo resultante da transposição didática.

Os sinais e os problemas identificados em diversas pesquisas realizadas em diversos países sobre as medidas de tendência central e de dispersão suscitaram a nossa pesquisa que procurou identificar nos elementos da transposição didática, tais como o programa, as limitações e possíveis causas desses problemas.

Contudo, em geral, não são os programas que entram na sala de aula, mas o livro didático. Estes manuais organizam os programas, ordenando os temas em uma dada sequência. Consideramos relevante estudar o livro que representa mais uma etapa do processo de transposição e que chega até à escola. Em vista disso, o livro didático se insere dentro do saber escolar. A seguir, procuraremos tratar deste saber escolar.

1.3. SABER ESCOLAR

O saber científico possui um meio próprio de produção que pode ser representado pelas universidades, pelos centros de pesquisa. Para sua divulgação temos como meios as teses, dissertações, artigos publicados em revistas, congressos, simpósios etc. O saber escolar se diferencia deste, mas possui um meio próprio de apresentação que são as escolas. O saber a ensinar precisa se adaptar a este meio que possui uma estrutura própria de ordená-lo. Possui um tempo próprio que começa no início do ano letivo (no Brasil em fevereiro, na França em setembro) e tem um período de duração. Ele deve se transformar a cada nível escolar atendendo a uma programação. Dessa forma, a programação e sequência de temas vistos no primeiro ano do ensino médio devem ser diferentes do segundo ano e etc.

Quando trata do saber escolar, Chevallard (1991, p.58) apresenta alguns elementos extraídos de Verret[8] (1975) que caracterizam este saber que são:

- Desincretização do saber;
- Despersonalização do saber;
- Programabilidade do saber;
- Publicidade do saber;
- Controle social das aprendizagens;

Segundo Ferreira (2008) o termo sincretismo corresponde à "tendência à unificação de ideias ou de doutrinas diversificadas e, por vezes, até mesmo inconciliáveis". No sentido oposto temos o termo apresentado desincretização (tradução do termo original em francês désyncrétisation) que representa a divisão de teorias, de saberes em várias áreas, temas, assuntos bem delimitados. Dessa forma, temos a divisão do que se pretende ensinar na escola em disciplinas. Cada disciplina se divide em domínios (na matemática temos como exemplo

[8] VERRET, Michel. Le temps dês études. Paris: Champion, 1975. 837 p. Tese apresentada na Universidade de Paris V.

de domínios a geometria, a álgebra etc), estes por sua vez em setores, temas e assuntos. Essa divisão ocorre, embora de uma forma diferente no saber científico. São as especialidades e os campos de pesquisa que surgem com o desenvolvimento da ciência. Em algumas áreas faz-se necessário agrupar especialistas de áreas diferentes como nas pesquisas sobre nanotecnologia aplicada ao desenvolvimento de medicamentos, em que vão se trabalhar pesquisadores de vários campos diferentes.

A despersonalização do saber consiste em apresentar um saber sem os percursos que conduziram o cientista a esse, utilizando uma forma de apresentação e justificativa adequada a sua exibição na academia, de modo a poder fazer parte de determinadas instituições produtoras desse saber.

No caso da Matemática, este saber tal como apresentado na comunidade científica, deve apresentar uma estrutura lógica que pressupõe a dedução. Não se aceitam provas por indução. Um matemático não aceitaria como prova que todos os números entre 0 e 30 seriam divisíveis por 5, se apresentarmos um experimento em que são utilizados os números 5, 10, 15, 20, 25 e 30. A atividade matemática não é apenas a realizada pelos matemáticos, mas constitui uma atividade humana, “uma descoberta em matemática pode, na verdade, ocorrer por indução sendo o processo de prova posterior” (CARRAHER; CARRAHER; SCHLIEMANN, 2010, p.12). Quando tratamos da matemática escolar, a forma como os temas são desenvolvidos não são necessariamente de forma dedutiva, embora se procure depois na institucionalização determinar leis mais gerais, verificar a inconsistência de uma hipótese levantada por alguns alunos que desconsideraram outros elementos não identificados em uma atividade proposta pelo professor.

A programabilidade do saber consiste na apresentação segundo uma estrutura racional e progressiva de apresentação de uma disciplina. Essa programação pode obedecer a um critério que impõe um certa ordem na apresentação dos conteúdos e pode também trazer a ideia de pré-requisito (para se estudar a operação de multiplicação é necessário antes estudar a soma e a subtração). Esta programação muda de acordo com o ano escolar e pode também levar a sérios problemas.

Na década de 90, a geometria era apresentada no final de muitos livros didáticos, o que levava a aumentar "a probabilidade dela não vir a ser estudada por falta de tempo letivo" (LORENZATO, 1995, p. 4). Essa forma de apresentação foi apontada como um dos problemas para a deficiência na formação dos alunos, alguns destes que vieram a se tornar professores. Pavanelo e Andrade (2002, p.80) neste sentido, identifica como uma das justificativas para a deficiência dos professores, nesta área, o fato deles "terem aprendido pouco de geometria enquanto alunos".

A programabilidade está presente no planejamento anual no qual se deve prever o atendimento de uma carga horária definida, dividida em dias letivos, cada dia de aula é dividido em um tempo para cada aula, os assuntos devem ser organizados para serem vistos dentro desta sequência temporal. Uma coisa não prevista nesta programação é que o tempo de ensino é diferente do tempo de aprendizagem. Cada aluno tem um ritmo próprio, cada turma por sua vez também tem um ritmo e nem sempre a programação se adequa aos diferentes ritmos das diferentes turmas dos diferentes alunos. Pais (1999, p. 32) esclarece que na "prática tradicional é possível identificar uma certa ilusão pedagógica que consiste em desconsiderar a distância entre esses dois tempos". Câmara dos Santos (1997) esclarece que a relação que o professor tem com o saber (maior proximidade ou distanciamento deste) faz com que o tempo de exposição do mesmo mude.

Publicidade do saber trata-se na definição explícita do saber, nela deve conter a extensão deste saber a ser ensinado. Podemos observar nos programas uma explicitação de que saberes devem fazer parte do saber ensinado na escola. No livro didático, isto aparece de forma mais detalhada.

Outro aspecto relevante é o controle social da aprendizagem. Esta regulação e avaliação podem ser utilizadas para apresentar um diagnóstico pontual que pode servir para fazer inferências sobre o atual estado do sistema de ensino. Ela pode servir também para identificar problemas e conduzir a tomada de decisões no sentido de melhoria do sistema didático. Isto pode ser feito por um controle interno realizado pelo professor que por sua vez deve traduzir este controle em uma avaliação explícita apresentada à escola que deve constar no currículo do aluno. A avaliação do professor é submetida a um controle externo da escola e dos órgãos de fiscalização da mesma, e também a um controle social dos pais dos discentes. Podemos também observar instrumentos externos de avaliação. Na França, a conclusão do ensino médio é atestada por um certificado que também possibilita o acesso à universidade. Para obtê-lo, o aluno precisa se submeter a uma prova que não se trata de uma avaliação realizada pelos professores com os quais estudou. No Brasil, temos também avaliações externas como, por exemplo, as realizadas para o ensino fundamental como a prova Brasil[9], a provinha Brasil[10], e para o ensino médio como o ENEM[11].

Chevallard (1991) esclarece que existe um trabalho externo visível da transposição didática em um trabalho interno realizado dentro do sistema de ensino que tem como principais elementos o professor, o aluno e o saber. Como produto desse trabalho externo, nós temos os programas e depois destes os livros didáticos. Os livros didáticos embora produzidos externamente estão presentes no interior da sala de aula, sendo usado pelo professor e pelos alunos dentro do processo de transposição didática interna.

Apesar do livro didático ser um produto da transposição didática externa, ele exerce um importante papel na transposição didática interna. O seu papel se torna mais visível na transposição didática interna, uma vez que ele organiza o programa em capítulos, apresenta uma concepção de ensino que norteia a forma como deve ser organizado cada capítulo, apresenta questões sobre o assunto, orientações para o professor de como tratar o ensino de um determinado tema.

Na produção do livro estão presentes além do autor, uma equipe técnica formada por diagramadores, por especialistas em comunicação etc. Essa estrutura de produção do livro tem um forte retorno comercial para as editoras que os produzem. Por isso, o contato com os professores e a sensibilização às necessidades dos professores, alunos, pais dos alunos, pesquisadores em educação que analisaram as produções dos livros didáticos torna-se relevante. Além disso, deve-se ater aos programas para que os manuais escolares sejam considerados adequados. Desta forma, tal como no programa, os livros didáticos sofrem uma influência da noosfera para sua produção. Ao contrário dos programas, os livros não são um único produto, eles mudam de acordo com os autores, editoras etc.

No Brasil, um elemento mais visível de controle dos livros didáticos, por parte do Ministério de Educação, trata-se do Programa Nacional do Livro Didático. As políticas voltadas para o livro didático tiveram início em 1937 com a criação do Instituto Nacional do Livro (INL) por Getúlio Vargas. Atualmente, o processo de compra e seleção dos livros didáticos é norteado pelas avaliações no ensino fundamental e para o ensino médio, realizadas respectivamente pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM).

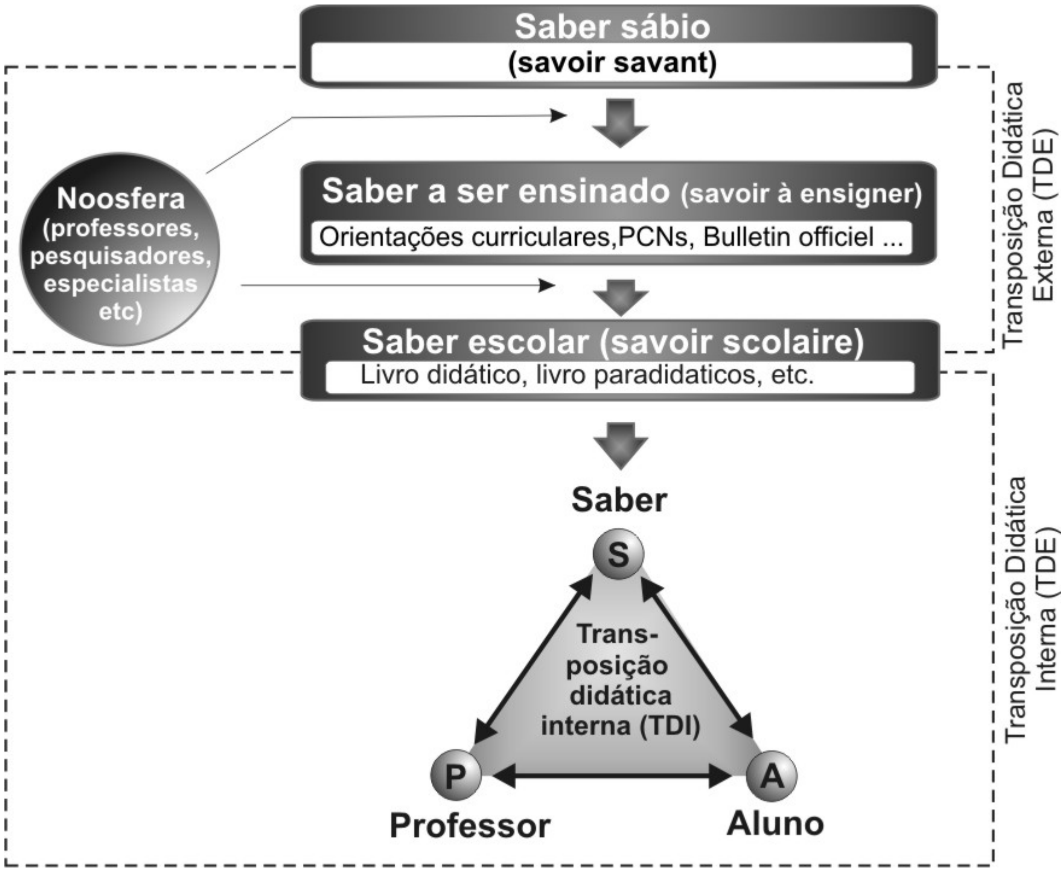
---

[9] Para avaliar a competência leitora e matemática aplicadas no quinto e no nono ano do ensino fundamental.
[10] Utilizado no diagnóstico em Língua Portuguesa e Matemática dos alunos no início do processo de aprendizagem.
[11] Exame Nacional do Ensino Médio.

Nestas avaliações são selecionados os livros que atendem aos requisitos do edital do MEC. Os livros considerados aprovados constarão em um documento no qual são tecidos uma avaliação dos mesmos, elencando os pontos positivos e negativos. A lista dos livros aprovados junto com as avaliações é apresentada em um documento. Este documento torna-se público sendo disponibilizado na web para consulta dos professores ou de qualquer outra pessoa. Os professores da rede pública devem se ater a essa lista para a seleção dos livros indicados pela escola. Os professores e demais profissionais da rede particular de ensino podem tomar esta indicação como referência na escolha dos livros adotados. Desta forma, os autores dos livros didáticos devem procurar atender às exigências deste programa e elaborar um produto que seja bem aceito pelos professores. Neste processo, podemos observar a força da noosfera na produção do livro.

Na figura 4, apresentamos uma representação simplificada do processo de transposição. Conforme apresentamos nesta figura, temos um duplo papel da noosfera que atua tanto na passagem do saber científico para o saber a ser ensinado, como também para alguns elementos do saber escolar, como é o caso do livro didático, que vai estar presente dentro da sala de aula, no sistema didático. O papel e a influência dos atores e instituições da noosfera mudam do programa para os livros didáticos.

Figura 4 – Transposição didática.



Fonte: desenho elaborado pelo autor da tese.

No próximo capítulo abordaremos o primeiro elemento da figura 4, o saber sábio que trata esta pesquisa: as medidas de tendência central e de dispersão.

2. EXPLORAÇÃO DO SABER CIENTÍFICO ESTATÍSTICO: O CASO DAS MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL E DE DISPERSÃO

Organizamos este capítulo em uma introdução na qual destacamos a forma como direcionamos a pesquisa bibliográfica realizada para organização deste capítulo e a apresentação de alguns tópicos que consideramos relevantes. Em seguida trataremos desse saber propriamente dito.

2.1. INTRODUÇÃO

Para tratar do saber científico nós recorremos a diversas publicações que tratam deste. Como critério de seleção, além de uma análise prévia da publicação, selecionamos entre estas, algumas produções de autores respeitados que validassem o trabalho. Dessa forma, recorremos a autores como o britânico Maurice Kendall (1907-1983). Este autor é considerado uma importante referência na área de estatística, cuja importante contribuição para a teoria estatística o levou a receber a mais alta honraria da Royal Statistical Society, a medalha Guy de ouro. Este pesquisador recebeu também das Nações Unidas pela sua contribuição à teoria estatística a medalha Peace. Outro autor bastante conhecido no meio é o britânico Udny Yule, agraciado com a medalha Guy de ouro pela Royal Statistical Society. Utilizamos obras mais recentes como referência, como os trabalhos de Jean-Claude Régnier, membro da Societé Française de Statistique (SFdS) este foi no período de 8 anos presidente do grupo de Ensino da Estatística da SFdS, com várias publicações na área da educação (mais de 160) e em especial na área de educação estatística. Ele é também professor da Universidade de Lyon 2 e membro do laboratório ICAR (nível 1, na França). Utilizamos também uma publicação de Catherine Dehon (Doutora em Estatística pela universidade de Bruxelas e professora dessa universidade) sobre elementos de estatística. Duas publicações sobre estatística de Yadolah Dodge (uma delas um dicionário de estatística), professor emérito da universidade de Neuchâtel na Suíça, professor de estatística dessa universidade e com diversas publicações na área, além de outros autores que serviram de base para escrever este capítulo. Também tomamos como referência um documento do IBGE pela sua importância dentro da estatística no Brasil. Ao tratarmos da transposição didática em estatística, nesta tese, destacamos a influência das sociedades estatísticas, assim como dos estatísticos na definição deste saber e também seu papel no processo de transposição didática.

Centramos este capítulo na estatística descritiva para tratar das medidas de tendência central e procuramos dar uma apresentação tendo em vista sua comparação com os programas e os livros didáticos do ensino médio. Assim, esta apresentação deste saber é delimitada pelos objetivos desta pesquisa. Outro aspecto que destacamos é que o saber compartilhado pelos estatísticos não está livre de divergências como qualquer área do conhecimento. Em função disso, antes de tratar das medidas de tendência central e de dispersão, apresentamos algumas notas introdutórias que serviram para delimitar a forma como tratamos alguns termos, representações e conceitos. Consideramos assim pertinente defini-los e justificar o emprego que damos ao mesmo. Dessa forma trataremos a seguir de:

- Frequência e efetivos;
- Variável e classe;
- Intervalo;
- Diagrama de coluna e histograma;
- Emprego das unidades;
- Emprego do símbolo somatório.

2.1.1. FREQUÊNCIA E EFETIVOS

Consideramos importante delimitar o uso do termo frequência e efetivo em nosso trabalho. Dodge (2007a, p. 216, tradução nossa) procura separar a frequência em frequência absoluta e frequência relativa. A primeira corresponde ao "número de aparições de uma observação ou de resultado de uma experiência". Régnier (2007) chama de efetivos a quantidade de indivíduos relativos a um resultado, este resultado pode ser um valor ou modalidade. Desta forma, podemos ter $n_1, n_2, \dots, n_p$ os efetivos que estão relacionados às observações $x_1, x_2, \dots, x_p$. Assim efetivo para Régnier corresponde à frequência absoluta para Dodge.

A frequência relativa para Dodge seria a relação entre o número de aparições dividido pelo total de observações. Isto corresponde ao que Régnier (2007) chama de frequência. Se utilizarmos o termo apenas frequência, pode-se gerar dúvidas em relação ao que se está querendo dizer se adotarmos a denominação de Dodge (2007a), mas se fizermos a distinção como apresentada por Régnier (2007) evitaremos esta dúvida. Para calcular a frequência podemos utilizar a fórmula 1, onde k=1,...p e n_k representam o número de efetivos. O total de efetivos pode ser $\boldsymbol{N}$ para população ou $\boldsymbol{n}$ para amostra.

$$f_k = \frac{n_k}{efetivo\ total} \quad (1)$$

Fórmula 1: Fórmula para calcular a frequência (RÉGNIER, 2007, p. 7).

Na tabela 1, usando os termos de Régnier (2007), temos a distinção entre efetivos e frequência, adaptado de uma tabela apresentada por Régnier (2011a, p.15, tradução nossa). Nesta tabela o N pode ser substituído por n se for amostra. Se estiver em percentuais, o 1 deve ser substituído por 100.

Tabela 1 – Efetivos e frequência em uma tabela.

Efetivos	n_1	n_2	...	n_k	...	n_p	N
Frequência	f_1	f_2	...	f_k	...	f_p	1

Observamos em Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) a utilização também dos termos efetivo e frequência como apresentados por Régnier. Estes autores acrescentam ainda efetivo acumulado à esquerda e à direita. Apresentamos a tabela 2, adaptada de Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) com estas designações em cima dos símbolos indicando o significado associado. Consideramos interessantes estes símbolos, uma vez que permitem distinguir, por exemplo, n_j de efetivo de n amostra, como também N_j de efetivo acumulado de N de população. Apresentamos na tabela 3, apenas o topo da tabela 2 substituindo alguns dos termos pela classificação adotada por Dodge (2007a), inclusive o símbolo para frequência acumulada f_a adotado por este autor.

Tabela 2 – Tabela associada à distribuição do número de veículos por família.

Variável (carros p/família)	Efetivos	Frequência		Efetivos acumulados	Frequência acumulada		Efetivos acumulados à direita	Frequência acumulada à direita	
x_j	n_j	f_j	%	N_j	F_j	%	N_j^*	F_j^*	%
0	2	0,2	20,0	2	0,2	20,0	10	1	100,0
1	5	0,5	50,0	7	0,7	70,0	8	0,8	80,0
2	2	0,2	20,0	9	0,9	90,0	3	0,3	30,0
3	1	0,1	10,0	10	1	100,0	1	0,1	10,0

Fonte: Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008, p. 46), acrescentamos os percentuais à tabela original.

Tabela 3 – Topo da tabela 2 substituindo alguns dos termos pelos apresentados por Dodge (2007a)

Variável (carros p/família)	Frequência absoluta	Frequência relativa		Frequência absoluta acumulada	Frequência relativa acumulada		Frequência absoluta acumulada à direita	Frequência relativa acumulada à direita
		f	%		$\mathrm{f_a}$	%		

Podemos observar em diversas publicações o emprego do termo frequência sem distinção, ou seja, se é absoluta ou relativa, o que leva à necessidade de uma interpretação do que se quer dizer em função das características dos dados na tabela. Tomemos como exemplo Dodge (2007a), em outro trecho do mesmo livro no qual ele distingue frequência absoluta de relativa. Este pesquisador usa também o termo frequência na definição de histograma, contudo ele não utiliza a distinção apresentada por ele mesmo deixando em princípio a dúvida sobre qual frequência ele está se referindo.

Apresentamos a seguir dois termos elementares em estatística que consideramos interessante explicitá-los: variável e classe.

2.1.2. VARIÁVEL E CLASSE

Kendall e Yule (1948, p.109) esclarecem que “uma medição numérica se aplica unicamente a uma quantidade que pode apresentar mais de um valor numérico. De outro modo, a operação perderia sua razão de ser. Uma tal quantidade é chamada de variável”. Dessa forma não faz sentido explorar os dados estatísticos sobre a idade de uma turma cujos alunos têm a mesma idade. O próprio termo variável indica que é o que varia. Estas quantidades medidas podem ser contínuas ou discretas (ou descontínuas). Quando estas podem assumir qualquer valor são contínuas. Tomemos como exemplo de variável contínua o peso das maçãs de uma amostra dessa fruta. Neste caso, a limitação dos valores depende apenas dos instrumentos de medição e das necessidades do pesquisador. As variáveis que assumem apenas valores discretos são descontínuas ou discretas. Como exemplo desse tipo de variável, temos o número de quartos por casa. Não teremos como medição 1,53 quartos, mas 1 quarto, 2 quartos etc.

Outra noção fundamental que destacamos é a noção de classe. A classe é formada por todos os indivíduos que possuem um atributo[12]. Assim, uma classe como ter idade de 25 anos, é formada por todos os indivíduos que possuem este atributo. Algumas classes são dicotômicas como o sexo (M/F), já outras, não. Os dados de uma classe não dicotômica podem ser organizados em classes dicotômicas. Tomemos por exemplo a idade. Os indivíduos podem ser organizados em indivíduos que possuem até 18 anos e com mais de 18 anos. Algumas vezes a classificação dicotômica limita os dados. Dessa forma, podemos classificar em múltiplas classes. Assim, poderíamos agrupar os indivíduos de um estudo em um intervalo de classe[13]. No exemplo da idade, cada intervalo pode ter a amplitude de classe[14] de 10 anos, como também podemos ter intervalos de amplitudes diferentes. No exemplo das maçãs, as maçãs poderiam ser organizadas em intervalos de classes de mesma amplitude que poderiam corresponder a 0,020 Kg. As frequências de cada intervalo são chamadas de frequência de classe (KENDALL, YULE, 1948). Neste caso, estes autores estão utilizando o termo frequência no sentido de efetivos absoluto. Assim, poderíamos utilizar o termo efetivo como utilizado por Régnier (2007), designando assim efetivo de classe, não recaindo na dúvida se trata de frequência absoluta ou relativa. O efetivo de classe é composto por todos os indivíduos considerados na pesquisa, cujas medidas correspondessem às incluídas no intervalo de classe. As variáveis discretas determinam a sua amplitude de classe. Assim, se contarmos o número de quartos por casa, o intervalo de classe é um quarto (KENDALL; YULE, 1948).

Ao tratarmos de variável e classe, também descrevemos a importância de se trabalhar com intervalos. A seguir trataremos deste tema.

---

[12] Isso pode ser visto com mais detalhes na teoria dos atributos (KENDALL e YULE, 1948).

[13] Essa classificação observamos em Kendall e Yule (1948). O termo original em inglês usado por estes autores é "class-interval" para designar cada intervalo.

[14] O termo "amplitude de classe", segundo Régnier (2007), corresponde à largura de um intervalo. Assim, a amplitude do interval [0,020 kg; 0,040 kg[é 0,040 kg – 0,020 kg = 0,020 kg (no exemplo das maçãs). Kendall e Yule (1948, p. 110) utilizam o termo "largura do intervalo de classe" (width of class-interval).

2.1.3. INTERVALO

Uma forma utilizada pelos matemáticos para representar um intervalo é apresentada a seguir:

[10; 20] – fechado em 10 e 20 ou podemos dizer que: $x \in [10; 20] \rightarrow 10 \leq x \leq 20$.

]10; 20] – aberto em 10 e fechado em 20, logo: $x \in]10; 20] \rightarrow 10 < x \leq 20$.

[10; 20[- fechado em 10 e aberto em 20, logo: $x \in [10; 20[\rightarrow 10 \leq x < 20$.

]10; 20[- aberto em 10 e 20, então: $x \in]10; 20[\rightarrow 10 < x < 10$.

Podemos encontrar o uso em diversos livros de matemática. Esta forma permite determinar com precisão o que entra ou não em um dado intervalo. Régnier apresenta esta notação matemática e esclarece como determinar o centro do intervalo:

Tabela 4 – Valor da variável e centro do intervalo (RÉGNIER, 2010, p.48, tradução nossa).

Valor da variável	$[x_1, x_2[$	$[x_2, x_3[$	...	$[x_k, x_{k+1}[$	...	$[x_p, x_{p+1}[$
Centro do intervalo	$c_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}$	$c_1 = \frac{x_2 + x_3}{2}$		$c_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$		$c_1 = \frac{x_p + x_{p+1}}{2}$

Kendall e Yule (1948, p.105), utilizam outro símbolo, no qual desconsidera a necessidade de identificar se o intervalo é fechado ou aberto, uma vez que isto não é levado em conta no cálculo do centro do intervalo. Assim, estes autores apresentam a seguinte notação (extraímos de uma tabela apresentada pelos mesmos):

90 – 120

120 – 130

Essa mesma forma de notação é apresentada em outras obras e/ou autores como Kendall e Stuart (1977), Dehon, Droesbke e Vermandele (2008), Mann (2006), Spiegel (1993), Levin e Fox (2004), Batanero (2001), Carvalho (2006).

Observamos em Cazorla e Santana (2010, p. 25) uma combinação destas duas notações:

[2,0 – 3,0[

[3,0 – 4,0[

Em documento oficial da Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE, 1993, p. 22) temos outra notação na qual é indicada qual extremidade do intervalo é aberta ou fechada:

$w \vdash z$ que segundo o documento representa “w a menos de z”;
Ou ainda:
$w \dashv z$ que indica “mais de w a z”.

Podemos observar a adoção desta norma do IBGE em: Novaes e Coutinho (2009, p.74):

$0 \vdash 12$

$12 \vdash 24$

Outro tópico que consideramos relevante tratar é o gráfico de barras e o histograma.

2.1.4. GRÁFICO DE BARRAS E DO HISTOGRAMA

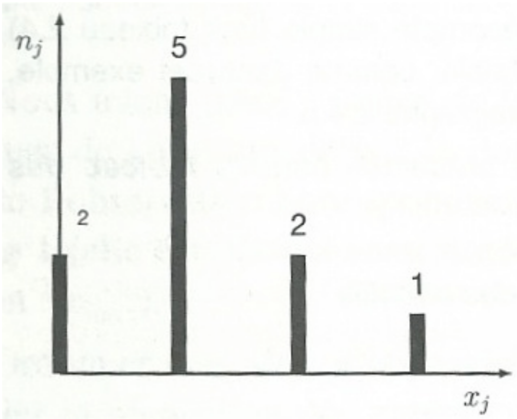
Existem diversas formas de representação gráfica de dados, dentre estas destacamos três apresentados por Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008):

- Diagrama de bastões (no original em francês “diagramme en bâtons”)[15] ;
- Diagrama em barras ou colunas (no original em francês “diagramme en barres ou en tuyaux) [16];
- Histograma dos efetivos ou das frequências (em francês “histogramme des effectifs ou des fréquences”).

As duas primeiras são aplicadas em variáveis discretas. A terceira é utilizada em variáveis contínuas. Dentro dessa classificação, o gráfico de bastões é constituído por segmentos perpendiculares ao eixo da abscissa constituído pelos valores das variáveis (x_J) cuja espessura não tem nenhum sentido estatístico e cuja altura depende dos valores dos efetivos no eixo das ordenadas (n_j). No gráfico 1, temos um exemplo desse tipo de gráfico.

[15] Podemos observar em Cazorla e Santana (2010) o uso do termo “gráfico de bastões”.
[16] A tradução literal seria diagrama em barras ou tubos. Observamos o seu uso em textos no Brasil, como “gráfico de barras ou diagrama de barras” (MANN, 2006), “gráficos de barras” (LEVIN e FOX, 2004) e “gráfico de barras ou colunas” (CAZORLA e SANTANA, 2010).

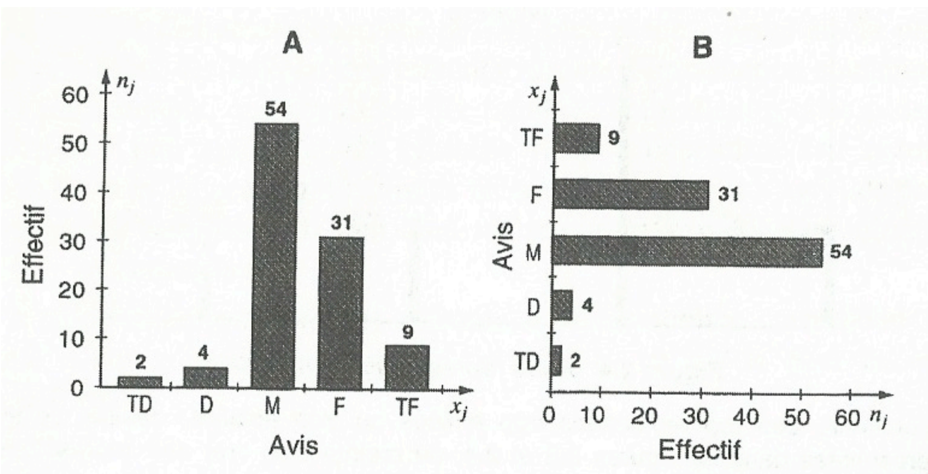
Gráfico 1 – Gráfico de bastões



Fonte: Imagem de Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008, p.40).

Os gráficos de bastões são recomendados por estes autores para variáveis quantitativas. Para variável qualitativa em que a diferença entre dois valores não tem significado, estes autores indicam que pode-se usar o gráfico de barras. No lugar de um segmento, o gráfico de barras é constituído por retângulos, que como o anterior a sua largura, não tem nenhuma significação estatística. No gráfico 2, temos o exemplo de dois gráficos de barras referentes a um aviso pedagógico: muito desfavorável (TD), desfavorável (D), médio (M), favorável (F) e muito favorável (TF). O primeiro com barras verticais (A) e o segundo com barras horizontais (B). Como se trata de uma variável qualitativa ordinal é necessário ordenar a apresentação dos dados.

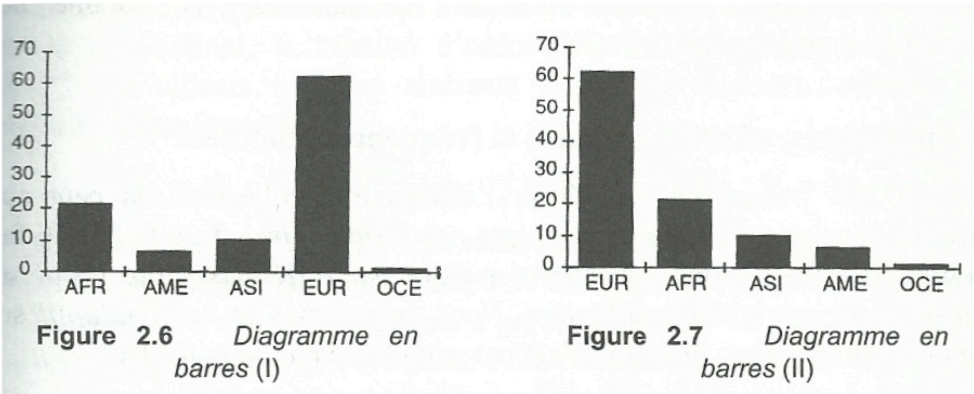
Gráfico 2 – Gráfico de barras vertical (A) e horizontal (B).



Fonte: Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008, p.42).

No gráfico 3, temos uma variável qualitativa nominal, na qual não existe uma ordem na apresentação das colunas, assim temos dois gráficos com ordens diferentes de apresentação. Trata-se da distribuição da origem geográfica (África, América, Ásia, Europa, Oceania).

Gráfico 3 – Gráfico de barras I e II da mesma variável qualitativa nominal.



Fonte: Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008, p.43).

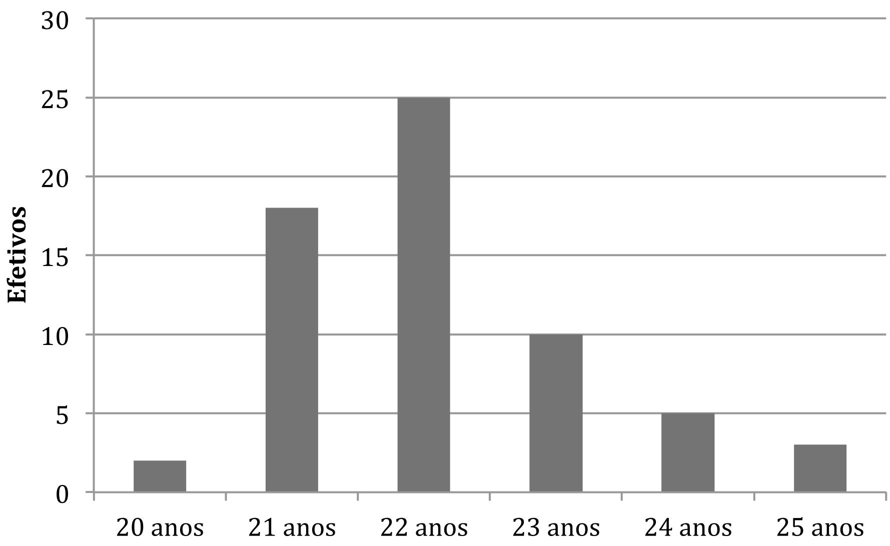
Podemos também ver essa forma de classificação em outros autores, como em Dodge (2007b) que acrescenta outras subcategorias como gráfico de barra simples, gráfico de barras múltiplas (para comparar diversas variáveis), gráfico de barras compostas. Contudo não existe um consenso. Régnier (2007) utiliza apenas o termo 'diagramme en bâtons' (diagrama de bastões) em que aplica tanto para variáveis quantitativas discretas como variáveis qualitativas, cuja representação equivale ao diagrama de barras para Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008). Régnier também considera que a largura dos retângulos não tem sentido estatístico. Contudo, ele esclarece que a altura é proporcional tanto ao efetivo (como usado por DEHON, DROESBEKE e VERMANDELE, 2008), como também a frequência. Tomando por base a definição de Régnier, apresentamos um gráfico de barras para variável quantitativa discreta (gráfico 4) construído com base nos dados da tabela 5. Uma outra proposição que vai em oposição às classificações apresentadas é a de Kendall e Yule (1948) que consideram o diagrama de coluna ou histograma como a mesma coisa.

Tabela 5 – Idade dos empregados de uma empresa A.

	Idade (em anos)					
	20	21	22	23	24	25
Efetivos	2	18	25	10	5	3

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Gráfico 4 – Idade dos empregados de uma empresa A.



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Outra forma de representação é através do histograma. Segundo Dodge (2007a) um histograma é uma representação gráfica para uma distribuição de dados agrupados, sendo formada por um conjunto de retângulos. Esse autor acrescenta que a base do retângulo está associada ao intervalo de cada classe e a superfície do retângulo representa a frequência de cada classe. Desta definição vem um primeiro questionamento: Dodge classifica a frequência em absoluta e relativa. Então de que frequência ele trata ao definir a superfície do retângulo? Podemos tentar responder esta dúvida observando a representação de histograma feita por este autor. Na tabela 6[17], temos os dados apresentados por Dodge (2007a) para construção de um histograma. Ele não faz uma distinção na tabela entre frequência absoluta e relativa. Pelos dados percebe-se que se trata de frequência absoluta. No gráfico 5, temos a representação do histograma segundo este autor.

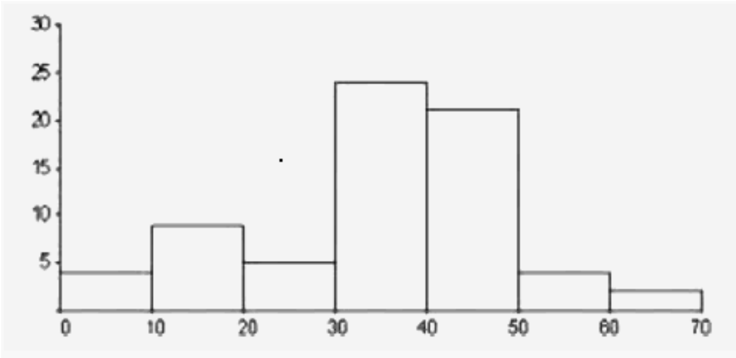
Tabela 6 – Tabela com dados do histograma do gráfico 5.

Classes	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	Total
Frequência	4	9	5	24	21	4	2	69

Fonte: elaborado pelo autor da tese com base nos dados apresentados por Dodge (2007a) para exemplificar o uso do histograma.

[17] Os termos usados nesta tabela, como também a organização dos intervalos, foram reproduzidos como apresentados pelo autor com a tradução para o português.

Gráfico 5 – Histograma segundo Dodge.



Fonte: Dodge (2007a, p.238).

No gráfico 5, Dodge utiliza no eixo vertical as frequências absolutas e no eixo horizontal os intervalos de classe. Se calcularmos a área de cada retângulo, não teremos nem a frequência absoluta (já indicada no eixo vertical) nem tampouco a frequência relativa, pois neste caso a área seria o produto da frequência absoluta (efetivos) pelo intervalo da classe. Esse tipo de problema se repete com outros autores. A resposta a este problema vamos encontrar em Régnier (1998b). Este autor faz um levantamento histórico e procura uma solução matemática para o que seria o histograma. Tomaremos então como referência a definição de Régnier (2007, p.7) que afirma que o histograma de uma variável contínua é uma "representação gráfica delimitada por uma curva de densidade de frequência, onde a superfície representa a frequência". Para explicitar o uso desta definição, tomamos uma tabela encontrada em Régnier (2012) que a reproduzimos com a tradução dos termos na tabela 7. Na figura 5, mostraremos como determinar cada retângulo do histograma. A área de cada retângulo corresponde à frequência que é obtida dividindo o número de efetivos em cada intervalo pelo total de efetivos. A base do retângulo é definida pelo intervalo e a altura (necessário à construção do mesmo) pela densidade de frequência, ou seja, pela divisão da frequência pelo intervalo. No gráfico 6, temos a representação do mesmo. Para construir no Excel, observamos que essa planilha eletrônica utiliza histograma e gráfico de barras como se fossem a mesma coisa. Assim ela representa o histograma como gráfico de barras, deixando de representar o que Régnier (1998b) chama de histograma como também o que outros pesquisadores a exemplo de Dodge (2007a) chamam de histograma. Usamos então um software de desenho vetorial chamado iDraw[18] para representar o histograma referente aos dados da tabela 7.

---

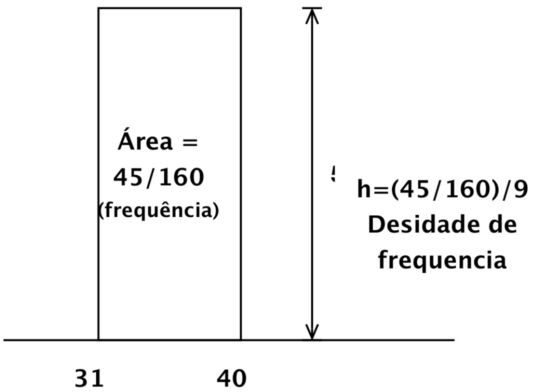
[18] Copyright © 2009-2013 Indeeo, Inc.

Tabela 7 – Idade dos visitantes de uma homepage

Intervalos (anos)	Amplitude	Efetivos (pessoas)	Frequência	Densidade de frequência
[20; 31[	11	11	0,06875	0,00625
[31; 40[	9	45	0,28125	0,03125
[40; 50[	10	54	0,33750	0,03375
[50; 60[	10	36	0,22500	0,0225
[60; 70[	10	14	0,08750	0,00875
Total		160	1,00000	

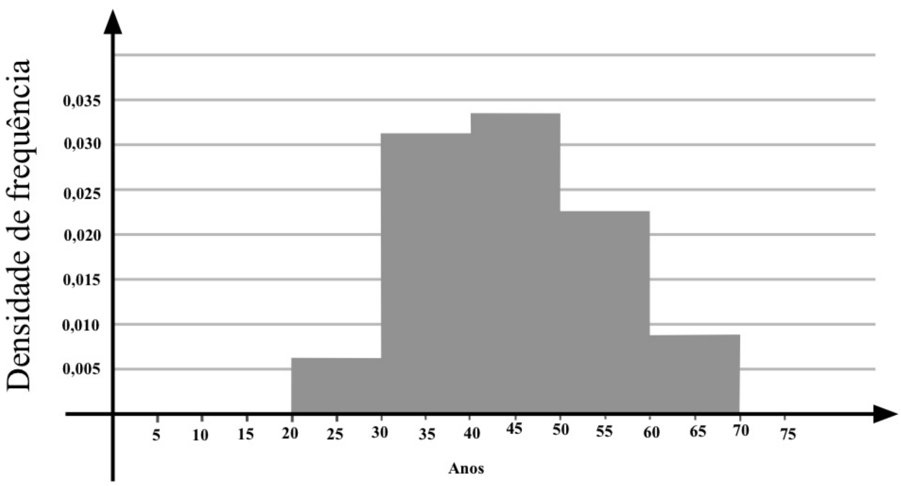
Fonte: Régnier (2012, tradução nossa).

Figura 5 – Determinação das medidas do retângulo do histograma referente ao intervalo [31; 40[.



Fonte: elaborado pelo autor desta tese.

Gráfico 6 – Histograma da idade dos visitantes de uma homepage.

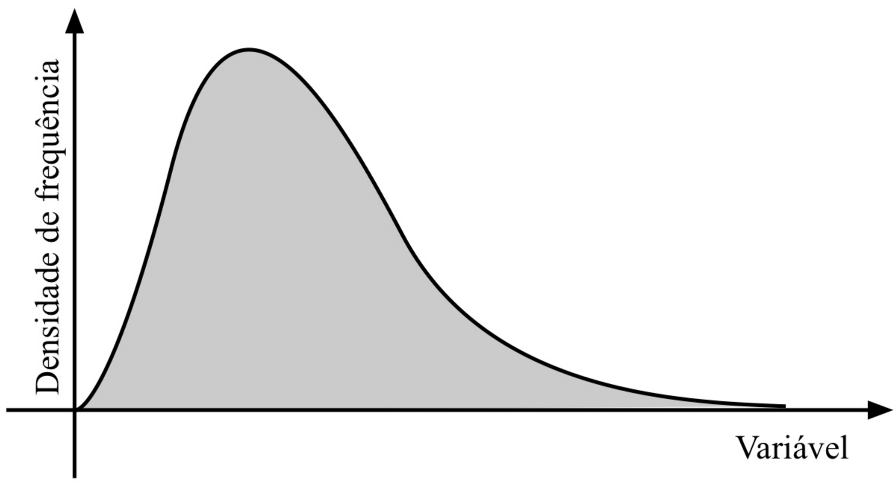


Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Destacamos que a representação do histograma não se deve limitar à forma de um retângulo (RÉGNIER, 2007). Quando tratamos de variável contínua, o histograma representa a frequência em área (figura 6). Na figura 6, temos um histograma de uma variável quantitativa contínua. Kendall e Yule (1948, p. 121-122) esclarecem que:

> Se tomarmos a amplitude de classes cada vez menor, e se ao mesmo tempo o número de observações for aumentando de modo que as frequências de classes possam permanecer finitas, o polígono e o histograma se aproximarão cada vez mais de uma curva regular. Este limite ideal do polígono ou do histograma é chamado de curva de frequência [...] Na curva de frequência a área compreendida entre duas ordenadas quaisquer é proporcional ao número de observações existentes entre os valores correspondentes da variável".

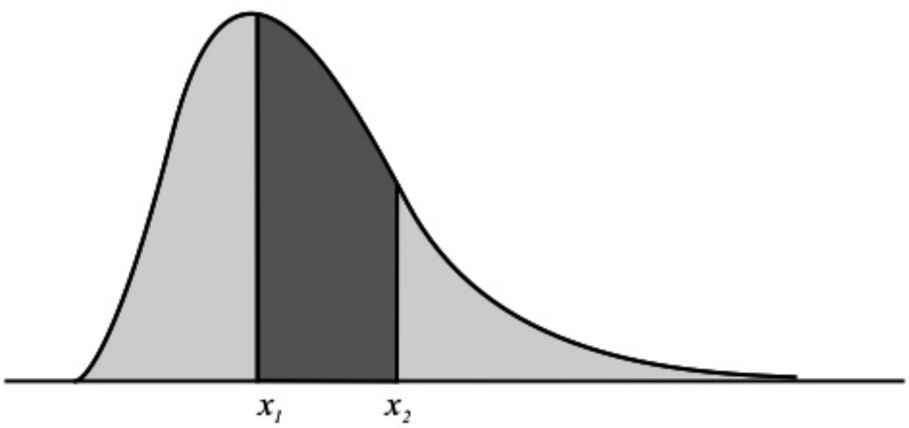
Figura 6 – Histograma de uma variável contínua.



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Na figura 7, exemplificamos esta citação. O número de observações na área entre x_1 e x_2 é proporcional à área hachureada.

Figura 7 – Histograma: área proporcional ao número de observações existentes no intervalo.



Fonte: desenho nosso tendo por base um desenho de Kendall e Yule (1948, p. 121).

2.1.5. O EMPREGO DAS UNIDADES

Ao tratar das medidas de tendência central e de dispersão, destacamos que as mesmas empregam as unidades das variáveis empregadas. Assim se estamos falando do salário médio de um trabalhador em uma empresa brasileira, podemos ter como média de uma empresa fictícia que chamaremos de empresa D, um salário médio de 1.052,63 reais e como variância $231.966{,}76\ reais^2$. Qual o sentido de $reais^2$? Do ponto de vista dos cálculos, faz sentido uma vez que elevamos ao quadrado os valores no procedimento de cálculo. Contudo não existe uma grandeza em $reais^2$. Dehon, Droesbeke, Vermandele (2008, p. 122) destacam que a variância eleva ao quadrado as variáveis utilizadas, como por exemplo, "o quilo ao quadrado", isto pode causar dificuldades de interpretar o que não acontece com o cálculo do desvio padrão, uma vez que extraída a raiz quadrada, as unidades voltam a ser as mesmas das variáveis.

Outra questão que consideramos relevante é o cálculo da média. Ao dividirmos a soma dos salários da empresa D pelo número de funcionários, podemos considerar como média 1.052,63 reais/funcionário. Consideramos que se dividirmos o total de salários de forma equitativa, cada funcionário receberia 1.052,63 reais. Contudo se esta forma de representar fosse levada em consideração, teríamos um problema do ponto de vista dos cálculos. Para exemplificar isso consideramos o cálculo da variância da empresa D (fórmula 53).

$$\sigma^2 = \frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{k=1}^{k=p} n_k(x_k - m)^2$$

Não se pode subtrair valores com unidades diferentes. Neste caso, como subtrair $x_k\ reais - m\ reais/funcionário$? Assim se considerarmos os efetivos totais com sua unidade, por exemplo N= 19 funcionários, teremos problemas para o emprego deste no cálculo da variâncias, do desvio padrão etc. Contudo se considerarmos como o número total de efetivos sem unidade, não teremos problemas nos cálculos. Esta implicação nos leva a afirmar que seria inadequado falar da média dos salários da empresa D como sendo 1.052,63 reais/funcionário e sim tratar como sendo 1.052,63 reais.

2.1.6. O EMPREGO DO SÍMBOLO DE SOMATÓRIO

Um símbolo bastante utilizado em muitas fórmulas que tratam das medidas de tendência central e de dispersão é o símbolo de somatório. Este símbolo não é apresentado da mesma forma por diferentes autores, assim achamos conveniente fazer uma breve apresentação dele. Utiliza-se a letra grega maiúscula sigma Σ para indicar somatório.

Observamos em Kendall e Yule (1948) na apresentação da fórmula da média aritmética[19] a seguinte fórmula:

$$M = \frac{1}{N}\sum(X)$$

Nesta temos a indicação de um símbolo para indicar o somatório de todas as observações, que correspondem a todos os valores da variável X. Observamos o emprego dessa forma de representar o somatório em vários autores a exemplo de Mann (2006), Spiegel (1993) etc. Uma outra fórmula de apresentar o somatório podemos observar em Régnier (2007):

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=N} o_i = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=p} n_k x_k = \sum_{k=1}^{k=p} f_k x_k$$

$$m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} o_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=p} n_k x_k = \sum_{k=1}^{k=p} f_k x_k$$

Em primeiro lugar este autor faz uma distinção entre média de amostra (m) e população (μ) . Sendo assim N para o total de observações da população e n para amostra. No lugar de apenas indicar que é um somatório como nos outros autores citados, temos a indicação de que elementos são somados. Assim temos as observações que serão somadas, estas numeradas da primeira observação (i=1) até a última observação (i=N ou i=n) que corresponde ao total de observações. O termo i corresponde aos indivíduos que são observados em cada variável. Ela serve para indicar qualquer observação da série, da primeira observação (1) à última observação (N). Ele é chamado de índice (SPIEGEL, 1993). O índice pode ser qualquer símbolo, como i, j, k, p ou q. Nas duas fórmulas seguintes de Régnier observamos o uso de p para indicar em uma ordem crescente o valor da maior observação,

[19] Não vamos numerar as fórmulas, uma vez que as apresentaremos outra vez quando tratarmos do uso destas junto aos temas apresentados

como vários indivíduos podem ter a mesma observação, p não corresponde na maioria dos casos ao total de observações. Ele usa k para todos os valores que a variável possa assumir do menor valor k=1 ao maior valor k=p. Tomemos como exemplo duas séries, que chamaremos de série A e B, com as seguintes observações: A={1; 2; 3; 4; 5} e B= {1; 2; 2; 4; 4}.

Na primeira série temos 5 observações: $o_1 = 1;\ o_2 = 2;\ o_3 = 3;\ o_4 = 4;\ o_5 = 5$. Na segunda série temos também 5 observações: $o_1 = 1;\ o_2 = 2;\ o_3 = 2;\ o_4 = 4;\ o_5 = 4$. Podemos então, usando a primeira fórmula, fazer o somatório dos termos:

$$Série\ A: m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} o_i = \frac{1}{5}(1+2+3+4+5) = \frac{1}{5} \cdot 15 = 3$$

$$Série\ B:\ m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} o_i = \frac{1}{5}(1+2+2+4+4) = \frac{1}{5} \cdot 13 = 2{,}6$$

Com uma série bastante reduzida como está, pode-se utilizar esta fórmula, contudo quando temos um número maior de elementos é preferível utilizar a outra fórmula para o cálculo da média. Tomemos como exemplo a série B, considerando que em x_k k varia do menor valor k = 1 ao maior valor k = p = 3, temos: $x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 4$. Quanto ao número de efetivos, temos: $n_1 = 1;\ n_2 = 2;\ n_3 = 2$. Aplicando a segunda fórmula temos:

$$Série\ B:\ m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} n_k x_k = \frac{1}{5}[(1\times1) + (2\times2) + (2\times4) = \frac{1}{5} \cdot 13 = 2{,}6$$

Podemos calcular usando a frequência e usar a terceira fórmula:

$$Série\ B:\ m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} f_k x_k = \left[\left(\frac{1}{5}\cdot 1\right) + \left(\frac{2}{5}\cdot 2\right) + \left(\frac{2}{5}\cdot 4\right)\right] = 0{,}2 + 0{,}8 + 1{,}6 = 2{,}6$$

Quando as frequências já estão calculadas nas tabelas, o uso da terceira fórmula fica ainda mais prático. Consideramos relevante tratar do somatório, uma vez que o uso que se faz do mesmo na estatística, como exemplificado, pode gerar erros de procedimentos de cálculo como apresentados ao tratar dos intervalos.

A seguir trataremos do objeto do saber que será investigado, tomando como referência os termos descritos nesta seção.

2.2. AS MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL E DE DISPERSÃO

Uma forma de agrupar os dados de uma população é apresentá-los através de uma distribuição de efetivos. Algumas vezes, porém, queremos simplificar ainda mais essa forma de apresentação para comparar duas séries. Kendall e Stuart (1977) esclarecem que devemos ficar atentos ao comparar duas distribuições. Ao cotejá-las podemos observar duas características essenciais que levam à diferenciação acentuada entre elas, pela sua posição e dispersão (KENDALL; YULE, 1948). No primeiro caso, temos uma mudança no valor da variável em torno da qual se concentra os efetivos.

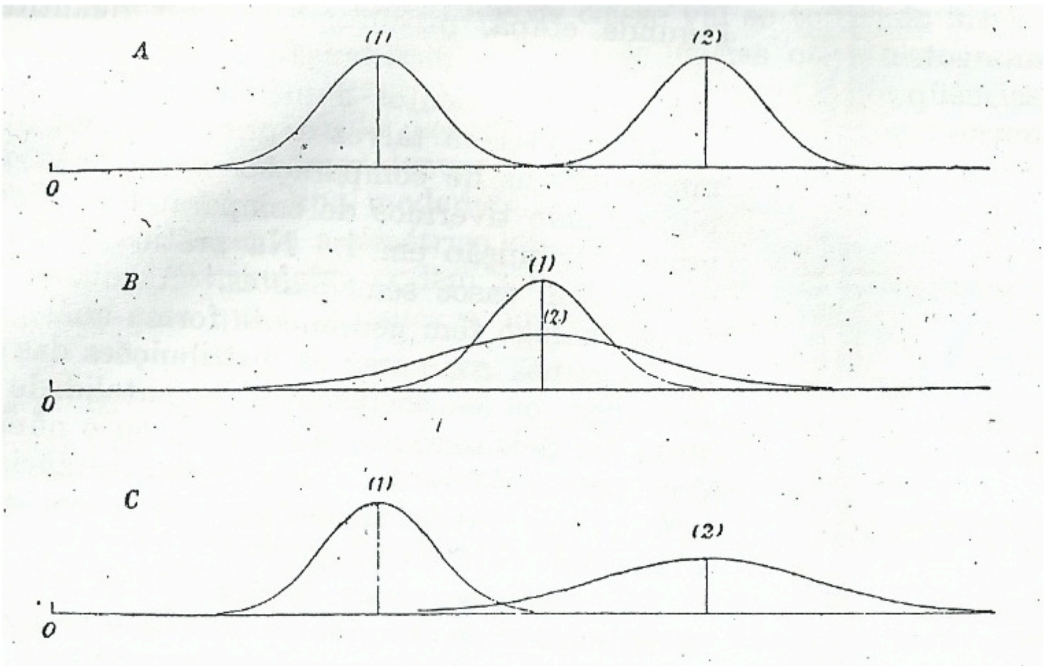
Ao comparar duas séries, por exemplo: {1; 2; 3; 4, 5} e {7, 8, 9, 10, 11} temos como valores centrais 3 (media aritmética e mediana) para a primeira série e 9 (media aritmética e mediana) para a segunda série. Neste exemplo, podemos usar a posição para comparar estes valores centrais. Contudo ao comparar as séries ordenadas {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 } e {3; 3; 3; 4; 5; 5; 5} observamos que ambas possuem a mesma média aritmética e mediana, contudo a primeira é mais dispersa que a segunda (DEHON, DROESBEKE, VERMANDELE, 2008). Dessa forma, faz-se necessário ao comparar duas séries observar não apenas a posição, como também a dispersão.

Kendall e Yule (1948) ao comparar duas séries exemplificam três situações:

- Exemplo 1: duas séries com mudanças nos valores em torno da medida de posição;
- Exemplo 2: duas séries com a mesma medida de posição, mas com dispersões diferentes;
- Exemplo 3: duas séries com mudanças nas medidas de posição e de dispersão.

Tomando como referência a figura 8, temos na letra A a primeira situação, na letra B a segunda e na letra C a terceira situação.

Figura 8 – Comparação de duas séries pela posição e pela dispersão: 3 exemplos.



Fonte: Kendall e Yule (1948, p. 142).

Kendall e Yule (1948) destacam que além das medidas de tendência central e de dispersão, existe um terceiro grupo de menor importância para estes pesquisadores (que não trataremos nesta pesquisa). Fazem parte deste terceiro grupo as diferenças de assimetria, de achatamento, entre outras.

2.3. MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

As medidas de posição mais usadas são a média aritmética, a mediana e a moda. Kendall e Yule (1948) destacam que além dessas medidas, existem outras menos usadas como a média geométrica e a média harmônica. Algumas dessas medidas de tendência central são conhecidas há muito tempo e antigos registros levam a supor que Pitágoras conheceu as médias aritmética, geométrica e harmônica com os babilônicos (BOYER, 1996). Segundo Stella (2003), os gregos no século II A.C. utilizavam a média aritmética para estimar a posição do centro das observações.

Quanto ao uso em inglês, temos em Kendall e Stuart (1977) o termo “mesurres of location” que poderíamos traduzir como medidas de locação ou ainda medidas de posição. Estes autores destacam que as medidas de posição mais comuns são as médias (means), que podem ser aritmética (arithmetic), geométrica (geometric) e harmônica (harmonic), a mediana (median) e a moda (mode). Observamos como nota de tradução do livro de Kendall e Yule

(1948) para o português que o termo em inglês “average” corresponde também à média (means), contudo tem um uso mais popular, menos preciso e mais geral e pode significar qualquer medida de locação e corresponde em espanhol a promedio. Freund (1967) coloca que as medidas de locação (measure of location) podem ser também chamadas de medidas de tendência central (measures of central tendencies), medidas de valores centrais (measures of central values) e medidas de posição (measures of position). Este esclarece que de forma grosseira estas medidas podem ser chamadas também de “averages” no sentido “que proporciona um número que indica o ‘centro, o meio, ou o mais típico’ de um conjunto de dados” (tradução nossa, p. 30).

Batanero (2001) utiliza em espanhol o termo “medidas de posición central” (medidas de posição central) para designar em espanhol: “moda” (moda), “media” (média), “mediana” (mediana), “percentiles” (percentis) e “rangos de percentiles” (classe de percentis). Esta pesquisadora usa o termo “promedio” (meio, media) para designar a média, a moda e a mediana. Consideramos inadequada a posição desta autora de classificar os percentis como medidas de posição central, uma vez que não se caracterizam como uma posição central.

Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) empregam o termo em francês “valeur central” (valor central) esclarecendo que se trata de um valor característico chamado de valor típico, indicador ou parâmetro. Esses autores usam em francês “valeurs centrales” ou “position” ao tratar das medidas de tendência central.

Dodge (2007a) utiliza o termo em francês “mesure de position” ou de “location” apresentando como equivalente em inglês ao termo “measure of location” (que traduzimos por medida de posição ou de locação) para designar uma medida que procura sintetizar um conjunto de dados por um valor fixo. Este autor procura distinguir duas medidas de posição mais frequentes:

1. “Mesure de tendance centrale” (medidas de tendência central) representada pela media aritmética, mediana e moda e utilizadas para determinar o centro de um conjunto de dados;
2. Os “quantiles” (quantis[20] ou separatrizes), segundo Dodge (2007a) não representa necessariamente o centro (como a mediana/segundo quartil) de uma distribuição de observações ordenadas, mas uma posição particular. Podemos determinar, dessa forma, diferentes divisões de um conjunto de dados, os mais comuns são os quartis (em francês quantiles), os decis (em francês décile) e os percentis (em francês

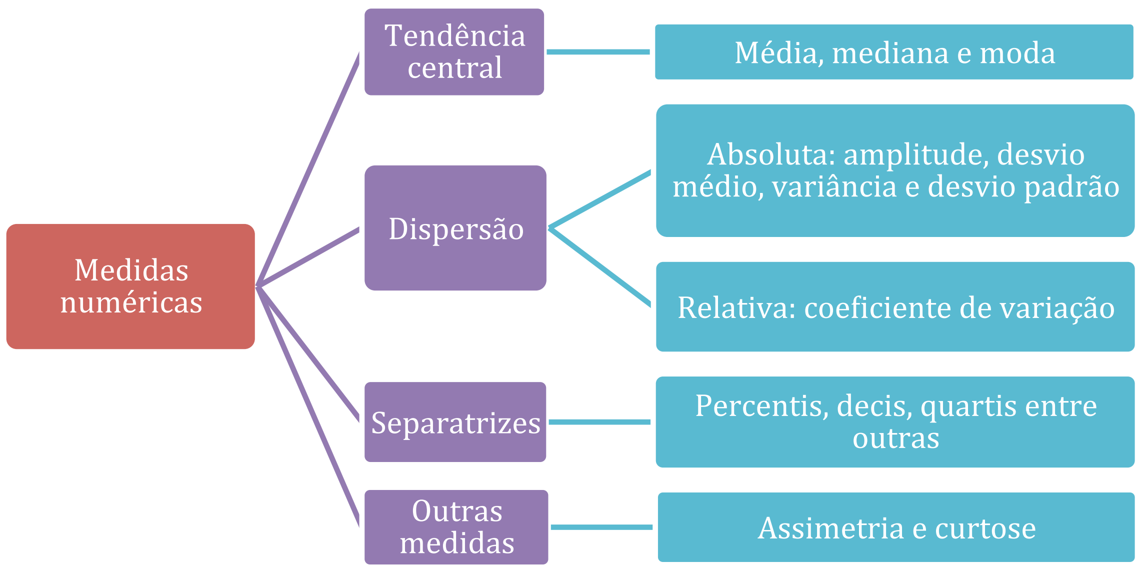
[20] Tradução do francês “quantiles”. Segundo Ferreira (2008) o quartil pode representar qualquer separatriz.

centiles). Estas dividem os dados respectivamente em quatro partes, em dez partes ou em cem partes.

Consideramos esta forma de organizar proposta por Dodge mais adequada do que a proposta por Freund (1967), uma vez que as medidas separatrizes indicam a posição e não podem ser consideradas necessariamente como uma medida de tendência central. Assim não achamos adequado considerar os termos “medida de tendência central” e “medidas de posição” (ou locação) como equivalentes.

Cazorla e Santana (2010) agrupam a média, moda e mediana em tendência central e os percentis e quartis em medidas de posição. Achamos mais adequado usar o termo medida separatriz (NOVAES; COUTINHO, 2009) ou para os percentis e quartis do que de posição, uma vez que as medidas de tendência central poderiam ser vistas como medida de posição (posição central). Embora a mediana também possa ser considerada como uma medida separatriz (corresponde ao segundo quartil – Q2), ela se difere das outras por dividir a distribuição em duas partes iguais e se posicionar em alguns casos ocupando a mesma posição da média e da moda. Na figura 9, procuramos distinguir as medidas de tendência central e de dispersão de outras medidas numéricas e posicionamos a mediana enquanto medida de tendência central.

Figura 9 – Medidas numéricas.



Fonte: elaboramos o esquema acima fazendo algumas pequenas modificações no apresentado por Cazorla e Santana (2010, p. 17).

Kendall e Yule (1948) propõem seis condições que devem ser satisfeitas pelas medidas de tendência central:

1. Deve ser rigorosamente definida. Ela não deve ser estimada pelo observador, pois neste caso dependeria do observador e dos dados;
2. Deve ser baseada em todas as observações realizadas. Caso contrário não corresponderia a uma propriedade de toda distribuição;
3. Ela não deve ter uma natureza matemática excessivamente abstrata. Deve possuir propriedades simples e óbvias facilitando a sua compreensão;
4. Deve-se procurar uma maneira mais fácil de elaborar um cálculo, sem contudo comprometer a qualidade do mesmo;
5. Deve sempre que possível não ser influenciada pelas flutuações da amostra. Ao calcular uma medida de tendência central de diferentes amostragens, deve-se observar as diferenças entre os diferentes valores para cada amostra. O valor que possui menores diferenças, entre os demais, deve ser considerado como mais estável e desejado;
6. Deve-se permitir um tratamento algébrico mais fácil. Por exemplo, quando temos que calcular a média combinada de material semelhante, esta deve ser facilmente calculada em função das suas parcelas. Quando isso não ocorre ela tem uma aplicação limitada.

A média, a mediana e a moda atendem a estas condições. Das medidas de tendência central, a mais usada é a média aritmética que trataremos a seguir.

2.3.1. MÉDIA ARITMÉTICA

A média aritmética ou simplesmente média[21] é uma das medidas de tendência central mais antigas e possui um emprego bastante comum em artigos de publicações científicas, em jornais, em noticiários da televisão, na publicidade etc.

A média aritmética atende às seis condições das medidas de tendência central explicitadas por Kendall e Yule (1948) descritas na seção anterior. A média é rigorosamente definida em função de todas as observações feitas, dessa forma, ela atende à primeira

[21] Em inglês mean ou ainda arithmetic para diferenciar de média geométrica ou harmônica. Em francês se utiliza o termo moyenne e em espanhol media.

condição. Ela também atende à segunda condição, uma vez que para o seu cálculo deve-se somar todas as observações e dividi-las pelo total de observações. Esta característica faz também que a mesma não seja de natureza demasiadamente abstrata, atendendo à terceira condição e que atenda também à quarta condição pela sua simplicidade de cálculo. Ela atende à quinta condição, embora esteja sujeita à influência de valores extremos. E por fim atende à sexta condição, pois permite um tratamento algébrico fácil.

Segundo Dodge (2007a, p. 358, tradução nossa) "é uma medida de tendência central que permite caracterizar o centro da distribuição de frequência de uma variável quantitativa considerando todas as observações e lhes atribuindo o mesmo peso (em oposição à média aritmética ponderada)". Alguns dos elementos dessa definição serão explorados a seguir.

A média aritmética, em geral, pode ser obtida pela soma de todas as observações, sendo dividida pelo total destas. Essa definição pode ser vista em diversos autores como Kendall e Yule (1948). Estes autores apresentam a fórmula da média aritmética:

$$M = \overline{X} = \frac{1}{N}(X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n) = \frac{1}{N}\sum(X) \qquad (2)$$

[22]

Fórmula 2: Média aritmética conforme Kendall e Yule (1948, p. 143).

Estes autores não fazem uma distinção nesta fórmula da média da amostra para a média da população. Temos uma representação muito próxima em Spiegel (1993):

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_N}{N} = \frac{\sum_{j=1}^{N} X_j}{N} = \frac{\Sigma X}{N} \qquad (3)$$

Fórmula 3: Média aritmética conforme Spiegel (1993, p. 67)

Em Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) temos outra fórmula para média aritmética. Eles apresentam duas fórmulas da média aritmética de uma série estatística para uma série não ordenada (4) e para uma série ordenada (5). O fato de ser ordenada ou não, não importa neste caso, sendo o resultado o mesmo. Se você soma todos os números da série que estão ordenados ou não obtêm o mesmo resultado.

[22] Onde $\sum(X)$ representa o somatório de todos os valores em que a variável X assume na série.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{4}$$

Fórmula 4: Média aritmética para série estatística não ordenada segundo Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008, p. 76).

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{(i)} \tag{5}$$

Fórmula 5: Média aritmética para série estatística ordenada segundo Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008, p. 76).

Podemos observar em Mann (2006) uma distinção entre a média da população para a média da amostra. Este autor utiliza o símbolo μ para média aritmética de dados de população e $\bar{x}$ para média aritmética de dados de amostra, N para população (o número total de elementos estudados) e n para amostra (uma parcela da população). Dessa forma, temos:

$$\mu = \frac{\sum x}{N} \tag{6}$$

Fórmula 6: Média aritmética para dados de população, segundo Mann (2006).

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} \tag{7}$$

Fórmula 7: Média aritmética para dados de amostra, segundo Mann (2006)

Podemos observar em Régnier (2010) outra forma de apresentar a fórmula da média da população (fórmula 8) e média da amostra (fórmula 9). Nos dois casos, a média se dá pela soma de todas as observações dividida pela população (N) ou pela amostra (n). Tal como Mann, Régnier faz uma distinção da média da população para média da amostra.

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=N} o_i \tag{8}$$

Fórmula 8: Média aritmética para dados de população segundo Régnier (2007, p. 9).

$$m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} o_i \qquad (9)$$

Fórmula 9: Média aritmética para dados de amostra segundo Régnier (2007, p. 9).

Apresentamos a seguir algumas propriedades para a média aritmética:

PROPRIEDADE (m) 1. A média aritmética é influenciada por valores extremos.

Das três medidas de tendência central mais utilizadas (média, mediana e moda), a média é a que é influenciada por valores extremos. Dependendo da quantidade de valores extremos e do valor destes valores em relação aos demais, a média aritmética pode não ser a medida de tendência central mais adequada para determinar o centro dos dados.

PROPRIEDADE (m) 2. A soma dos desvios em relação à média, considerando os seus respectivos sinais é nula (propriedade apresentada por KENDALL; YULE, 1948).

Esta propriedade também é apresentada por Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008, p.78, tradução nossa) que utiliza a expressão "soma dos valores centrais é nula" considerando como valores centrais a diferença de cada valor da série e a média ($x_i - \bar{x}$). Levin e Fox (2004) chamam de desvio a diferença de cada valor em relação à média e representam por $Desvio = X - \bar{X}$. Isto pode ser assim expresso:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_1 - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0 \qquad (10)$$

Fórmula 10: Soma dos desvios em relação à média (DEHON;DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p.78).

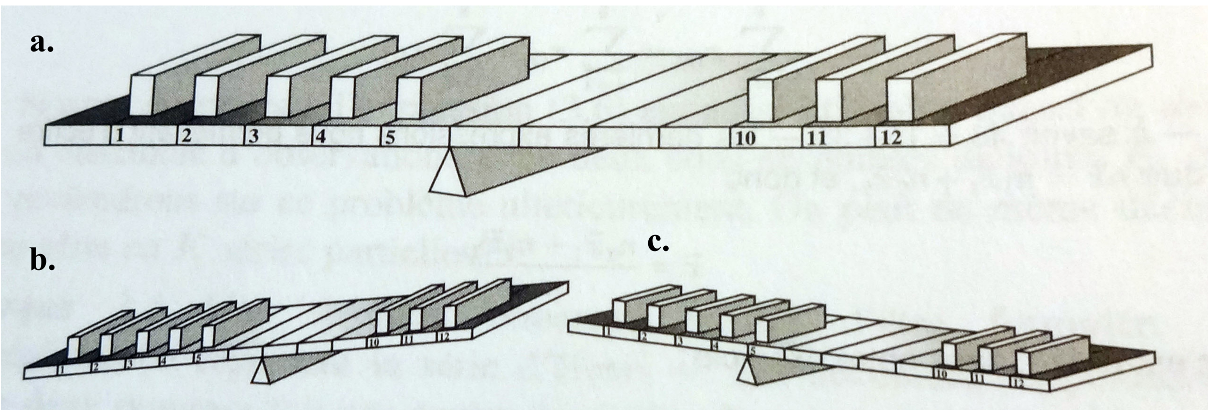
Podemos exemplificar isto com a série {1; 2; 3; 4; 5, 10; 11; 12} de média aritmética 6. Se subtrairmos a média de cada valor, teremos: {1-6; 2-6, 3-6, 4-6, 5-6, 10-6, 11-6, 12-6} = {-5, -4, -3, -2, -1, 4, 5, 6} se somarmos teremos como valor 0.

PROPRIEDADE (m) 3. A média aritmética como ponto de equilíbrio.

Outra forma de interpretar esta propriedade consiste em dizer que a soma dos valores centrais positivos é compensado pela soma dos valores centrais negativos.

Podemos pensar a média como ponto de equilíbrio. Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008), para exemplificar esta propriedade, apresentam uma interpretação física utilizando para isso um conjunto de oito objetos com pesos idênticos colocados sobre uma balança de tal forma que a distância entre dois objetos seja igual à diferença entre os valores que eles representam. O ponto de equilíbrio da balança estará sobre a média aritmética, assim para que a balança esteja em equilíbrio, o fulcro da balança deverá se posicionar no local definido pela medida da média aritmética. Caso contrário, a balança tombará para a esquerda ou para direita. Na figura 10, no primeiro desenho (que indicamos pela letra a.) temos o fulcro da balança embaixo da marca correspondente à média aritmética (traço à direita do 5 que corresponde a 6). Na figura 10b o fulcro está sob a marca 7 e a balança aparece tombada para a esquerda. Na figura 10c o fulcro está sob a marca 5 e a balança é representada pendente para a direita.

Figura 10 – média como ponto de equilíbrio.



Fonte: Dehon, Droesbeke, Vermandele (2008, p. 79).

Levin e Fox (2004) destacam que a média é o ponto de equilíbrio em uma série, uma vez que a soma dos desvios em valor absoluto abaixo da média é igual à soma dos valores acima da média. Tomando como exemplo a série apresentada {1; 2; 3; 4; 5, 10; 11; 12}. Temos como valores abaixo da média 1, 2, 3, 4 e 5 e como valores acima da média, temos 10, 11, 12. A tabela 8 apresenta uma síntese. A soma dos desvios em relação à média em valores absolutos (ou em módulo) é igual a soma dos desvios abaixo da média que corresponde a 15 para este exemplo.

Tabela 8 – A média como ponto de equilíbrio.

Valores abaixo da média			Valores acima da média		
x_i	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	x_i	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$
1	-5	5	10	4	4
2	-4	4	11	5	5
3	-3	3	12	6	6
4	-2	2			
5	-1	1			
Soma		15	Soma		15

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

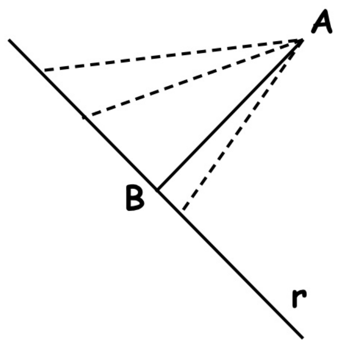
Esta ideia da média como ponto de equilíbrio é destacada por Régnier (2005). Este autor destaca a lei das compensações que se pode ver aplicada na média aritmética e é tratada por. A. Cournout em 1836. Trata-se de um ponto fundamental para a compreensão do conceito de média que vai muito além da simples aplicação do algorítmico cujo uso tem a ver em minimizar as variações.

PROPRIEDADE (m) 4. A média é o valor que está mais próximo de todos os valores.

Esta propriedade é ressaltada por Régnier (2013) ao tratar da distância. Assim este autor descreve a média de uma série como o valor que está a menor distância entre os demais valores de uma série. Um exemplo que utilizamos junto aos alunos para exemplificar o conceito de distância é o de distância entre um ponto e uma reta, como ilustra na figura 11. Podemos marcar a medida do ponto A em relação à reta, tomando inúmeros pontos da reta r, mas o menor comprimento corresponde à distância, representado pelo segmento $\overline{AB}$, este segmento forma um ângulo reto[23] com a reta r.

[23] Esta propriedade pode ser facilmente demonstrada. Ao traçarmos um círculo pelo ponto A, se o raio for menor que a distância de A a r, o círculo não passa por r. Se o raio for maior que a distância do que A a r, o círculo terá dois pontos em comum com r (secante). Se a medida do raio do círculo for igual à distância de A a r, o círculo será tangente a r e, neste caso, o raio formará um ângulo reto no ponto de tangência.

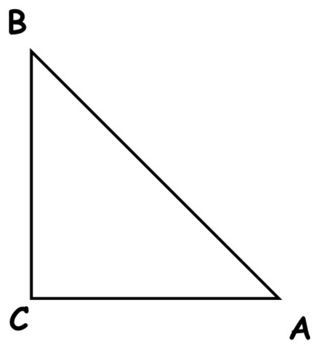
Figura 11 – Distância entre um ponto a uma reta.



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Régnier (2013) apresenta dois exemplos de distância. A distância euclidiana entre dois pontos e a distância de deslocamento entre uma cidade. No primeiro caso (figura 12), tomemos dois pontos A e B. Tendo as medidas dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ podemos calcular a distância entre os pontos A e B pelo teorema de Pitágoras: $d_{AB} = \sqrt[2]{(d_{AC})^2 + (d_{CB})^2}$. Considerando as coordenadas dos pontos A $(x_A; y_A)$ e B $(x_b; y_B)$ poderíamos ainda obter a distância entre os pontos A e B por: $d_{AB} = \sqrt[2]{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

Figura 12 – Distância entre dois pontos.

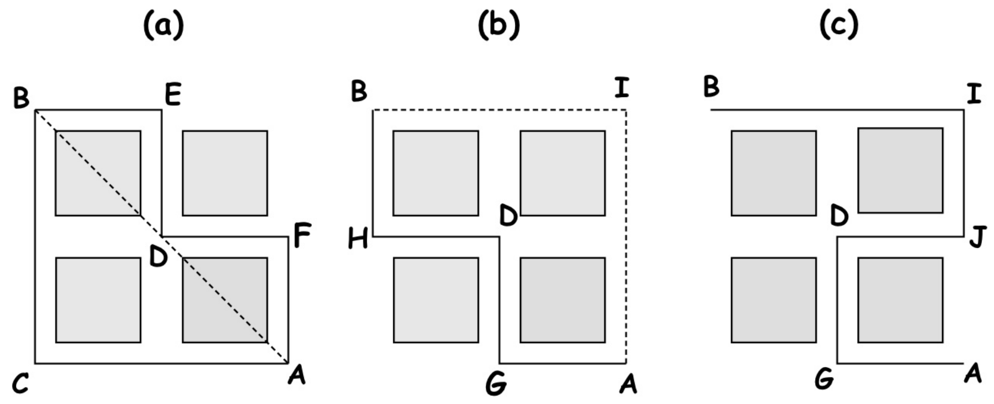


Fonte: elaborado pelo autor da tese.

No caso da distância de um percurso em uma cidade, Régnier (2013) esclarece que esta distância é a menor distância possível de percorrer. Exemplificamos isto na figura 13. Na figura 13, apresentamos em tracejado a distância entre A e B como a distância entre dois pontos na geometria euclidiana. Esta distância não seria a menor distância percorrida em uma cidade, uma vez que ninguém poderia atravessar os edifícios construídos. Em uma cidade plana com os traçados dos quarteirões ortogonais a menor distância seria dada pelos catetos do triângulo retângulo. No exemplo da figura 13 (a) esta seria dada por: $d = \overline{AC} + \overline{CB}$. Podemos pensar em outros percursos com medidas equivalentes:

$$d = \overline{AC} + \overline{CB} = (\overline{AF} + \overline{DE}) + (\overline{FD} + \overline{EB}) = (\overline{AG} + \overline{DH}) + (\overline{GD} + \overline{HB}) = \overline{IB} + \overline{AI}$$

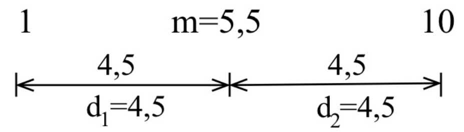
Figura 13 – Distância entre dois pontos no contexto de uma cidade.



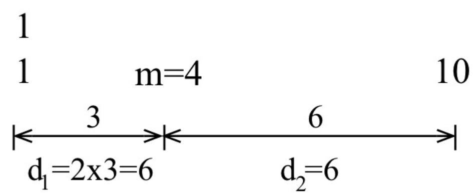
Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Existem também percursos que não correspondem ao menor percurso e que neste caso não se tratam da distância entre A e B, como o percurso: $\overline{AG} + \overline{GD} + \overline{DJ} + \overline{JI} + \overline{IB}$ (figura 13.c).

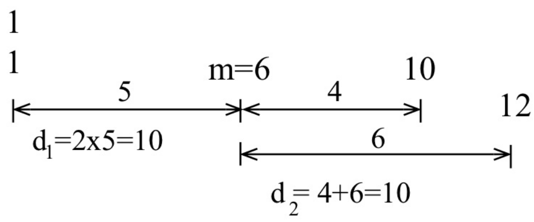
No caso da média temos também a menor distância entre dois pontos. Tomemos uma série formada de duas observações: {1; 10}. A média é 5,5. A distância entre as observações e a média é a mesma, ou seja, 4,5:



Considerando uma série formada por três observações: {1; 1; 10}. A média é 4, a distância entre a média e a observação com valores acima da média é igual a 6. A distância entre as duas observações com valores abaixo da média e a média são também de 6 (uma vez que cada observação está a uma distância de 6 em relação à média):



Tomemos uma série formada por quatro observações: { 1; 1; 10; 12} em que a média é 6. A distância das duas observações abaixo da média é igual a 10 (duas vezes a medida de cada observação que é igual a cinco). A medida das distâncias das observações acima da média em que a média também é igual a 10 (a distância em relação à terceira observação (4) mais a distância da quarta observação (6) é igual a 10).



Considerando uma série com um valor extremo em relação aos demais, como na série: {1; 1; 6; 24}. Neste exemplo, a média 8 ficou entre o valor extremo e os demais valores. A distância entre a média e o valor acima da média são 16 e a soma das distâncias entre os valores abaixo da média e a média também são 16:

A média é associada a uma grandeza. Para simplificar a apresentação desta propriedade, não indicamos a grandeza utilizada para as observações e consequentemente na média.

PROPRIEDADE (m) 5. A média dos desvios em relação à média aritmética, considerando os seus respectivos sinais é nula (RÉGNIER, 2011).

Tomando como base a propriedade na qual a soma dos desvios em relação à média é nula, se dividirmos a equação n.7 na qual apresentamos esta propriedade pelo número de observações (n), o resultado não se altera.

Dessa forma, pode-se afirmar a média aritmética dos desvios em relação à média será nula ou "os valores centrais possuem sempre uma média aritmética nula" (DEHON, DROESBEKE e VERMANDELE, 2008, p.80, tradução nossa). Apresentamos a seguir está fórmula.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_1 - \bar{x}) = 0 \qquad (11)$$

Fórmula 11: Soma dos desvios em relação à média (DEHON, DROESBEKE E VERMANDELE, 2008, p.80).

Régnier (2012) apresenta esta propriedade como uma das propriedades fundamentais em relação à média, pois não se trata apenas de dizer que ela é nula, mas de evidenciar que podemos ter os desvios médios em relação a um valor c qualquer, contudo o valor mínimo da média dos desvios é dada pelos desvios médios em relação à média aritmética como apresentado por Régnier na fórmula:

$$\boldsymbol{\bar{E}_c = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=p} n_k(x_k - c) = 0 \; se \; e \; somente \; se \; c = m} \qquad (12)$$

Fórmula 12: Soma dos desvios em relação à média (RÉGNIER, 2011a, p.20).

Considerando a série {2; 7; 7; 7; 8} temos:

$$\bar{E}_c = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=p} n_k(x_k - c) = \frac{1}{5}[1(2-c) + 3(7-c) + 1(8-c)$$

Quando c = m (média) temos:

$$\bar{E}_m = \frac{1}{5}[1(2-6{,}2) + 3(7-6{,}2) + 1(8-6{,}2)] = 0$$

Tomando por base esta propriedade acrescentamos outra que chamamos de propriedade 6.

PROPRIEDADE (m) 6. A média aritmética é o número real que minimiza o quadrado dos desvios de uma série (DODGE, 2007a).

Tomemos o quadrado da soma dos desvios de uma série em relação a um número real “a” qualquer. A soma dos desvios é mínima se “a” corresponde à média aritmética “$\bar{x}$”:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 \geq \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \qquad (13)$$

Fórmula 13: Soma dos desvios em relação à média (DODGE, 2007a, p. 359).

Apresentamos a seguir a demonstração. Se somarmos e subtrairmos o valor da média o resultado não se altera, assim temos:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x} + \bar{x} - a)^2 = \sum_{i=1}^{n}[(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - a)]^2 \tag{12.1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}[(x_i - \bar{x})^2 + 2(\bar{x} - a)(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - a)^2] \tag{12.2}$$

O terceiro termo é nulo uma vez que a soma dos desvios em relação à média é nulo: $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$, propriedade 1. Temos então que:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n}[(x_i - \bar{x})^2 + (\bar{x} - a)^2] \tag{12.3}$$

O primeiro termo $[(x_i - \bar{x})^2]$ não depende de $\boldsymbol{a}$ enquanto o segundo termo sim. Quando $\boldsymbol{a}$ é igual à média o segundo termo é igual à zero, assim podemos afirmar que o valor que minimiza os desvios de uma série é a média aritmética[24]. Podemos assim afirmar que ela representa o mínimo da função formada pelos desvios em relação a uma série, conforme a expressão:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 \tag{ 14}$$

Fórmula 14: Função definida pela soma dos quadrados dos desvios em relação a uma série dada.

Tomemos como exemplo a série {3; 6; 9}. A função dos desvios em relação a esta serie é:

$$f(a) = \sum_{i=1}^{n}[(3 - a)^2 + (6 - a)^2 + (9 - a)^2]$$

No tabela 9, apresentamos alguns dos valores para y em função de a. O menor valor para f(a) nesta tabela é 6 (que corresponde à média aritmética).

[24] Esta demonstração pode ser vista em Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008, p. 114) e Dodge (2007b)

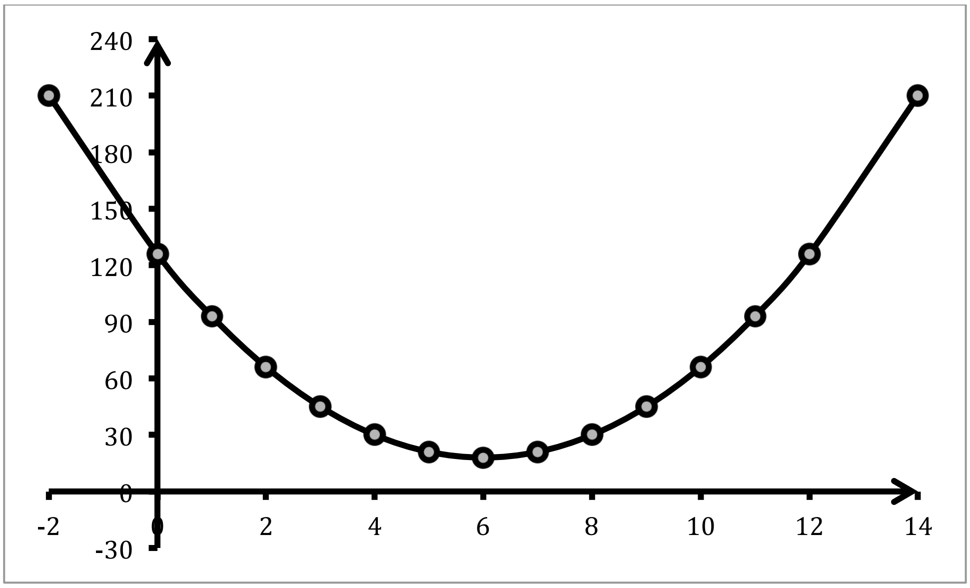
Tabela 9 – Minimização dos desvios da média: variação de y em função de a.

a	-2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14
$f(a)$	210	126	93	66	45	30	21	18	21	30	45	66	93	126	210

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Ao traçar o gráfico (usamos o Excel) desta função do segundo grau, podemos observar que temos como mínimo 6 que é a média aritmética de 3, 6 e 9.

Gráfico 7 – gráfico da função $\boldsymbol{f(a) = \sum_{i=1}^{n}[(3-a)^2 + (6-a)^2 + (9-a)^2]}$.



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Esta propriedade também é tratada por Régnier (2012). Este autor destaca que todas as possibilidades que se podem medir uma flutuação é a variância, o valor mínimo desta flutuação.

Apresentamos a seguir a propriedade 7.

PROPRIEDADE (m) 7. A média aritmética de uma série formada por duas componentes pode ser obtida em função das médias das componentes (KENDALL;YULE, 1948).

Dada uma série S de N observações de uma variável X composta por duas séries de observações definidas pelas variáveis X1 e X2, a soma das variáveis desta série pode ser obtida pela soma das variáveis das componentes:

$$\sum(X) = \sum X1 + \sum X2$$

Considerando que o número de observações da primeira série componente é dada por N1 e da segunda série é dada por N2, onde N=N1+N2, e considerando M1 a média da primeira série componente e M2 a média da segunda, podemos obter a média da série formada por estas duas séries componentes usando a fórmula:

$$NM = N_1M_1 + N_2M_2 \quad (15)$$

Fórmula 15: Média aritmética de uma série calculada tendo em vista duas componentes e o número de observações das séries componentes (KENDALL; YULE, 1948, p. 149).

Tomemos como exemplo de aplicação uma questão adaptada de Kendall e Yule (1948). Considerando uma série formada pelas duas séries abaixo:

- Estatura média de 738 homens nascidos em Recife = 1,75 m
- Estatura média de 425 homens nascidos em Olinda = 1,69 m

Podemos com estes dados calcular a estatura média dos homens nascidos em Recife e em Olinda. Considerando que $\mathrm{N} = \mathrm{N}_1 + \mathrm{N}_2$=738+425=1163 homens nascidos em Recife e Olinda que fazem parte da amostra. A estatura média da amostra formada por homens nascidos nestas duas cidades pode ser dada por:

$$\mathrm{NM} = \mathrm{N_1M_1} + \mathrm{N_2M_2} \Rightarrow 1163\mathrm{M} = (738\times1{,}75\mathrm{m}) + (425\times1{,}69\mathrm{m}) \Rightarrow \mathrm{M} = 1{,}73\mathrm{m}$$

Podemos ainda representar, neste caso por:

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n} \quad (16)$$

Fórmula 16: Média aritmética de uma série calculada com base no número de observações e média das suas componentes (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p.81).

Como n=n1+n2 podemos ainda apresentar como indicado por Mann (2006) para a fórmula da **média aritmética combinada** de dois conjuntos de dados:

$$\bar{x} = \frac{n_1\overline{x_1} + n_2\overline{x_2}}{n_1 + n_2} \qquad (17)$$

Fórmula 17: Média aritmética combinada de dois conjuntos de dados (MANN, 2006, p.81).

Se o novo conjunto tiver apenas uma observação, $n_2 = 1$ e $x_2 = a$, a média desse novo conjunto corresponde a sua única observação. E a expressão pode ser simplicificada, de modo a facilitar o cálculo da média toda vez que se acrescenta a uma série uma nova observação (x_p), neste caso $n = n_1 + 1$:

$$\bar{x} = \frac{n_1\overline{x_1} + x_p}{n} \qquad (18)$$

Fórmula 18: Média aritmética a partir de uma nova observação (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p.81).

Outra forma de apresentar esta expressão seria:

$$\bar{x} = \frac{n_1\overline{x_1}}{n} + \frac{x_p}{n} \qquad (19)$$

Fórmula 19: Média aritmética a partir de uma nova observação.

ou

$$\bar{x} = \frac{n_1\overline{x_1}}{n} + \frac{a}{n} \qquad (20)$$

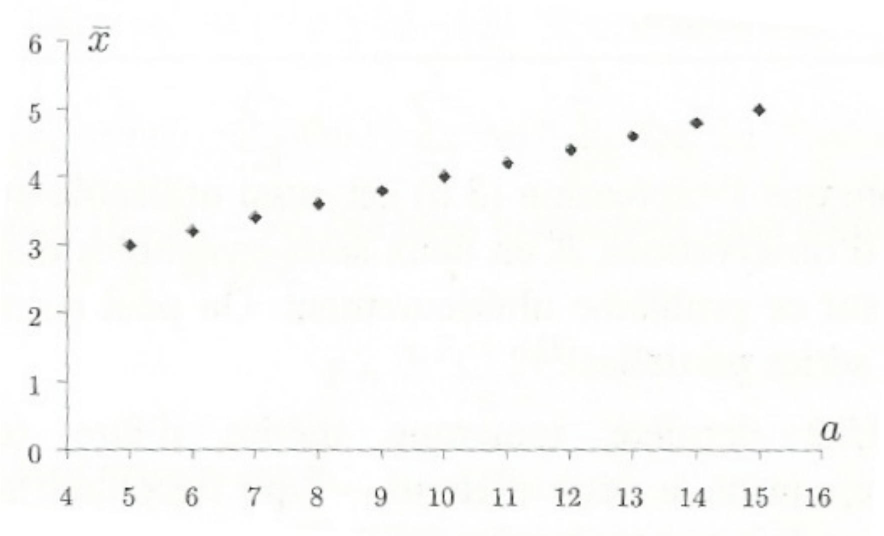
Fórmula 20: Média aritmética a partir de uma nova observação.

Se tivermos a série {1, 2, 3, 4, 5} com cinco elementos (n_1), cuja média aritmética é $3(x_1)$ e acrescentarmos um sexto elemento (a), podemos calcular assim a média da nova série formada por 6 elementos $(n = n_1 + 1 = 5 + 1 = 6)$:

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 3}{6} + \frac{6}{6} = \frac{15}{6} + \frac{6}{6} = 2{,}5 + 1 = 3{,}5$$

Considerando que o novo valor a ser acrescentado a esta série é inteiro e igual ou maior do que 5 (a ≥ 5), pode-se afirmar que a média aritmética depende linearmente de a e pode ser representada pela figura 14 (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008):

Figura 14 – Dependência linear da média de um novo valor



Fonte: Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008, p. 82)

PROPRIEDADE (m) 8. "A média da soma total das (ou da diferença total entre as) observações correspondentes de duas séries de igual número de observações é igual à soma (ou à diferença) das médias de suas séries" (KENDALL; YULE, 1948, p.149).

Considerando que:

$\sum(X) = \sum(X1) \pm \sum(X2)$ (KENDALL; YULE, 1948)

E que:

$M = M_1 \pm M_2$ (KENDALL; YULE, 1948) para $n_1 = n_2$.

Podemos representar esta propriedade pelas fórmulas 21 e 22:

$$\frac{\sum x_1 + \sum x_2}{n_1 + n_2} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{2} \qquad (21)$$

Fórmula 21: Média aritmética da soma das observações de duas séries de igual número de observações é igual à soma das médias destas séries.

$$\frac{\sum x_1 - \sum x_2}{n_1 + n_2} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{2} \qquad (22)$$

Fórmula 22: Média aritmética da diferença das observações de duas séries de igual número de observações é igual à diferença das médias destas séries.

Tomemos com exemplo duas séries: {1, 2, 3, 4, 5} e {8, 9, 10, 11, 12}. Estas duas séries possuem o mesmo número de observações (cinco observações).

Calculando a média da soma:

$$\mu = \frac{1+2+3+4+5+8+9+10+11+12}{10} = \frac{65}{10} = 6{,}5$$

A média da primeira série é 3 e da segunda série é 10. Logo a média da soma seria:

$$\mu = \frac{3+10}{2} = 6{,}5$$

Calculando a diferença das duas séries:

$$\mu = \frac{(1+2+3+4+5)-(8+9+10+11+12)}{10} = \frac{15-50}{10} = -3{,}5$$

Calculando a diferença das medidas das séries teríamos:

$$\mu = \frac{3-10}{2} = -3{,}5$$

PROPRIEDADE (m) 9. A soma dos valores de uma série pode ser obtida em função da média aritmética e do número de observações desta série

Como a média é obtida pela soma dos valores observados divididos pelo número dos valores, podemos relacionar a soma dos valores ao número de valores multiplicados pela média, independente de os valores estarem ordenados ($x_{(i)}$) ou não (x_i) (DEHON, DROESBEKE e VERMANDELE, 2008):

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x} \; ou \; \sum_{i=1}^{n} x_{(i)} = n\bar{x} \qquad (23)$$

Fórmula 23: Obtenção da soma das observações de uma série tendo por base a média e o número de observações. (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p.78).

PROPRIEDADE (m) 10. Linearidade da média aritmética

Hubler (2007) esclarece que se somarmos a todos os valores de uma variável uma constante $\boldsymbol{b}$, o valor da média será somado $\boldsymbol{b}$. Também se multiplicarmos um valor $\boldsymbol{a}$ qualquer a todas as observações de uma série, a nova média aritmética da série será obtida ao multiplicarmos este valor à antiga média. Acrescentamos que isso também se aplica para subtração e para divisão. Para a soma, podemos assim representar:

$$\bar{x} + b = \frac{(x_1 + b) + (x_2 + b) \ldots (x_n + b)}{n} \tag{24}$$

Fórmula 24: Linearidade da média ao somarmos um valor às observações.

Podemos facilmente demonstrar:

$$\bar{x} + b = \frac{(x_1 + b) + (x_2 + b) + \cdots + (x_n + b)}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n + n \times b}{n} =$$

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + \frac{n \times b}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + b$$

Logo temos que:

$$\bar{x} + b = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + b$$

Ao subtrairmos de todos os valores um valor constante, também teremos a nova média igual à antiga subtraída deste valor :

$$\bar{x} - d = \frac{(x_1 - d) + (x_2 - d) \ldots (x_n - d)}{n} \tag{25}$$

Fórmula 25: Linearidade da média ao subtrairmos um valor às observações.

A demonstração é similar à da soma (podemos ainda pensar que o ***b*** pode ser um número negativo o que recairia na demonstração anterior):

$$\bar{x} - d = \frac{(x_1 - d) + (x_2 - d) + \cdots + (x_n - d)}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n - n \times d}{n} =$$

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - \frac{n \times d}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - d$$

Logo temos que:

$$\bar{x} - b = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - d$$

Ao multiplicarmos um valor qualquer a às observações de uma série, a média resultante é igual à média da série multiplicada por a. Assim temos a fórmula 26.

$$a\bar{x} = \frac{ax_1 + ax_2 + \cdots + ax_n}{n} \tag{26}$$

Fórmula 26: Linearidade da média ao multiplicarmos um valor às observações.

Apresentamos abaixo a demonstração:

$$a\bar{x} = \frac{ax_1 + ax_2 + \cdots + ax_n}{n} = \frac{a}{1} \times \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}{n} = a \times \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}{n}$$

Da mesma forma, podemos multiplicar um valor $\boldsymbol{a}$ e somar um valor $\boldsymbol{b}$ a cada observação que a média resultante será igual à média anterior multiplicada por $\boldsymbol{a}$ e somada o valor $\boldsymbol{b}$, como na fórmula abaixo:

$$a\bar{x} + b = \frac{(ax_1 + b) + (ax_2 + b) + \cdots + (ax_n + b)}{n} \tag{27}$$

Fórmula 27: Linearidade da média ao multiplicarmos um valor $\boldsymbol{a}$ e somarmos um valor $\boldsymbol{b}$ às observações.

O mesmo vale para a divisão de um número $\boldsymbol{c}$ pela média (podemos considerar que $\boldsymbol{a}$ usado para multiplicar pode ser um valor entre -1 e 1, o que indicaria que esta propriedade se aplicaria para a divisão por um número racional):

$$\frac{1}{c}\bar{x} = \frac{\frac{1}{c}x_1 + \frac{1}{c}x_2 + \cdots + \frac{1}{c}x_n}{n} \tag{28}$$

Fórmula 28: Linearidade da média ao dividirmos todas as observações por um valor constante.

Similar à demonstração da multiplicação, podemos demonstrar a divisão de um número $\boldsymbol{c}$ pela média :

$$\frac{1}{c}\bar{x} = \frac{\frac{1}{c}x_1 + \frac{1}{c}x_2 + \cdots + \frac{1}{c}x_n}{n} = \frac{\frac{1}{c}}{1} \times \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}{n} = \frac{1}{c} \times \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}{n}$$

Dessa forma, esta propriedade da linearidade se aplica à soma, subtração, multiplicação e divisão de um número pela média:

$$a\bar{x}\frac{1}{c}+b-d=\frac{(ax_1\frac{1}{c}+b-d)+(ax_2\frac{1}{c}+b-d)+\cdots+(ax_n\frac{1}{c}+b-d)}{n} \qquad (29)$$

Fórmula 29: Linearidade da média ao multiplicarmos um valor a e/ou dividirmos por um valor c e/ou somarmos a um valor b e/ou subtrairmos um valor d às observações.

Apresentamos na tabela 10, um exemplo:

Tabela 10 – Linearidade da média aritmética

	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	n	$\bar{x}$
x_i	-2	0	1	2	3	4	5	6	8	27	3
$2x_i+5$	1	5	7	9	11	13	15	17	21	99	11

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Temos assim que $2\times 3+5=11$ $(2\bar{x}_1+5=\bar{x}_2)$.

PROPRIEDADE (m) 11**.** A média pode ser empregada na estimação de uma quantidade desconhecida considerando a presença de erros nos instrumentos de medição.

Considerando que um aparelho de medição possui imprecisão nas suas medições e considerando que estas imprecisões podem oscilar entre um valor acima ou abaixo da medida real,. Considerando que existe a mesma probabilidade de se tirar um valor abaixo ou acima do valor real, quanto maior for o número de medições registradas por este aparelho, maior será a probabilidade do valor médio destas medições se aproximarem do valor real. Dodge (2007b, tradução nossa) ao tratar da história da estatística, destaca esta propriedade da média aritmética como sendo empregada em “um dos mais antigos métodos para combinar as observações a fim de obter um valor aproximado único”. Este autor destaca que o seu emprego remonta ao século III A.C.,sendo utilizado pelos babilônicos para determinar a posição do sol, da lua e dos planetas. Ele foi uma das formas mais antigas de se utilizar a média aritmética. Considerando cada registro no aparelho como uma observação, se calcula a média aritmética destas observações para estimar o valor da medição real.

Apresentamos a seguir algumas observações sobre a média aritmética:

OBSERVAÇÃO (m) 1. Em uma média aritmética os valores observados devem ser numéricos. Assim uma escala qualitativa (escala nominal ou ordinal) não possui média aritmética (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008). Desta observação propomos uma propriedade:

PROPRIEDADE (m) 12. A média aritmética se limita a operações com variáveis estatísticas quantitativas (discretas e contínuas).

OBSERVAÇÃO (m) 2. A média aritmética é valor típico único para uma série: uma série não pode ter várias médias aritméticas distintas, embora duas séries podem possuir a mesma média aritmética (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008).

OBSERVAÇÃO (m) 3. Uma média aritmética não corresponde necessariamente a um valor observado. Em um grupo pode não existir um indivíduo cuja medida seja igual à média do grupo (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008).

Tomemos como exemplo dessa terceira observação a série de veículos por domicílio em uma cidade cuja média aritmética é de 1,5 veículo. Não vai existir uma residência que tenha 1,5 veículos. O mesmo pode-se pensar para a medida das idades dos alunos de uma série que é igual a 12,5 anos. Como destaca estes autores "o indivíduo médio é um ser geralmente fictício".

OBSERVAÇÃO (m) 4. A média corresponde à mesma unidade utilizada na série.

Dessa forma, se uma série contém o número de veículos por domicílio, para obter a média, somamos o total de veículos e dividimos pelo número de domicílios pesquisados e teremos a média de veículo por domicílio. Assim, o resultado poderia ser 1,5 veículos. Em um levantamento da altura média dos alunos em uma sala, a média deve expressar as unidades utilizadas no cálculo. Logo, ao dividir a soma das alturas dos alunos pelo número destes obtemos como unidade cm. Por exemplo, poderíamos ter como média da altura 1,57 m/aluno. Não faz sentido dizer que a média da altura dos alunos é 1,57. Por questões práticas deve-se utilizar como média das alturas dos alunos 1,57 m e não 1,57 m/aluno. Já tratamos isso em duas situações no capítulo introdutório. Quanto às MTCD, quando falamos do emprego das unidades e quando tratamos das variâncias indicando que esta última apresentação inviabilizaria alguns cálculos.

OBSERVAÇÃO (m) 5. Ao comparar duas médias elas devem estar expressas na mesma unidade.

Podemos comparar a altura média dos alunos de uma sala de aula de uma escola com os de outra sala, podemos também com a altura média dos habitantes daquela cidade com a mesma faixa etária. Contudo, deve-se considerar que elas devem estar expressas na mesma unidade. Caso contrário, deve-se fazer a conversão para a mesma unidade.

Apresentamos a seguir outras situações de emprego da média aritmética, bem como, outras fórmulas usadas para o cálculo da média aritmética.

2.3.1.1. MÉDIA ARITMÉTICA DE UMA DISTRIBUIÇÃO OBSERVADA

Em uma distribuição observada, associamos cada valor observado x_j a um efetivo n_j que indica o número de vezes que ele aparece (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008). Para a série correspondente ao número de veículos por residência de uma quadra, temos como observações $\{0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 4; 4\}$. Então podemos calcular a média usando o algoritmo da média aritmética:

$$\bar{x} = \frac{0+0+0+0+0+0+0+1+1+1+1+1+1+2+2+2+2+3+3+3+4+4}{22} = 1{,}41\ veículos/residência$$

Outra forma de calcular a média aritmética seria:

$$\bar{x} = \frac{(7\times 0)+(6\times 1)+(4\times 2)+(3\times 3)+(2\times 4)}{22} = 1{,}41\ veículos/residência$$

Neste último caso, poderíamos representar o algoritmo de uma distribuição observada:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{J} n_j x_j \qquad (30)$$

Fórmula 30: fórmula da distribuição observada segundo Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008, p.83)

Régnier (2007) apresenta este algoritmo para população (μ) e amostra (m). No lugar de j ele usa k, como símbolo:

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{K=p} n_K x_k \qquad (31)$$

Fórmula 31: Média da população de acordo com Régnier (2007, p.9)

$$m = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K=p} n_K x_k \qquad (32)$$

Fórmula 32: Média da amostra conforme Régnier (2007, p.9)

Outra forma de representar este algoritmo, tomando como referência a definição de frequência como sendo $f_j = {}^{n_j}/_{n}$, ou $f_K = {}^{n_K}/_{n}$ (usando k no lugar de j), é:

$$\mu = \sum_{k=1}^{K=p} f_K x_k \qquad (33)$$

Fórmula 33: Média da população de acordo com Régnier (2007, p.9)

$$m = \sum_{k=1}^{K=p} f_K x_k \qquad (34)$$

Fórmula 34: Média da amostra conforme Régnier (2007, p.9)

2.3.1.2. MÉDIA ARITMÉTICA PARA VARIÁVEIS ESTATÍSTICAS CONTÍNUAS[25]

Algumas vezes, os dados da população ou da amostra estão agrupados. Neste caso, para o cálculo da média não temos mais como somar todos os valores da amostra ou da população. A solução é determinar a aproximação destes valores, determinando o ponto médio de cada classe e multiplicando pela frequências de cada classe . Temos em Kendall e Yule (1948, p. 144) a representação do algoritmo como sendo o somatório do produto dos centros de cada classe (representado por X) pelos efetivos de cada classe (o símbolo f de

[25] Utilizamos como referência para o título deste capítulo a apresentação de Régnier (2011).

frequência na fórmula se refere à frequência absoluta ou efetivos[26]) dividido pelo total de efetivos:

$$M = \frac{1}{N}\sum(fX) \qquad (35)$$

Fórmula 35: média aritmética para dados agrupados de população (KENDALL; YULE, 1948, p.144)

Mann (2006, p. 90) usa m para representar o ponto médio e f a frequência absoluta (efetivos). Assim, temos:

$$\mu = \frac{\sum mf}{N} \qquad (36)$$

Fórmula 36: média aritmética para dados agrupados de população (MANN, 2006, p.90)

$$\bar{x} = \frac{\sum mf}{n} \qquad (37)$$

Fórmula 37: média aritmética para dados agrupados de amostra (MANN, 2006, p.90)

Podemos também ver em Régnier (2007) um representação semiótica do algoritmo (38 e 39) no qual utiliza-se para representar o centro do intervalo: c_k .

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=p} n_k\, c_k = \sum_{k=1}^{k=p} f_k\, c_k \qquad (38)$$

Fórmula 38: Média aritmética para dados agrupados de população (RÉGNIER, 2007, p.9)

$$m = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=p} n_k\, c_k = \sum_{k=1}^{k=p} f_k\, c_k \qquad (39)$$

Fórmula 39: Média aritmética para dados agrupados da amostra (RÉGNIER, 2007, p.9)

Consideramos mais adequado esta representação de Régnier (2007) do que as apresentadas por Mann (2006) e por Kendall e Yule (1948). Em Kendall e Yule, se utiliza um símbolo de frequência que pode levantar dúvidas se é frequência relativa ou absoluta. E o X como centro da classe pode levar a confusões, uma vez que este símbolo é bastante usado na

[26] Ver no início deste capítulo problemas com o emprego do termo efetivo e frequência.

Matemática. Kendall e Yule (1948) usam acrescido do índice como significante de cada observação $(X_1; X_2; X_3 \ldots)$. Estes autores usam este símbolo acrescido de um traço para indicar a média aritmética $(\bar{X})$. Na fórmula de Mann (2006) temos o mesmo problema para a frequência e o m pode ser confundido com o símbolo utilizado por alguns autores como Régnier para designar a média de amostra. Assim, considerando os significantes atribuídos aos significados na fórmula de Régnier mais adequados.

No cálculo da média aritmética para dados agrupados, Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008, p. 84) esclarecem que "se supõem uma certa repartição uniforme de observações nas classes ou, ao menos, uma distribuição tal que o centro da classe possa ser considerada como a média dos valores observados nesta classe". Estes autores consideram que mesmo que essa hipótese não possa ser totalmente satisfeita, uma certa compensação dos erros pode ser feita na soma dos termos. Kendall e Yule (1948) destacam que quando temos um volume muito grande de observações, uma solução prática é dividi-lo em classes.

Quando os dados estão agrupados, esta forma de organização dos dados faz com que tenhamos uma variável contínua, mesmo se no levantamento dos destes, a variável fosse uma variável discreta.

As variáveis discretas como esclarecem Kendall e Yule (1948) determinam o intervalo de classe. Assim se temos um levantamento da idade dos alunos de uma classe, temos como intervalo 1 ano. Podemos ter um aluno com 25 anos, mas não teremos nenhuma observação com 25,5 anos. Desta forma, é como se agrupássemos os dados em intervalos de 1 ano. Assim, quando agrupamos os dados desta variável em intervalos maiores de 1 ano, esta variável discreta passa a ser tratada como contínua. Poderíamos ter então, por exemplo, como um dos intervalos de classe [20; 29[,ou seja, teoricamente para este intervalo a idade do funcionário poderia assumir qualquer valor entre 20 anos e até menos de 29 anos. Para o intervalo exemplificado teríamos como centro 25,5 anos.

2.3.1.3. MÉDIA COMBINADA (TRATADA COM MAIS DETALHES NA PROPRIEDADE 7)

Quando temos dois conjuntos de dados e sua média, podemos calcular a média aritmética combinada deste conjunto de dados. Tomando-se n1 e n2 como tamanhos das amostras de x1 e x2, pode-se utilizar para calcular a média aritmética combinada a fórmula (MANN, 2006, p. 81):

$$\bar{x} = \frac{n_1\overline{x_1} + n_2\overline{x_2}}{n_1 + n_2} \qquad (40)$$

Fórmula 40: Média aritmética combinada (MANN, 2006, p.81)

Considerando a soma de n1+n2 = n, temos em Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) outra forma de apresentar a fórmula da média aritmética combinada, chamada por estes autores como a média aritmética de duas ou mais séries que são agregadas. Temos então:

$$\bar{x} = \frac{n_1\overline{x_1} + n_2\overline{x_2}}{n} \qquad (41)$$

Fórmula 41: Média aritmética combinada (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p.81)

2.3.1.4. MÉDIA ARITMÉTICA PONDERADA

A média ponderada[27] foi introduzida em 1712 por Roger Cotes, sendo atualmente utilizada de forma corrente no domínio da economia para o cálculo de preços, itens de consumo, de preços de produção etc (DODGE, 2007a). Segundo Ferreira (2008), a ponderação é a atribuição de pesos. Logo, a média ponderada poderia ser entendida como a média na qual são atribuídos pesos. Para Mann (2006), muitas vezes, determinados valores em um conjunto de dados pode ter um valor maior do que outro. Assim, para diferencia-los, pode-se atribuir pesos diferentes. Por exemplo, em uma avaliação o professor pode considerar que a atividade de um seminário possui maior valor do que um teste escrito. Então pode-se atribuir aos seus alunos um peso maior na nota do primeiro em relação ao outro. Este significado apontado por Mann é muito comum dentro do ambiente escolar, sendo muitas vezes partilhado por professores e alunos. Este autor expressa o cálculo da média aritmética ponderada pela fórmula:

$$\mu = \frac{\sum xp}{\sum p} \qquad (42)$$

Fórmula 42: Média aritmética ponderada (MANN, 2006, p. 82)

Através desta fórmula, temos a indicação que se deve multiplicar cada valor dado pelo seu peso e depois somar os produtos dividindo-se pela soma do total dos pesos. Assim, se

---

[27] Em francês “moyenne arithmétique ponderée”ou em inglês “weighted aritmetic mean” (DODGE, 2007a).

temos as notas: 8; 4; 6, teríamos como média 6. Contudo, se tivermos a primeira nota com peso 4 e as duas outras notas com peso 1, teremos como média 7, com base na fórmula 40, esta média poderia ser assim calculada:

$$\mu = \frac{(4\times 8) + (1\times 4) + (1\times 6)}{4+1+1} = 7$$

Esta forma de apresentação de Mann (2006) pode ser observada também em Dodge (2007b, s/n, tradução nossa) na qual este autor coloca que esta é "igual à soma das observações multiplicadas por seus pesos, dividida pela soma de seus pesos".

Outra forma de apresentar a média pode ser visto em Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) na qual a média ponderada tem o objetivo de "atribuir as diferentes observações uma importância que não é a mesma para todas". Estes autores atribuem no cálculo da média ponderada para cada observação um coeficiente de ponderação ou peso $w_1, w_2, w_3, \cdots, w_n$, consideramos mais adequado. Para não confundir com o sentido de peso dado por Mann (2006) e Dodge (2007a), utilizar apenas o termo coeficiente de ponderação, diferenciando do termo peso. Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) apresentam para o seu cálculo a fórmula:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \qquad (43)$$

Fórmula 43: Somatório dos pesos de uma média aritmética ponderada (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p.94)

Levando em conta a fórmula 43, podemos então concluir que:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = w_1 + \cdots + w_j = \frac{p_1}{\sum_{i=1}^{n} p_i} + \cdots + \frac{p_j}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$$

Para determinar o coeficiente de ponderação, teríamos como procedimento dividir cada peso pela soma dos pesos (utilizando o termo peso no sentido de MANN, 2006). Assim propomos a fórmula abaixo:

$$w_1 = \frac{p_1}{\sum_{i=1}^{n} p_i};\ \cdots;\ w_j = \frac{p_j}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \qquad (44)$$

Fórmula 44 - Fórmula para determinar o coeficiente de ponderação para o cálculo da média aritmética ponderada

Assim em função dessa apresentação, teríamos como representação da técnica para o cálculo da média aritmética ponderada:

$$\bar{x}_w = \sum_{i=1}^{n} w_i \ x_i \qquad (45)$$

Fórmula 45: fórmula da média aritmética ponderada (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p.94)

Onde cada observação $x_1, \cdots, x_n$ temos um peso $w_1, \cdots, w_n$. Assim para o cálculo da média ponderada das notas 8; 4; 6 com pesos 4; 1;1 teríamos o seguinte procedimento:

$$\bar{x}_w = \left(\frac{4}{6}\times 8\right) + \left(\frac{1}{6}\times 4\right) + \left(\frac{1}{6}\times 6\right) = 7$$

Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) apresentam alguns casos nos quais se utilizam a técnica da ponderação:

1. Soma ponderada dos valores de distintas observações nos quais os pesos são as frequências

Temos assim outra forma de representar a média de uma distribuição observada, tomando por base o conceito de média ponderada segundo Dehon, Droesbeke, Vermandele (2008):

$$\bar{x}_w = \sum_{i=1}^{i} f_i \ x_i \qquad (46)$$

Fórmula 46: fórmula da média aritmética ponderada considerando as frequências como ponderações. Adaptamos da fórmula da média de uma distribuição observada.

Trata-se do mesmo procedimento utilizado para o calculo de uma média de uma distribuição observada em função da frequência

Dehon 2. Como média aritmética combinada. Considerando que uma média ponderada de dois conjuntos x_1 e x_2, seus pesos valem respectivamente $^{n_1}/_{n}$ e $^{n_2}/_{n}$ que são pesos proporcionais a cada um dos grupos. Tomando por base a fórmula 41, temos:

$$\bar{x} = \frac{n_1\overline{x_1} + n_2\overline{x_2}}{n} = \frac{n_1\overline{x_1}}{n} + \frac{n_2\overline{x_2}}{n} = \frac{n_1}{n}\overline{x_1} + \frac{n_2}{n}\overline{x_2}$$

2.3.1.5. MÉDIA ARITMÉTICA AMPARADA[28]

Quando temos em um conjunto de dados alguns poucos valores extremos, pode-se utilizar o cálculo da média aritmética amparada. Neste caso se despreza um percentual dos dados acima e abaixo. Tomemos como exemplo o cálculo da média da idade dos funcionários de uma empresa (adaptado de MANN, 2006). A empresa é formada por 10 funcionários com as seguintes idades: 30 anos, 38 anos, 25 anos, 27 anos, 39 anos, 19 anos, 67 anos, 44 anos, 31 anos e 24 anos. Se tirarmos 10 % acima e abaixo, neste exemplo, teríamos que remover o funcionário mais novo (19 anos) e o mais velho (67 anos). Neste caso, teríamos como média aritmética:

$$\mu = \frac{30+38+25+27+39+44+31+24}{8} = 32{,}25$$

Outra medida de tendência central bastante utilizada é a mediana que trataremos a seguir.

2.3.2. MEDIANA

A mediana não é tão antiga como a média. Segundo Dodge (2007a, p. 330) em 1748 "Leonhard Euler e Johann Tobias Mayer propuseram, de uma maneira independente, um método que consistia em dividir as observações de um conjunto de dados em duas partes iguais"[29].

Segundo Dancey e Reidy (2006, p.59) a mediana é "o valor que está no meio de uma amostra". O que é estar no meio de uma amostra? Parece um pouco vaga. Por outro lado esta definição exclui a mediana de uma população. MANN (2006, p. 73) apresenta uma definição mais detalhada: "a mediana representa o valor relativo ao termo posicionado no meio de um conjunto de dados que tenha sido classificado em ordem crescente". Observamos apenas nesta definição que o conjunto de dados poderia ser classificado também de forma decrescente (depende da posição do observador).

Para Régnier (2007), a mediana divide a população (ou amostra, se for o caso) em duas partes de mesmo número de observações. Outra forma de descrever a mediana é a apresentada por Kendall e Yule (1948, p. 150) que afirmam que ela é "o valor central da

[28] Em francês moyenne élaguée.

[29] Observamos, contudo, que isso não é um consenso, segundo Droesbeke e Tassi (1990) pois a mediana surge em 1757 sendo proposta por Roger Joseph Boscovich.

variável quando os valores são arrumados por ordem de grandeza, ou como o valor tal que os valores maiores e menores ocorrem com igual frequência".

Para tratar destas duas definições, tomemos como exemplo uma série {1; 4; 5; 3; 2}, se organizarmos em ordem de grandeza crescente teremos {1; 2; 3; 4; 5}. A mediana é 3 e ela divide o número de observações em duas partes de mesmo número, como definido por Régnier. Ela é o valor central da distribuição quando temos uma ordenação das observações, uma vez que temos as duas primeiras observações antes da mediana e a quarta e quinta observação depois da mediana. Ela também pode ser considerada como o valor que divide os valores maiores e menores em um mesmo número de observações. Na série {1; 2; 7; 7; 7; 7; 7; 9; 10; 11; 20}, temos como mediana 7. Podemos considerar na distribuição ordenada, a mediana como o sexto termo (7). Contudo temos apenas 2 valores abaixo de 7 e 4 valores acima de 7. Apesar disso, podemos considerar que a mediana corresponde ao valor central de uma distribuição ordenada uma vez que ela é o sexto termo tendo cinco termos abaixo e cinco termos acima.

Outra forma de definir a mediana é expresso por Dodge (2007a, p.329) como uma medida de tendência central em que o seu valor "se encontra no centro de um conjunto de observações quando organizadas em ordem crescente ou decrescente". Esta definição centra-se na questão da posição. Dessa forma, o problema da distribuição em um número de valores maiores e menores equitativos não se apresentam neste caso.

Um erro que se pode cometer é considerar que a mediana divide o conjunto de dados ao meio possuindo abaixo ou acima da mesma 50% das observações. Isto pode ser válido quando o conjunto de dados é par, como por exemplo, quando vamos calcular a mediana da série {2; 4; 5; 9}, temos como mediana 4,5 (que não faz parte do conjunto de dados) e neste exemplo 50% dos valores estão acima e 50% dos valores estão abaixo. Tomemos outro exemplo com um número ímpar de observações apresentado na série {1; 2; 3; 4; 5}. A mediana é 3 e temos 40% das observações acima e abaixo da mediana.

Quando temos um número de valores ímpares, podemos calcular a posição da mediana como sendo igual ao número de observações + 1 dividido por 2. Assim se temos cinco observações, a mediana corresponde à terceira observação: ${(5+1)}/{2} = 3$ (${(n+1)}/{2}$ sendo n o número de observações). Como calcular a mediana quando temos um número de observações pares? Se tivermos uma série com quatro elementos, como: {1; 3; 4; 9}, a princípio, a mediana poderia ser qualquer valor entre o terceiro e o quarto termo, uma vez, que este ocuparia uma posição central da série ordenada ou de forma geral poderíamos expressar qualquer valor entre o termo n e n+1 (sendo n o número total de observações). Kendall e Yule (1948) esclarecem que apesar da mediana poder ser qualquer valor entre n e n+1, considera-se por convenção tomar o valor como sendo a média de n+1 e n. No exemplo dado, de acordo com esta convenção, teríamos a mediana da série {1; 3; 4 9} como 3,5.

Podemos observar em Kendall e Yule (1948) a representação M_ι para mediana, em Dodge (2007a) a representação M_d, em Régnier (2010) é representada por Q_2 (uma vez que o valor da mediana corresponde ao segundo quartil), em Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) a representação $x_{1/2}$.

Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) apresentam um algoritmo para determinar a posição da mediana:

$$x_{1/2} = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \tag{47}$$

Fórmula 47: mediana para o número total de observações (n) ímpar (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p.88).

$$x_{1/2} = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} \tag{48}$$

Fórmula 48: Mediana para o número total de observações (n) par (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p.89).

A mediana pode representar o valor central de um conjunto de dados classificados em ordem crescente ou decrescente. Dessa forma, ela divide os dados em duas partes com o mesmo número de elementos.

2.3.2.1. DETERMINAÇÃO DA MEDIANA DE UMA DISTRIBUIÇÃO DE EFETIVOS REPRESENTADA ATRAVÉS DE UMA TABELA.

É comum organizar uma série observada em uma tabela de distribuição de efetivos, o que é uma forma a facilitar a observação dos dados, como também de explorar os dados. Neste caso como determinar a mediana? Como já tratado anteriormente, deve-se considerar que os dados devem ser agrupados em ordem de grandeza do menor para o maior ou o inverso. Deve-se verificar se o número de observações total é par ou ímpar. Quando o número é impar, a mediana corresponde a um dos valores do conjunto de observações, quando o número de observações é par a mediana pode ser ou não um valor observado.

Mediana de uma série com o efetivo total ímpar.

O número de observações da série representada pode ser ímpar ou par. Tomemos como exemplo um levantamento da idade dos funcionários de uma empresa A representado na tabela 11. O número total de observações é 207 que é ímpar. Temos então a mediana como sendo o valor que ocuparia a posição correspondente a : $\mathrm{M_d} = \mathrm{x}_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \mathrm{x}_{\left(\frac{207+1}{2}\right)} = \mathrm{x}_{104}$ (fórmula 47). Dessa forma, a mediana vai ocupar a 104 [a] posição. Na tabela 11, observamos que a medida mediana é 27, uma vez que o valor da mesma é igual ou menor ao efetivo acumulado. Dito de outra forma, ordenando os dados, teremos 45 funcionários com 27 anos ocupando da posição 90[a] a 134[a]. Como 104[a] está entre 90[a] e 132[a] , a 104[a] posição está nesse intervalo.

Tabela 11 – Idade dos funcionários na empresa A.

Idade (xi)	Efetivos (n)	Efetivos acumulados (n_a)
18	19	19
20	30	49
22	25	74
23	15	89
27	45	134
30	38	172
32	35	207
Total	207	207

Fonte: dados da tabela baseada em dados fictícios criados pelo autor da tese para exemplificar as ideias tratadas.

Tomemos uma empresa B, representada na tabela 12, na qual temos um número par de funcionários (212). Para determinar a posição usamos a fórmula 47: $M_d = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} = \frac{x_{\left(\frac{212}{2}\right)} + x_{\left(\frac{212}{2}+1\right)}}{2} = \frac{x_{(106)} + x_{(107)}}{2} = \frac{23+23}{2} = 23$ anos.

Tabela 12 – Idade dos funcionários na empresa B.

Idade (anos) (xi)	Efetivos (n_j)	Efetivos acumulados (N_j)
18	25	25
20	30	55
22	35	90
23	15	105
27	40	145
30	35	180
32	32	212
Total	212	212

Fonte: dados da tabela baseada em dados fictícios criados pelo autor da tese para exemplificar as ideias tratadas.

Consideraremos mais um exemplo de uma empresa C, representado na tabela 13, na qual temos um número par de funcionários (210). Para determinar a posição usamos a fórmula 38: $M_d = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} = \frac{x_{\left(\frac{210}{2}\right)} + x_{\left(\frac{210}{2}+1\right)}}{2} = \frac{x_{(105)} + x_{(106)}}{2} = \frac{23+27}{2} = 25$ anos. Neste exemplo, temos um número que não representa a idade de nenhum funcionário, ele apenas divide em dois grupos com mesmo número de funcionário a série apresentada. Destacamos, como já comentado antes, que poderíamos ter qualquer valor entre 23 e 27 anos como mediana. Contudo utilizamos por convenção o valor médio entre 23 e 27 anos.

Tabela 13 – Idade dos funcionários na empresa C.

Idade (anos) (xi)	Efetivos (f)	Efetivos acumulados
18	25	25
20	30	55
22	35	90
23	15	105
27	40	145
30	33	178
32	32	210
Total	210	210

Fonte: dados da tabela 13 baseada em dados fictícios criados pelo autor da tese para exemplificar as ideias tratadas.

2.3.2.2. DETERMINAÇÃO DA MEDIANA PARA DADOS AGRUPADOS.

Quando os dados estão agrupados, não temos como ordenar os dados, mas podemos identificar em qual classe se encontra a mediana e em seguida determinar o valor aproximado.

Tomemos como exemplo, um conjunto de observações agrupadas sobre a idade dos participantes de um estudo sobre o uso da internet (tabela 14). Para determinar a mediana da série representada o primeiro passo é determinar a classe mediana. Para isso dividimos por dois o número total de efetivos: $\frac{n}{2} = \frac{135}{2} = 67{,}5$. Observando os efetivos acumulados verificamos que este valor encontra-se na terceira classe: [40; 50[, uma vez que é maior do que 51 (efetivos acumulados da classe anterior) e igual ou menor do que 100 (efetivos acumulados da classe que contém a mediana): $51 < 67{,}5 \leq 100$.

Tabela 14 – Participantes de um estudo sobre o uso da internet conforme a idade.

Idade (anos)	Efetivos (n)	Efetivos acumulados (n_a)
[20; 30[	12	12
[30; 40[	39	51
[40; 50[	49	100
[50; 60[	27	127
[60; 70[	8	135
Total (n)	135	135

Fonte: dados da tabela 14 baseada em dados fictícios criados pelo autor da tese para exemplificar as ideias tratadas.

Para calcular este valor utilizamos a fórmula 49:

$$Md = l_{inf} + \left[\frac{\left(\frac{n}{2}\right) - fac_{ant}}{f_i}\right] \cdot h \qquad (49)$$

Fórmula 49: Fórmula para calcular a mediana para dados agrupados (CARVALHO, 2006).

Onde:

$l_{inf} -$ Limite inferior da classe mediana. No exemplo dado temos: $l_{inf} = 40$;

$n -$ Efetivos totais da série. Corresponde no exemplo dado a: $n = 135$;

fac_{ant} – Frequência absoluta acumulada (ou efetivos acumulados) crescente da classe anterior à classe mediana. Corresponde no exemplo dado a: fac_{ant}= 51;

f_i $-$ Frequência absoluta interna (efetivo interno) da classe mediana. Neste exemplo temos: $f_i = 49$;

h $-$Amplitude da classe mediana. Para este caso o valor é de: $h = 10$

Substituindo os valores teremos:

$M_d = 40 + \left[\frac{67,5-51}{49}\right]$ ·10 = 40+3,37 = 43,37 anos.

Podemos justificar, de forma intuitiva, o uso desta fórmula. Para determinar a classe que contém a mediana, dividimos o número de observações ao meio obtendo o valor n/2. A classe que contém a mediana deverá ser a primeira classe na qual n/2 será igual ou menor do que a frequência absoluta acumulada desta classe. Consequentemente n/2 deverá ser maior que a frequência absoluta acumulada da classe anterior:

$$fac_{ant} < \frac{n}{2} \leq fac$$

Parte-se da hipótese de que existe uma divisão das observações em cada classe de maneira uniforme[30] (DODGE, 2007a; DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008) e que "as bordas inferiores e superiores da classe mediana são definidas e conhecidas" (DODGE, 2007a, p.330, tradução nossa). Os efetivos correspondentes à mediana dentro da classe seria a medida ${}^{n}/_{2} - fac_{ant}$ (figura 15). Para estimar[31] a medida da mediana dentro da classe mediana (chamaremos de M_{MdC}[32]), relacionamos ela aos efetivos (ou frequência absoluta) correspondentes à mediana dentro da classe da mesma forma, em que fazemos uma relação entre a amplitude da classe mediana e a frequência absoluta interna da classe mediana, assim podemos estabelecer uma relação:

$$M_{MdC} \rightarrow \left[\frac{n}{2} - fac_{ant}\right]$$

$$h \rightarrow f_i$$

Podemos assim determinar M_{MdC}:

$$M_{Mdc} = \frac{\left[\frac{n}{2} - fac_{ant}\right] \cdot h}{f_i} = \left[\frac{\frac{n}{2} - fac_{ant}}{f_i}\right] \cdot h$$

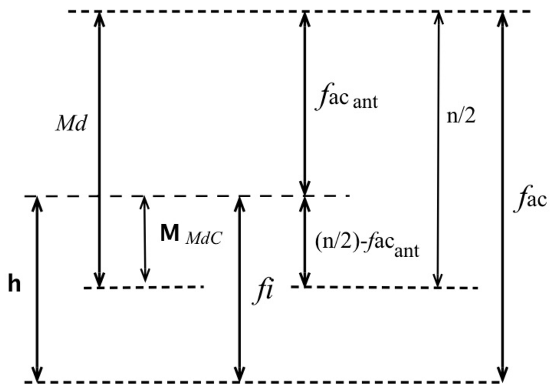
[30] Kendall e Yule (1948, p.151) destacam que "Para a distribuição de frequência de uma variável contínua, pode-se obter um valor suficientemente aproximado da mediana por interpolação. Se a frequência total é grande, é suficiente considerar que os valores em cada classe se distribuem uniformemente no respectivo intervalo".

[31] Assim a medida da mediana é aproximada, podendo ou não corresponder à mediana das observações feitas.

[32] Criamos este símbolo para usar apenas nesta demonstração.

Para determinar a mediana agora, basta somar M_{MdC} com l_{inf} (fórmula 49).

Figura 15 – Mediana para dados agrupados.



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) apresentam a mesma fórmula para determinar a posição da mediana utilizando outros símbolos:

$$x_{1/2} = l_m^- + h_m \frac{\frac{n}{2} - N_{m-1}}{n_m} \qquad (50)$$

Fórmula 50: Fórmula para calcular a mediana para dados agrupados (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p. 92).

Dodge (2007a) apresenta a mesma fórmula mudando alguns símbolos:

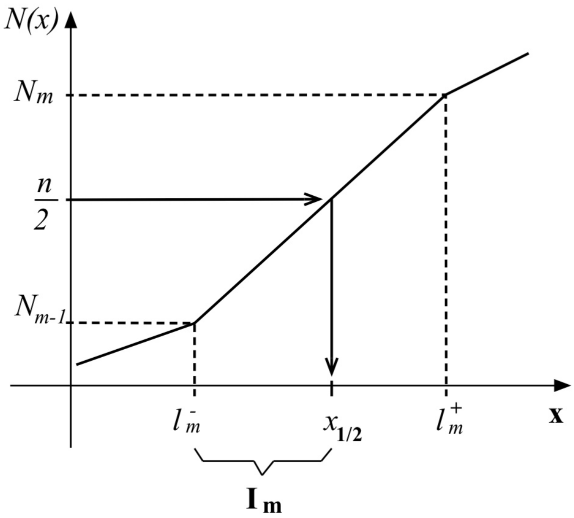
$$Md = L + \left[\frac{\left(\frac{n}{2}\right) - \sum f_{inf}}{f_{Md}}\right] \cdot e \qquad (51)$$

Fórmula 51: Fórmula para calcular a mediana para dados agrupados (CARVALHO, 2006).

Observamos em Kendall e Yule (1948) através de um exemplo em que os autores mostram como calcular a mediana para dados agrupados. Pelos procedimentos usados por estes autores, observamos que se trata do mesmo algoritmo, contudo eles não apresentam uma fórmula. Eles destacam também que quando o número de efetivos é "grande, é suficiente considerar que os valores em cada classe se distribuam uniformemente no respectivo intervalo" (p.151), como apresentamos através das formulas 49 e 50.

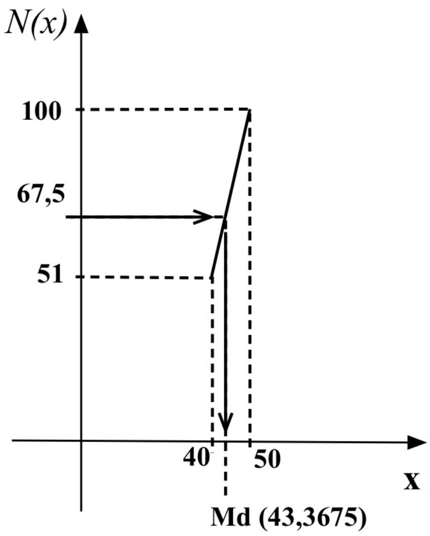
Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008, p. 92) apresentam outra forma de determinar o valor da mediana usando uma solução gráfica. Apresentamos a solução proposta por estes autores na figura 16 (redesenhamos a figura procurando manter a mesma proporção da figura original). Com base nos dados da tabela 14, resolvemos o mesmo problema usando a solução gráfica (figura 17). Para isso usamos o software régua e compasso[33]. Depois redesenhamos a solução obtida com o uso do software iDraw. Representamos a solução do software régua e compasso com a precisão de quatro casas decimais. Um procedimento gráfico similar também é apresentado por Kendall e Yule (1948).

Figura 16 – Solução gráfica para determinação da mediana (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p.92)



Fonte: desenho elaborado pelo autor da tese com base em imagem apresentada por Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008, p.92).

Figura 17 – Solução gráfica com determinação da mediana para os dados da tabela

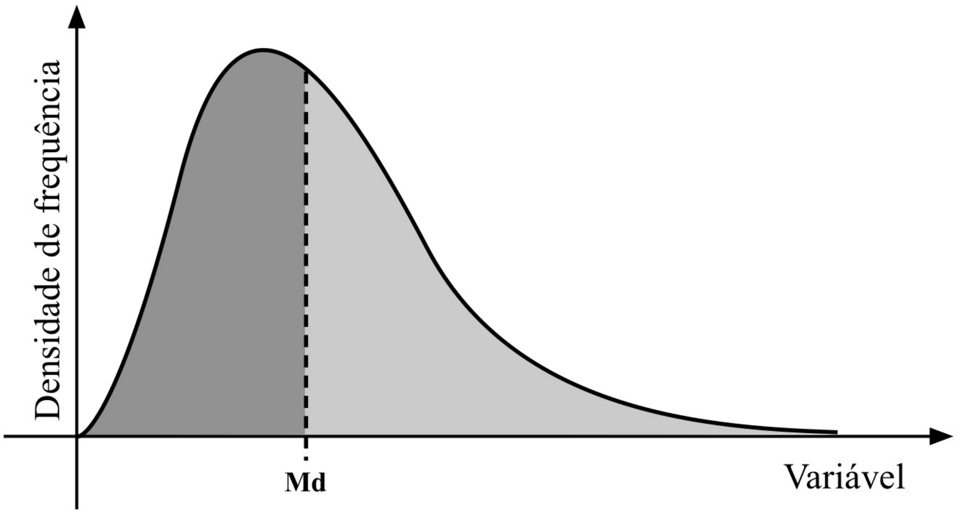


Fonte: elaborado pelo autor da tese.

[33] A solução gráfica é tão precisa quanto a solução algébrica. Contudo deve ser feita com o uso de um software adequado (usamos para isso um software de geometria dinâmica). Quando feito com instrumentos de desenho à mão, como régua e compasso, ou softwares que não possuem precisão, as medidas são aproximadas.

Kendall e Yule (1948, p. 150) esclarecem que em uma curva de frequência a mediana "pode ser definida como o valor da variável cuja ordenada divide a área da curva em duas partes iguais". No gráfico 8 observamos esta propriedade. Nela temos um histograma no qual são representadas uma variável contínua e onde representamos esta propriedade da mediana.

Gráfico 8 – A mediana divide uma curva em duas partes iguais.



Fonte: desenho criado pelo autor da tese para exemplificar as ideias tratadas.

Apresentamos algumas propriedades e observações em relação à mediana:

PROPRIEDADE (md) 1. A mediana distribui a população em duas partes de mesmo efetivo (RÉGNIER, 2007).

Considerando a mediana da série A={3; 5; 7; 10; 12}, temos como mediana 7. A população fica assim dividida em duas partes iguais. Cada parte com duas observações (40% das observações). Destacamos quando temos variáveis agrupadas, uma aproximação.

PROPRIEDADE (md) 2. A mediana não é influenciada por valores extremos (ao contrário da média). (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008).

Tomemos como exemplo a série {1, 4, 5, 6, 9} e a série {1, 4, 5, 6; 90}. Nos dois casos a mediana é 5. Tendo assim dois valores acima da mediana e dois valores abaixo da mediana. Já no caso da média aritmética, temos para a primeira série a média aritmética 5 (igual à mediana e tal como a mediana divide a série em dois valores acima e dois valores abaixo). Na segunda série, a média aritmética é 21,2. Este valor posiciona a média afastada de todos os valores e dividindo a série em quatro valores abaixo da média e apenas um valor acima da média.

PROPRIEDADE (md) 3. A mediana frequentemente corresponde ao valor de um dos dados, ao contrário da média.

Quando temos variáveis quantitativas discretas ou variáveis ordinais e o número de observações é ímpar, a mediana corresponde a um valor observado. Quando o número de observações é par e, os valores centrais usados para o cálculo da mediana são iguais. A mediana também corresponde a um dos valores da série. Assim, em função dos dados, é muito mais provável que a mediana corresponda a um valor observado do que a média. Como destaca Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008, p 89, tradução nossa) “Em numerosos casos, constatamos que a mediana é um valor observado, contrariamente à média aritmética $\bar{x}$ - isto que lhe dá um sentido concreto evidente”.

PROPRIEDADE (md) 4. A mediana corresponde ao menos a 50% dos valores observados abaixo desta ou acima desta.

Tomemos como exemplo as seguintes observações $\{3; 4; 7; 12; 20\}$. Neste caso temos 40% dos valores abaixo da mediana e 40 % dos valores acima desta. Podemos dizer que 60% dos valores são iguais ou inferiores à mediana e 60% dos valores estão acima ou iguais à mediana. Tomando como referência as observações {3; 4; 7; 12} em um total par. Neste caso a mediana é 5,5 e temos 50% dos valores iguais ou abaixo da mediana e 50% dos valores iguais ou acima da mediana. Deve-se considerar, contudo, alguns limites desta propriedade. Quando temos variáveis quantitativas agrupadas em classes (contínuas), o valor da mediana é uma estimação. Considerando que quando temos uma grande quantidade de observação, pressupõe-se uma distribuição uniforme (KENDALL; YULE, 1948). Esta propriedade leva a Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) proporem a seguinte relação. Considerando que N(x) é uma função cumulativa que representa os números de observações inferiores ou iguais a x e que N*(x) é uma função cumulativa, à direita, correspondendo aos números de observações superiores ou iguais a x. Considerando o símbolo para mediana usada por estes autores (x ½) temos a seguinte equação:

$$N\left(x_{1/2}\right) = N^{*}\left(x_{1/2}\right)$$

Fonte : Equação proposta por Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008, p. 90)

Considerando como o número de observações iguais a n, podemos ainda expressar:

$$N\left(x_{1/2}\right) \geq \frac{n}{2} \ e \ N^{*}\left(x_{1/2}\right) \geq \frac{n}{2}$$

Fonte : Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008, p. 91)

OBSERVAÇÃO (md) 1. As seis condições de uma medida de tendência central: caso da mediana (KENDALL; YULE, 1948)

Com relação às seis condições de uma medida de tendência central (KENDALL; YULE)[34], observamos que a mediana atende as três primeiras: é rigorosamente definida (não é estimada por um observador), é baseada em todas as observações realizadas e é facilmente compreensível.

Quanto à quarta condição que trata do seu cálculo, ela possui maior facilidade deste do que a média aritmética. Quando temos os dados ordenados bastando-se tomar a medida do valor que ocupa a posição central. Destacamos quanto a este aspecto que quando temos uma certa quantidade de valores organizados, as observações e os seus efetivos, ou quando os dados estão agrupados é mais simples o cálculo da média. Quando não temos disponível os valores individuais, fica inviável o cálculo da mediana, isto é, exemplificado por Kendall e Yule (1948). Para o caso do cálculo do salário médio de uma empresa que pode ser feito apenas tendo o número de funcionários e o valor da folha de pagamentos, contudo não se pode determinar a mediana. Por outro lado se temos alguns valores finais indefinidos de um conjunto de observações, fica inviável calcular a média, podendo neste caso ser feito o cálculo da mediana (KENDALL; YULE, 1948).

Em relação à quinta propriedade, que trata da estabilidade em relação à flutuação, a amostra Kendall e Yule (1948) destacam que em geral a média é mais estável que a mediana. Contudo, quando temos valores extremos, a mediana é mais adequada, pois não é influenciada por estes valores.

---

[34] Apresentadas no início do item: 2.3 Medidas de tendência central.

Em relação à última propriedade, a média possui um tratamento algébrico mais fácil do que a mediana. Esta superioridade da média pode ser observada em diversas situações. Quando precisamos combinar a média de várias séries em uma única série à média, o mesmo não pode ser feito com a mediana. Também não se pode, como se pode na média, obter a mediana da soma ou da diferença da mediana de duas séries. Em função desta e de outras situações, a mediana possui limitações bastante significativas quando comparada à medida no que diz respeito ao tratamento algébrico (KENDALL; YULE, 1948). Em função destes aspectos, apresentamos a observação que se segue.

OBSERVAÇÃO (md) 2. Para o cálculo da mediana é necessário conhecer a distribuição dos dados.

Tendo a distribuição dos dados pode-se ordenar as observações determinando a posição da mediana. Mesmo quando temos dados agrupados, temos uma estimativa de uma distribuição uniforme em cada intervalo, podendo assim estimar a mediana.

No caso da média esta informação não é necessária. Dessa forma, é possível calcular a média combinada tendo para isso as médias de duas séries e o número de observações destas. Contudo, não se pode calcular a mediana de duas séries tendo apenas a mediana de cada série e o número total de efetivos de cada série.

PROPRIEDADE (md) 5. A mediana é o número real que minimiza o módulo dos desvios de uma série.

Dodge (2007a, p. 1326, tradução nossa) esclarece que “a soma dos desvios em valor absoluto entre cada observação x_i de um conjunto de dados e um valor α é mínimo quando α é igual à mediana”. Podemos expressar assim:

$$\text{mín} \propto \sum_{i=1}^{n} |x_i - \alpha| \Rightarrow \alpha \ = M_d \qquad (52)$$

Fórmula 52: Soma dos desvios em valor absoluto é mínimo com a mediana (DODGE, 2007a, p. 1326).

Assim, o valor que minimiza o módulo dos desvios de uma série é a mediana. Podemos assim afirmar que ela representa o mínimo da função formada pelos módulos dos desvios. Na fórmula 52 (substituímos α por x) temos uma função definida pelos desvios de um conjunto de observações representada por x_i em relação a x:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - x| \tag{53}$$

Fórmula 53: Função formada pelo módulo dos desvios médios, considerando xi cada observação.

Tomemos como exemplo um levantamento com três observações {3, 6, 12). A mediana neste caso é 6 e a média é igual a 10,5. A soma dos desvios deste conjunto de observações em relação aos possíveis valores de x, considerando x um número real, nos dá uma equação:

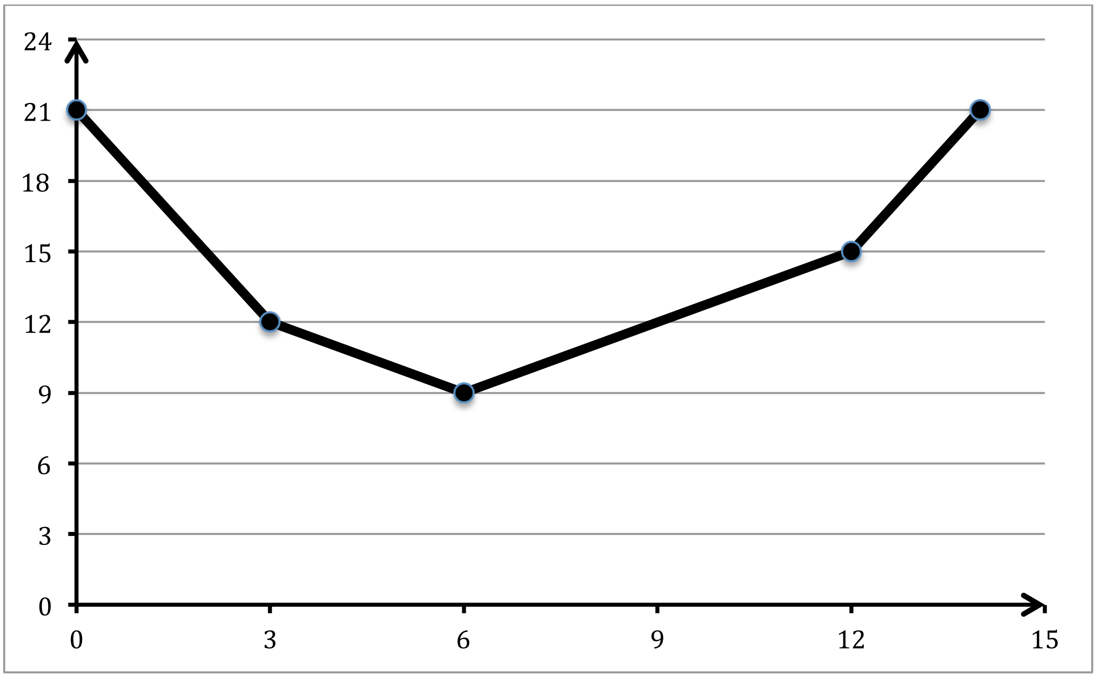
$$f(x) = |3 - x| + |6 - x| + |9 - x|$$

Considerando que f(x) é positivo temos:

Se	**Temos:**	
$\boldsymbol{x} < 3$	$f(x) = (3 - x) + (6 - x) + (12 - x)$	$\Rightarrow f(x) = 21 - 3x$
$\boldsymbol{x = 3}$	$f(x) = (3 - 3) + (6 - 3) + (12 - 3)$	$\Rightarrow f(x) = 12$
$\mathbf{3} < x < 6$	$f(x) = -(3 - x) + (6 - x) + (12 - x)$	$\Rightarrow f(x) = 15 - x$
$\boldsymbol{x = 6}$	$f(x) = -(3 - 6) + (6 - 6) + (12 - 6)$	$\Rightarrow f(x) = 9$
$\mathbf{6} < x < 12$	$f(x) = -(3 - x) - (6 - x) + (12 - x)$	$\Rightarrow f(x) = 3 + x$
$\boldsymbol{x = 12}$	$f(x) = -(3 - 12) - (6 - 12) + (12 - 12)$	$\Rightarrow f(x) = 15$
$\mathbf{12} < x$	$f(x) = -(3 - x) - (6 - x) - (12 - x)$	$\Rightarrow f(x) = -21 + 3x$

Podemos observar que o mínimo da função é igual a 9, quando f(x)=9, o valor de x=6 (mediana). No gráfico 9 traçamos esta função:

Gráfico 9 – Gráfico da função $f(x) = |3 - x| + |6 - x| + |9 - x|$ traçado com auxílio do Excel.



Fonte: gráfico desenhado pelo autor da tese com auxilio do Excel.

2.3.3. MODA

Régnier (2007, p.9, tradução nossa) apresenta claramente duas definições para moda em função do tipo de variável. Quando se trata de uma variável discreta ou qualitativa, a moda corresponde ao "efetivo máximo ou à frequência máxima". Quando se trata de uma variável contínua, a moda "é um valor da variável correspondente à densidade de frequência máxima". Pela definição observamos algumas das características da moda. A primeira é que ela pode ser usada tanto com variáveis discretas como qualitativa (trataremos com mais detalhes este aspecto a seguir, quando comparamos o uso da média, mediana e moda em função do tipo de variável).

Em função das observações podemos ter uma série que possui apenas uma moda (unimodal), que possui duas modas (bimodal), com três modas (trimodal), com mais modas (plurimodal), (DODGE, 2007a). Apresentamos a seguir as séries A, B e C que são unimodal, bimodal e trimodal.

Na série A (tabela 15) temos 18 alunos com 12 anos. É a idade com maior número de alunos inscritos na aula de reforço. Neste caso a moda é 12. Temos uma série unimodal.

Tabela 15 – Série A: Idade dos alunos matriculados nas aulas de reforço de matemática

	Idade dos alunos (em anos)					
	11	12	13	14	15	16
Efetivos	12	18	11	10	5	3

Fonte: dados fictícios criados pelo autor da tese para exemplificar as ideias tratadas.

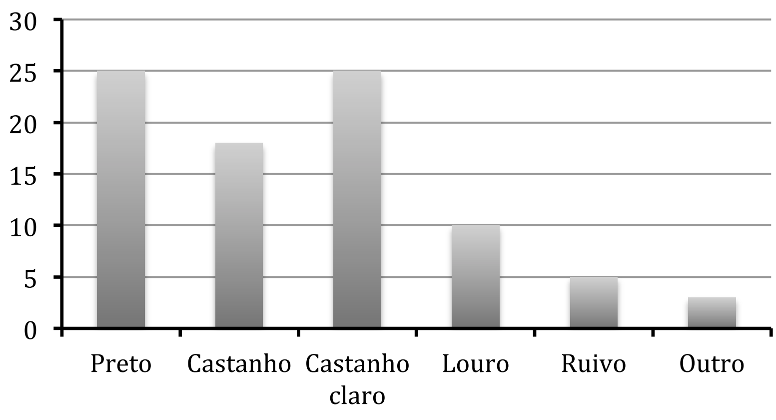
Na série B (tabela 16), temos duas cores de cabelos com mesmo número de efetivos e com o maior número de efetivos, o preto e o castanho claro. Assim podemos dizer que esta série é bimodal, pois tem duas modas: preto e castanho claro. Outro aspecto desta série é que o nível de mensuração é nominal. Não temos como calcular a média se somarmos e dividirmos os valores pelo número de cores de cabelos, assim teríamos 14,33, o que representa 14,33 seria a média de quê? Não faz sentido usar a média neste caso. Também não podemos ordenar os dados para calcular a mediana. Neste caso, podemos apenas usar a moda como medida de tendência central. No gráfico 10, construída com base nos dados da tabela 16, podemos visualizar rapidamente as duas modas (barras mais altas).

Tabela 16 – Série B: Preferência dos clientes de um salão de beleza pela cor dos cabelos.

	Cor dos cabelos					
	Preto	Castanho	Castanho claro	Loiro	Ruivo	Outro
Efetivos	25	18	25	10	5	3

Fonte: dados fictícios criados para exemplificar as ideias tratadas.

Gráfico 10 – Série B: Preferência dos clientes de um salão de beleza pela cor dos cabelos.



Fonte: dados da tabela 18 baseada em dados fictícios criados pelo autor da tese para exemplificar as ideias tratadas.

Na série C (tabela 17), temos três níveis de escolaridades com o maior número de frequentadores, assim temos uma série trimodal. Nesta série o nível de mensuração é ordinal. Nela podemos falar em mediana, uma vez que os dados podem ser ordenados em função do nível de escolaridade. A mediana na série C é ensino médio, uma vez que se ordenássemos, ela ocuparia a posição número 62 que está no ensino médio. Ela não corresponde neste caso à moda. Não se pode calcular a média desta série, pois não faz sentido.

Tabela 17 – Nível de escolaridade dos frequentadores de uma biblioteca pública.

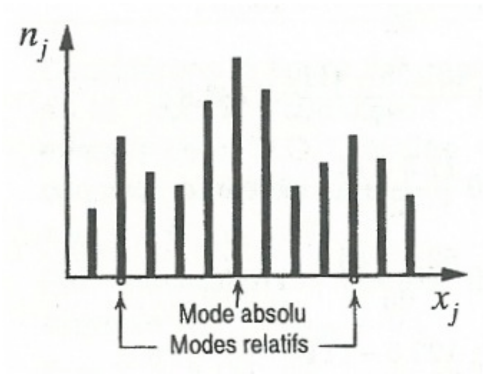
	Nível de escolaridade				
	Ensino fundamental incompleto	Ensino fundamental	Ensino médio	Ensino superior	Pós-graduação
Efetivos	8	30	25	30	30

Fonte: dados da tabela 18 baseada em dados fictícios criados pelo autor da tese para exemplificar as ideias tratadas.

Podemos também ter séries em que não existem moda (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008). Se na série C o número de frequentadores fosse em mesmo número em todos os níveis de escolaridade, podemos dizer que não existe moda. Observamos publicações que a classificam em unimodal e multimodal (KENDALL; STUART, 1977; DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008), em unimodal, bimodal e trimodal (DODGE, 2007a), como também autores que falam da moda e da possibilidade de se ter mais de uma moda, sem contudo, utilizar um termo para designar estas variações (NOVAES; COUTINHO, 2009).

Observamos em Dehon, Droesbeke, Vermandele (2008) além da classificação em unimodal e multimodal, uma outra: moda absoluta e moda relativa. Estes autores esclarecem que podemos ter um valor correspondente ao efetivo máximo e além de máximos relativos. Apresentamos no gráfico 11, um gráfico produzido por estes autores para ilustrar este caso. Consideramos esta classificação pouco usual e de utilização bastante restrita.

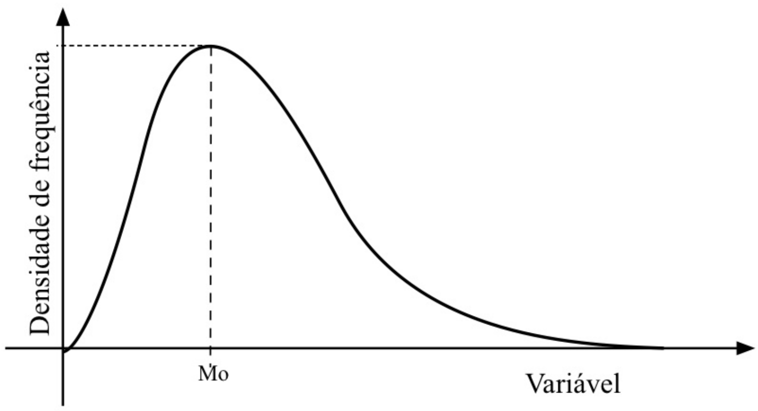
Gráfico 11 – Moda absoluta e relativa segundo Dehon, Droesbeke, Vermandele (2008)



Fonte: Dehon, Droesbeke, Vermandele (2008, p. 102)

Para dados contínuos a moda é dada pela densidade de frequência máxima (gráfico 12). Estes dados podem estar agrupados. Neste caso, a moda está situada no intervalo de maior densidade de frequência. Régnier (2012) esclarece que se pode fornecer como estimação pontual para a moda o centro do intervalo de densidade de maior frequência. Como não temos todos os valores, não podemos calcular com precisão a moda, logo o valor da moda que obtemos é uma estimação.

Gráfico 12 – Moda para dados contínuos.



Fonte: gráfico desenhado pelo autor da tese para exemplificar as ideias tratadas.

Na tabela 18 temos os dados agrupados de uma série. A frequência é obtida ao dividirmos o número de efetivos de cada intervalo pelo total de efetivos. A densidade de frequência é obtida ao dividir a frequência pela amplitude de cada intervalo. A densidade de frequência máxima neste caso é 0,0342. Neste caso, a moda pode ser estimada como sendo o centro do intervalo [40; 50[, ou seja, 45.

Tabela 18 – Idade dos funcionários de uma empresa D.

Intervalos (anos)	Amplitude h	Efetivos (pessoas)	Frequência f	Densidade de frequência
[18; 30[	12	11	0,0753	0,0063
[30; 40[	10	44	0,3014	0,0301
[40; 50[	10	50	0,3425	0,0342
[50; 60[	10	32	0,2192	0,0219
[60; 70[	10	9	0,0616	0,0062
Total		146	1,00000	

Fonte: dados fictícios criados para exemplificar as ideias tratadas.

Apresentamos a formula 54, para determinar a densidade de frequência, baseados em Régnier (2012).

$$Densidade\ de\ frequência = \left(\frac{n_i}{N}\right)\Big/_{h} \qquad (54)$$

Fórmula 54: Densidade de frequência de um intervalo. Onde n_i corresponde ao efetivo de cada intervalo, N representa o total dos efetivos, h representa a amplitude de cada intervalo.

Com base no que foi exposto, apresentamos algumas propriedades sobre a moda.

PROPRIEDADE (mo) 1. A moda pode ser usada tanto com variáveis quantitativas como com variáveis qualitativas. Ao contrário da média (quantitativas) e mediana (variáveis quantitativa e qualitativa ordinal).

PROPRIEDADE (mo) 2. Nas variáveis quantitativas discretas e nas variáveis qualitativas, a moda corresponde ao efetivo máximo ou frequência máxima de uma observação;

PROPRIEDADE (mo) 3. Em uma variável quantitativa contínua, a moda corresponde à densidade de frequência máxima.

PROPRIEDADE (mo) 4. Quando temos a moda agrupada em classes de mesmo comprimento, a moda corresponde à classe com maior valor.

PROPRIEDADE (mo) 5. Em variáveis quantitativas discretas e variáveis qualitativas, a moda vai corresponder sempre a um valor observado.

Esta propriedade faz com que a moda tenha um sentido concreto.

Destacamos a seguir algumas observações sobre a moda.

OBSERVAÇÃO (mo) 1. Uma série pode não ter moda (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008).

OBSERVAÇÃO (mo) 2. Ao contrário da média e mediana, podemos ter mais de uma moda em uma série.

OBSERVAÇÃO (mo) 3. Podemos ter uma moda com valor zero.

Tomemos como exemplo a moda das temperaturas em um determinado mês do ano, em uma cidade na França, em que esta pode ser 0^0C. Podemos também ter a média igual à zero, por exemplo, a média de -2, -1, 1, 2 é zero, ou também a mediana. Contudo, acreditamos que isto se deve levar em conta no ensino, ao criar situações com valores iguais à zero para que se possa discutir a validade deste resultado. Podemos também ter 0 no sentido de ausência. A moda dos carros por residência pode ser igual a 0.

OBSERVAÇÃO (mo) 4. Um conjunto de dados pode ter mais de uma moda. Quando ele possui duas modas é chamado de bimodal. Quando este possui três modas é chamado de trimodal. Quando temos um número maior pode ser chamado de plurimodal (DODGE, 2007a).

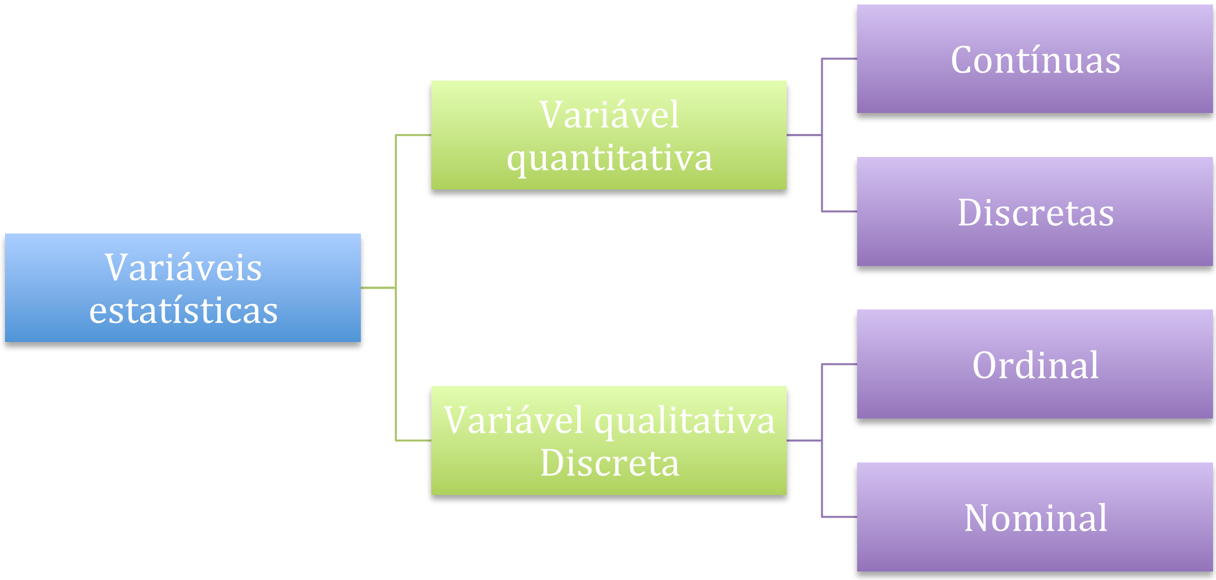
2.3.4. USO DA MÉDIA, DA MODA E DA MEDIANA

Levin e Fox (2004) apresentam três situações que podem orientar quais das medidas de tendência central (média, moda ou mediana) deve-se utilizar: nível de mensuração; forma da distribuição dos dados; objetivos da pesquisa. Consideramos mais adequado do que o nível de mensuração, a classificação segundo o tipo de variável proposta por Régnier (2011a).

2.3.4.1. TIPO DE VARIÁVEL

Régnier (2011a) organiza as medidas de tendência central segundo as variáveis, procuramos sintetizá-las na figura 18. Nas escalas ordinal e de razão, as variáveis são quantitativas e podemos utilizar a média, a moda e a mediana com este tipo de variável. Dessa forma, torna-se desnecessário classificar as escalas como proposto por Levin e Fox (2004) e depois reagrupá-las para estes dois casos as mesmas medidas de tendência central.

Figura 18 – Classificação das variáveis estatísticas segundo Régnier (2011a).



Fonte: elaborado pelo autor da tese baseado em Régnier (2011a)

Quando temos uma variável qualitativa, cuja escala de medida é ordinal, temos dados que obedecem a uma determinada ordem. Por exemplo, nível de escolaridade: 0 – Nenhum; 1 – Ensino fundamental; 2 – Ensino médio; 3 – Ensino superior; 4 – Pós-graduação. Neste caso, podemos pensar na moda como também mediana. Tomemos como exemplo a tabela 19.

Tabela 19 – Nível de escolaridade dos torcedores do time de futebol A.

	Nível de escolaridade				
	Nenhum	Ensino fundamental	Ensino médio	Ensino superior	Pós-graduação
Efetivos	150	320	110	200	110
Efetivos acumulados	150	470	580	780	890

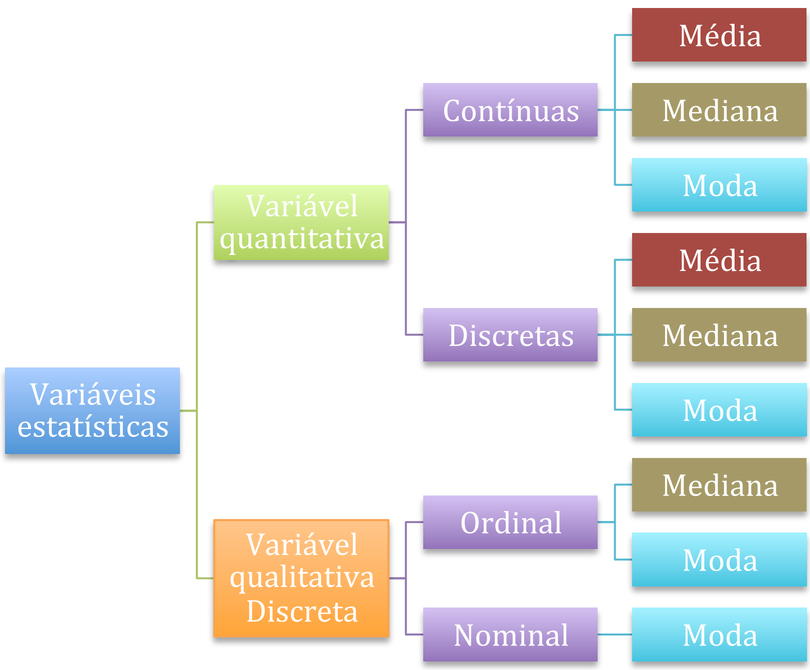
Fonte: dados fictícios criados para exemplificar as ideias tratadas.

Os dados estão organizados em ordem crescente de escolaridade. A moda está no ensino fundamental, pois é o valor mais frequente. Como os dados podem ser ordenados, podemos observar que os efetivos acumulados no ensino fundamental contemplam mais da metade do total de efetivos. Dessa forma, a mediana está no ensino fundamental. Não podemos calcular a média.

No caso das variáveis qualitativas, quando elas são do tipo nominal, não podemos calcular a média, uma vez que elas não podem assumir valores numéricos (podemos até relacionar as variáveis a números, mas não podemos efetuar operações, neste caso, nos números) como também elas não podem ser ordenadas. Logo não podemos calcular a mediana. Tomemos como exemplo deste tipo de variável a cor do cabelo. Neste caso, não podemos calcular a média das cores dos cabelos (não podemos somar castanho + preto + loiro + ruivo + preto e dividir pelo número de valores obtendo a média). Também não podemos calcular a mediana, pois elas não podem ser ordenadas. Neste caso, podemos apenas calcular a moda. Ao tratarmos da moda, apresentamos um exemplo utilizando para isso a tabela 16 (Preferência dos clientes de um salão de beleza pela cor dos cabelos) e o gráfico 10 que exemplifica este caso.

Na figura 19, fazemos uma síntese do uso da moda, mediana e média segundo organização proposta por Régnier (2011a). Acrescentar a dispersão, acreditamos que para a média teríamos os valores de dispersão associados, tais como: o desvio padrão, a variância etc.

Figura 19 – Emprego da média, mediana e moda em função do tipo de variável.

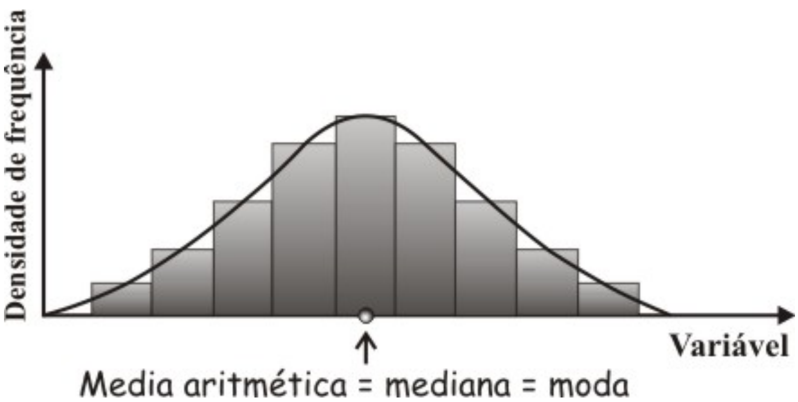


Fonte: elaborado pelo autor da tese baseado em Régnier (2011a)

2.3.4.2. FORMA DA DISTRIBUIÇÃO DOS DADOS

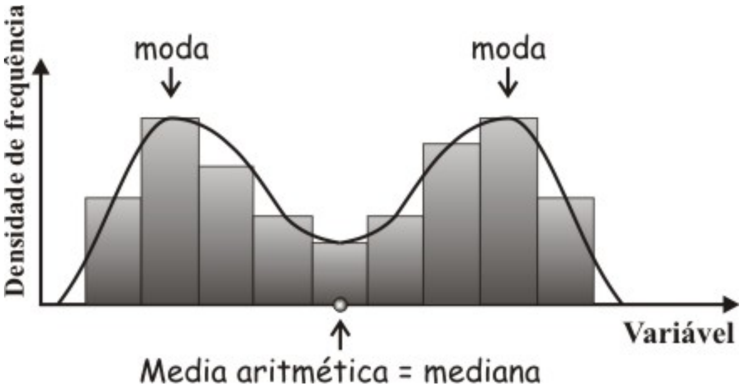
Em uma distribuição simétrica a média, a moda e a mediana coincidem (KENDALL; YULE, 1948). O gráfico 13 ilustra este caso. Neste caso, poderíamos adotar qualquer uma destas medidas, sendo assim poderia se escolher a mais simples de calcular. Contudo, podemos ter uma distribuição bimodal simétrica em que a mediana e a média coincidam, mas a moda não. O gráfico 14 ilustra este caso. No caso de uma distribuição assimétrica à direita ou à esquerda, temos a moda como a medida com maior densidade de frequência (gráficos 15 e 16), a mediana como intermediário e a média como menor densidade de frequência (a medida da média possui o maior valor para o gráfico 15 e menor para o gráfico 16).

Gráfico 13 – A moda, mediana e média em uma distribuição simétrica dos dados.



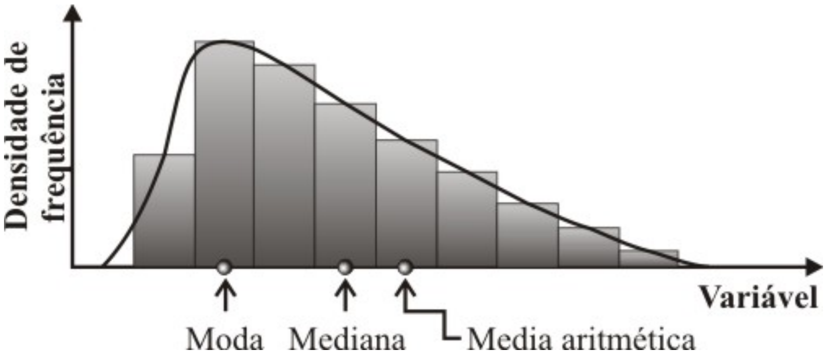
Fonte: desenho elaborado pelo autor da tese baseado em Mann (2006), substituindo frequência por densidade de frequência, conforme Régnier (1988b).

Gráfico 14 – A moda, mediana e média em uma distribuição simétrica bimodal.



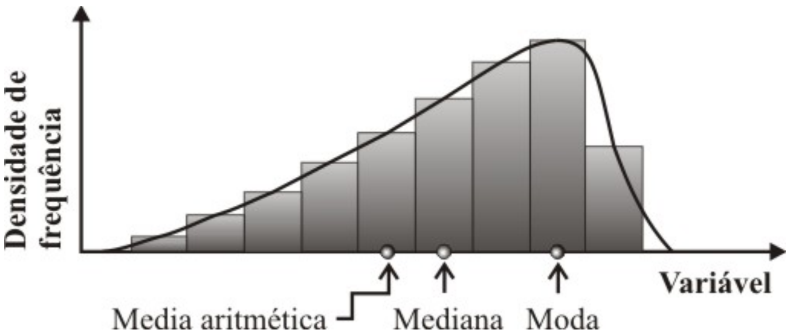
Fonte: desenho elaborado pelo autor da tese

Gráfico 15 – Distribuição assimétrica à direita.



Fonte: desenho elaborado pelo autor da tese baseado em Mann (2006), substituindo frequência por densidade de frequência, conforme Régnier (1988b).

Gráfico 16 – Distribuição assimétrica à esquerda.

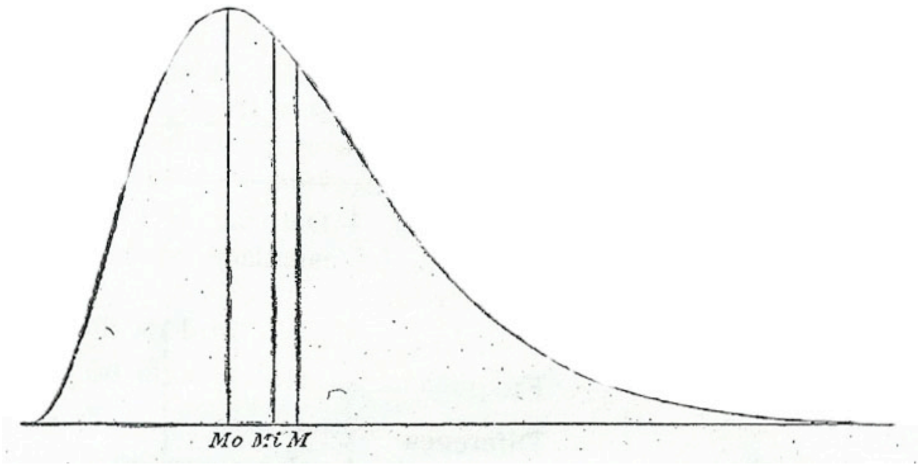


Fonte: desenho elaborado pelo autor da tese baseado em Mann (2006), substituindo frequência por densidade de frequência, conforme Régnier (1988b).

Kendall e Yule (1948) esclarecem que quando temos uma distribuição ideal moderadamente assimétrica, como no gráfico 17, existe uma relação empírica aproximada que pode ser descrita pela fórmula 55. Esta fórmula indica que a mediana fica a um terço da distância entre a média e a moda a contar da média[35], considerando como sendo $\boldsymbol{a}$ a distância entre a mediana e a média. Então procuramos representar esta relação na figura 20.

[35] Como o valor da média é menor do que o da mediana, ao subtrairmos da média a mediana, teremos como resultado um número negativo que multiplicado por -3 dará um número positivo. Assim teremos na fórmula 55 a moda igual à média mais 3 vezes a distância entre a média e a mediana.

Gráfico 17– Distribuição ideal moderadamente assimétrica.

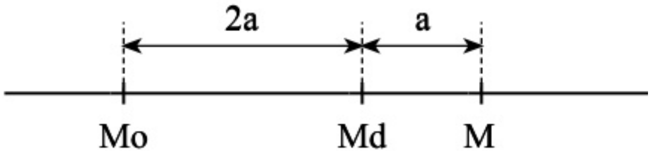


Fonte: Kendall e Yule (1948, p. 148).

$$moda = média - 3(média - mediana) \qquad (55)$$

Fórmula 55: Relação empírica entre a moda, a mediana e a média (KENDALL; YULE, 1948, p. 155).

Figura 20 – Relação entre a moda, mediana e média.



Fonte: desenho elaborado pelo autor da tese baseado na relação empírica apresentada por Kendall e Yule (1948)

Na tabela 20, temos um exemplo de uma aplicação desta relação empírica. Nela temos uma distribuição moderadamente assimétrica. A diferença entre a moda aproximada calculada através desta relação empírica e da moda real é pequena chegando a no máximo a 2,1 centésimos.

Tabela 20 – Comparação entre distribuição de alturas barométricas em quatro estações resultantes de observações diárias.

Estação	Média M	Mediana Md	Moda aproximada Moa	Moda verdadeira Mov	Diferença Mov-Moa
Southampton	29,981	30,000	30,038	30,039	-0,001
Londonderry	29,891	29,915	29,963	29,960	0,003
Carmartehn	29,952	29,974	30,018	30,013	-0,005
Glasgow	29,886	29,906	29,946	29,967	0,021
Dundee	29,870	29,890	29,930	29,951	0,021

Fonte: Kendall e Yule (1948, p. 156).

A média é influenciada por todos os valores, assim quando temos valores extremos, esta relação tende a se modificar. Ela é assim influenciada por valores menos frequentes e tende a se deslocar para a extremidade da cauda. Já a moda em uma distribuição unimodal é o pico da curva no qual temos as medidas mais frequentes. Enquanto a média é influenciada por valores extremos, o mesmo não ocorre com a mediana que tende a ficar mais próxima do centro. Esta característica faz com que Levin e Fox (2004) a recomendem para distribuições assimétricas o uso da mediana. Para exemplificar isto, estes autores citaram o salário dos funcionários de uma pequena empresa e destacam que se fosse um profissional de relações humanas contratado para divulgar uma imagem positiva da empresa ele utilizaria a média dos salários da empresa. Se fosse um representante de um sindicato utilizaria a moda para reivindicar melhorias salariais. E um pesquisador social deveria utilizar a mediana, pois está mais próxima do centro e das outras medidas de tendência central. Contudo o ideal seria divulgar as três medidas. Na tabela 21, adaptamos para valores atuais este quadro, como também modificamos a frequência da tabela original de Levi e Fox (2004). Nesta tabela, a moda corresponderia a R$ 700,00, a mediana a R$ 1000,00 e a média R$ 1.778,95.

Tabela 21 – Distribuição dos salários na empresa E.

	Salário em reais (moeda Brasil)				
	R$ 700,00	R$ 1000,00	R$ 2.500,00	R$ 4.500,00	R$ 7.000,00
Efetivos	9	4	3	2	1

M= R$ 1778,95; Md= R$ 1.000,00; Mo= R$ 700,00

Fonte: dados fictícios criados pelo autor da tese (adaptado de LEVI; FOX, 2004) para exemplificar as ideias tratadas.

Outro exemplo citado por estes autores é de uma distribuição bimodal. Um pesquisador faz um levantamento em famílias de baixa renda para identificar qual é o tamanho ideal de família obtendo os dados na tabela 22.

Tabela 22 – Tamanho ideal de família: levantamento em famílias de baixa renda

	Número de membros na família								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Efetivos	1	3	4	2	1	2	4	2	1

Fonte: dados encontrados em Levin e Fox (2004, p. 89) criados para exemplificar as ideias tratadas.

A média deste levantamento seria 4,9, a mediana 4,5, contudo seria mais adequado usar a moda indicando que o tamanho mais frequente nas famílias pesquisadas é com 3 e 7 membros. Dessa forma, a forma como os dados se distribuem podem indicar qual a medida de tendência central mais adequada, mas isto também vai depender dos objetivos da pesquisa.

2.3.4.3. OBJETIVOS DA PESQUISA

Levin e Fox (2004) apresentam algumas situações e recomendações de uso:

- Se o pesquisador pretende uma medida rápida e simples ou trabalha com uma distribuição bimodal é preferível o uso da moda;
- Caso se procure uma medida mais precisa, se recomenda a média e a mediana;
- Para distribuições assimétricas é preferível a mediana[36];
- A mediana leva vantagem em relação à média quando se trabalha com medidas extremas, uma vez que ela não é influenciada pela mesma;
- A mediana também permite dividir os dados em função de preferências de pesquisa. No exemplo da tabela 22, poderíamos pensar que a mediana 4,5 separa os dados em dois grupos de mesmo numero de efetivos, metade do entrevistados consideram ideal uma família abaixo de 4,5 membros por família e metade acima deste valor;
- Para distribuições próximas a uma distribuição simétrica, a média é o ideal por permitir tratamentos estatísticos mais sofisticados;
- A média é mais estável uma vez que varia menos quando se extraem diferentes amostras de qualquer população.

[36] Veja o exemplo dos salários dos funcionários de uma empresa.

Kendall e Yule (1948) destacam a média aritmética como a mais indicada por diversas razões: possui um tratamento mais simples; na maioria dos casos pode-se determinar o seu valor; ela é menos sujeita à flutuação da amostra; permite um tratamento matemático mais avançado.

2.3.5. OUTRAS MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

Alem da média aritmética, mediana e moda, existem outras medidas de tendência central como a:

- Média geométrica
- Média harmônica
- Média quadrática
- Média truncada/média amparada

Estas medidas não são abordadas nos livros que analisaremos, desta forma não serão exploradas neste capítulo.

2.4. MEDIDAS DE DISPERSÃO

As medidas de tendência central apresentadas não dão uma ideia de como os dados estão dispersos. Consideremos duas empresas com média das idades dos funcionários de 27 anos. Podemos apenas com esta informação ter uma ideia clara de como está organizada a empresa? Considere um levantamento dos funcionários das duas empresas e a idade dos mesmos representada na tabela 23.

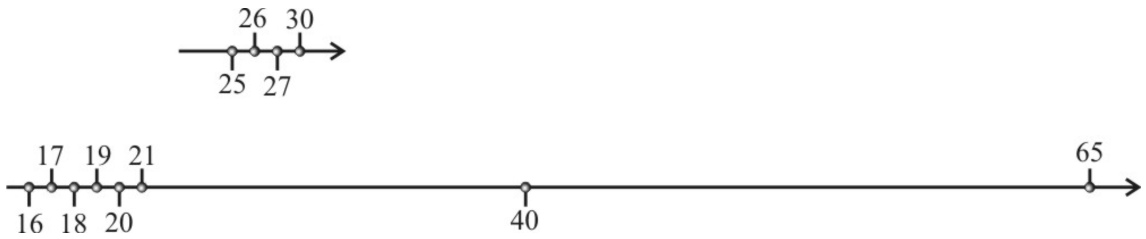
Tabela 23 – Idade dos funcionários em duas empresas.

	Idade dos funcionários								Total de funcionários
Empresa 1	25	26	27	30					4
Empresa 2	16	19	40	17	65	18	20	21	8

Fonte: Dados criados pelo autor da tese para o exemplo dado.

No diagrama da figura 21, podemos observar que na empresa 2 a dispersão é muito maior do que na empresa 1.

Figura 21 – Diagrama comparativo da empresa 1 com a 2.



Fonte: figura criada pelo autor da tese.

Dessa forma, além das medidas de tendência central, é necessário calcular a dispersão. As medidas de dispersão entram no programa do ensino médio tanto no Brasil como na França e fazem parte da nossa pesquisa. Trataremos nesta seção:

- Amplitude
- Desvio
- Soma dos desvios em módulo
- Desvio médio e/ou desvio médio absoluto ou primeiro momento
- Segundo momento ou momento de segunda ordem
- Variância
- Desvio quadrático médio
- Desvio padrão
- Intervalo interquartil
- Coeficiente de variação

2.4.1. AMPLITUDE

Segundo Kendall e Yule (1948) a amplitude é a mais simples medida de dispersão e corresponde à diferença entre o maior e menor valor de um conjunto de dados. Neste mesmo sentido podemos observar em Mann (2006). Já em Spiegel (1993) temos o termo amplitude total com o mesmo sentido de amplitude. Talvez como forma de diferenciar outros tipos de amplitude como amplitude do intervalo de classe (SPIEGEL, 1993). Em francês temos "étendue" ou "empan" (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p. 104; DODGE, 2007a, p.170) para designar amplitude. Já o termo em francês "amplitude d'une classe" (amplitude de uma classe) ou “intervalle d’une variable continu” (intervalo de uma variável contínua) (RÉGNIER, 2007, tradução nossa) é usado no sentido de amplitude de um intervalo de classe. Na tabela 23 (apresentada na seção anterior), para a empresa 1 a amplitude é 5 (30-25) e para a empresa 2 ela é 49 (65-16). Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) apresentam uma fórmula para o cálculo:

$$\boldsymbol{E = x_{(n)} - x_{(1)}} \qquad (56)$$

Fórmula 56. Amplitude onde E = Étendue (francês) = amplitude, $x_{(n)}$ corresponde ao maior valor observado ou ainda valor n considerando os valores ordenados de 1 a n, $x_{(1)}$ menor valor observado (primeiro valor ordenado do menor para o maior).

Estes autores definem a amplitude (étendue ou empan) como “sendo igual a diferença entre o maior valor e o menor valor observado” (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE 2008, p.104, tradução nossa).

Dodge (2007a) apresenta duas fórmulas para a amplitude. A primeira para uma variável quantitativa X:

$$\boldsymbol{empan = X_{max} - x_{\min.}} \qquad (57)$$

Fórmula 57. Amplitude segundo Dodge (2007a, p.170)

Fórmula da amplitude para observações agrupadas, considerando a amplitude como a diferença do centro de duas classes extremas: δ_1 (centro da primeira classe) e δ_k (centro da última classe):

$$\boldsymbol{empan = \delta_k - \delta_1.} \qquad (58)$$

Fórmula 58. Amplitude para distribuições agrupadas segundo Dodge (2007a, p.170)

Em Régnier (2007, p. 7, tradução nossa) temos outra forma de apresentar a amplitude (Étendue) como sendo “o intervalo entre a borda inferior de posição 1 tomada por X e a borda superior da posição p assumida por X isto é $[x_1;\ x_p]$. Dessa forma, temos como amplitude da empresa 1 (tabela 23) o intervalo $[x_1;\ x_4]$, ou seja, o intervalo que vai da posição 1 (25) à posição 4 (30). Com base na definição de Régnier, apresentamos a fórmula 59 que indica a medida da amplitude (ou do intervalo entre o menor valor e o maior valor de uma série).

$$[x_1;\, x_p] = x_p - x_1 \qquad (59)$$

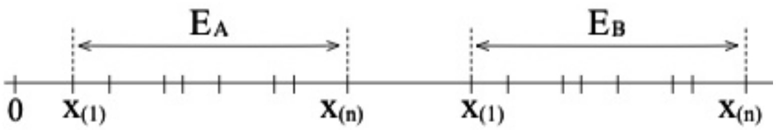
Fórmula 59. Medida da amplitude

Ao usar os termos em francês empan ou E na fórmula da amplitude, temos um limitante da língua. Assim a fórmula 59, não apresenta este inconveniente em relação às formulas 57 e 58, pois se limita a uma representação matemática.

Um conceito fundamental da estatística é a variabilidade. Na tabela 23 pode-se observar que na empresa 2 temos uma maior variabilidade do que na empresa 1. Na empresa 2 temos uma amplitude de 49 tendo uma grande variação na idade dos funcionários. Na empresa 1, pelo contrário, temos uma pequena variabilidade na idade dos funcionários com uma amplitude de 5. Destacamos, contudo, para esta grande diferença que tivemos a influência de dois funcionários com idades de 40 e 65 anos.

Apesar da medida da amplitude oferecer uma ideia da diferença entre os valores máximos e mínimos, ela não indica os valores máximos e mínimos e nem a forma como os dados estão distribuídos entre estes valores. No primeiro caso, tomemos duas empresas com a diferença de idade entre os funcionários de 15 anos. Na empresa A temos como idade mínima dos funcionários 18 anos e a máxima 33 anos. Na empresa B, temos como idade mínima 35 anos e a máxima 50 anos. Assim temos duas empresas que apesar de a idade dos funcionários terem a mesma amplitude, temos características diferentes em relação à idade dos funcionários. Na figura 22, apresentamos outra forma de ilustrar esta característica. Marcamos em uma reta como origem no 0 as medidas de duas sérias (A e B) de mesma amplitude, mesma distribuição dos dados e valores máximos e mínimos das variáveis diferentes.

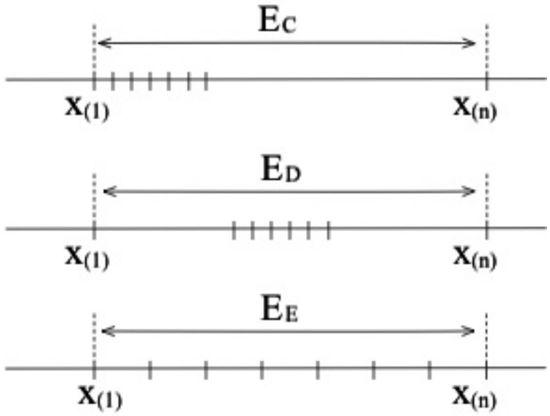
Figura 22 – Duas séries de mesma amplitude: A e B



Fonte: figura criada pelo autor da tese.

A segunda característica, a forma como os dados estão distribuídos entre estes valores é colocada por Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008). A figura 23 (baseada em uma figura apresentada por estes autores) exemplifica esta propriedade. Temos três conjuntos de observações diferentes com mesmo número de efetivos, mesma amplitude e com dispersões diferentes. No conjunto de observações que chamamos de C, os dados estão concentrados à direita, no D no centro e no E estão distribuídos de maneira uniforme. Contudo, a amplitude pode nos dá informações importantes junto com outras medidas de dispersão. Ela também pode indicar que duas séries analisadas possuem características bem diferentes como é o exemplo das empresas 1 e 2, já apresentados na tabela 23.

Figura 23 – Três conjuntos de observações de mesma amplitude e mesmo número de efetivos, mas com dispersões diferentes.



Fonte: figura criada pelo autor da tese baseada em figura apresentada por Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008).

Estas características levam a duas propriedades da amplitude (que numeramos como 1 e 2). Além destas, apresentamos três outras propriedades (que chamamos de propriedades 3, 4 e 5):

PROPRIEDADE (a) 1. A amplitude não é influenciada por mudanças na distribuição interna dos dados. Alterando os valores internos, sem alterar o mínimo e máximo valor da série, a amplitude não sofre alteração.

PROPRIEDADE (a) 2. A amplitude não indica os valores máximos e mínimos dos intervalos, apenas a diferença entre eles.

PROPRIEDADE (a) 3. A amplitude não é influenciada por mudança na unidade de origem. Esta propriedade será discutida com maior detalhe ao tratarmos da variância.

PROPRIEDADE (a) 4. Ela é influenciada por valores extremos. Como no cálculo da amplitude considera-se o maior valor e o menor valor, ela inclui desta forma os valores extremos.

PROPRIEDADE (a) 5. A amplitude nos dá uma ideia da variabilidade dos dados e serve para comparar a variabilidade de uma variável em duas amostras diferentes.

Para tratar dos desvios, consideramos adequado explicitar o que é desvio.

2.4.2. DESVIO

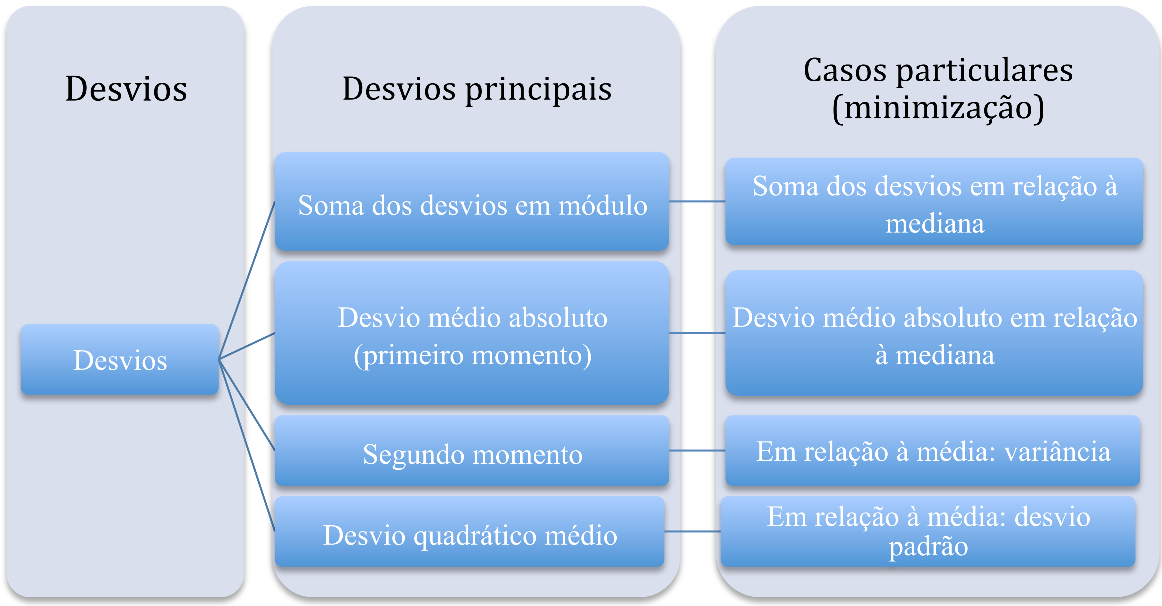
O desvio corresponde à "diferença entre um valor observado e um valor fixo de um conjunto de valores possíveis de uma variável quantitativa. Este valor fixo é frequentemente a média aritmética ou a mediana" (DODGE, 2007b).

Tomemos como exemplo a empresa 1 (tabela 23) Podemos ter:

- Desvio = $(x_1 - 50)$= 25-50 = -25 (desvio da primeira observação em relação a um valor possível da variável quantitativa. Neste exemplo usamos como valor fixo o número 50, o desvio poderia ser em relação a qualquer número).
- Desvio= $(x_2 - \bar{x})$= 26-27= -1 (desvio da segunda observação em relação à média).
- Desvio= $(x_2 - M_d) = 26 - 26{,}5 = -0{,}5$ (desvio da segunda observação em relação à mediana).

Na apresentação dos desvios que seguem, procuramos agrupar os desvios em desvios principais e alguns casos particulares destes desvios em função da sua importância matemática que são apresentados em muitos livros didáticos e têm uso frequente pelos que usam a estatística como medida de dispersão, conforme ilustrado na figura 24.

Figura 24 – Desvios principais e casos especiais.



Fonte: figura criada pelo autor da tese.

2.4.3. SOMA DOS DESVIOS EM MÓDULO

Podemos somar todos os desvios em relação à média. Contudo quando isto acontece, o resultado da soma é nulo, por isso é conveniente calcular a soma dos desvios em módulo ou valores absolutos resolvendo este problema (KENDALL; YULE, 1948). A soma dos desvios em módulo é calculado não apenas para evitar que seu valor seja nulo, no caso da média aritmética, mas sobretudo, por que ele tem uma importante propriedade matemática. Podemos calcular o módulo dos desvios em relação a qualquer número, como explicitamos ao tratar dos desvios, contudo ele é mínimo quando os desvios são tomados em relação a mediana. Esta propriedade foi tratada de forma detalhada ao abordarmos a mediana.

2.4.4. DESVIO MÉDIO E/OU DESVIO MÉDIO ABSOLUTO OU PRIMEIRO MOMENTO[37]

Podemos determinar a média aritmética da soma dos desvios em valor absoluto que é chamada de desvio médio ou ainda de primeiro momento (KENDALL; YULE, 1948, p. 176). Régnier (2011a) utiliza para designar a mesma coisa o termo desvio médio absoluto (écart absolu moyen) o termo absoluto tem uma justificativa, uma vez que temos a soma dos valores absolutos dos desvios. Régnier (2011a, p.20) apresenta a fórmula para o cálculo do desvio médio absoluto:

$$\bar{E}_c = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{p} n_k |x_k - c| \qquad (60)$$

Fórmula 60: Desvio médio absoluto (RÉGNIER, 2012, p.20).

Considerando $\boldsymbol{\bar{E}_c}$ como sendo o desvio médio absoluto (fórmula 60) de um conjunto de observações com N elementos numerados de 1 a **p**, considerando k formado pelos valores das variáveis entre 1 e **p** e c um valor qualquer. Régnier (2011a) esclarece que o valor de $\boldsymbol{E_c}$ é mínimo quando **c** é igual à mediana ou pertencente ao intervalo mediano. Podemos também ver esta propriedade definida por Kendall e Yule (1948). Ao tratarmos da mediana, apresentamos como uma das propriedades desta a minimização dos desvios de uma série. Se c é mínimo para a mediana quando temos a soma dos desvios em valor absoluto, c também vai ser mínimo para a mediana quando tivermos a média da soma dos desvios absolutos, uma vez que se dividirmos por N a fórmula da soma dos desvios em valor absoluto (fórmula 60) esta propriedade não se altera:

$$Se \sum_{k=1}^{p} n_k |x_k - c| \text{ é } mínimo\ para\ c = M_d \Rightarrow \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{p} n_k |x_k - c| \text{ é } mínimo\ para\ c = M_d$$

[37] Kendall e Stuart (1977, p. 44, tradução nossa) esclarecem que o termo momento vem da estática e é muito antigo, ele aparece nos trabalhos de “A. Quetelet (1796-1874) e tem sido frequentemente utilizado desde a adoção por K. Pearson”.

2.4.5. SEGUNDO MOMENTO OU MOMENTO DE SEGUNDA ORDEM

Kendall e Yule (1948) esclarecem que quando elevamos ao quadrado a média dos desvios, temos o segundo momento ou momento de segunda ordem (s^2), cuja fórmula é:

$s^2 = \frac{1}{N}\sum(\xi^2)$ onde $\xi = X - A$ (os desvios em relação a um valor A qualquer). (61)

Fórmula 61: Segundo momento ou momento de segunda ordem 2 (KENDALL; YULE, 1948).

Outra forma de calcular o momento centrado de ordem 2 é apresentado por Régnier (2011a) na fórmula abaixo:

O momento centrado de ordem 2 : $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=p} n_k(x_k - c)^2$ (62)

Fórmula 62: Momento centrado de ordem 2 (RÉGNIER, 2012, p.20, tradução nossa).

Esta fórmula também pode ser apresentada como indicada por Dehon, Droesbeke, Vermandele (2008):

$$\boldsymbol{s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)^2} \quad (63)$$

Fórmula 63: Cálculo do momento de segunda ordem (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p. 114).

De todos os valores possíveis para c, o valor mínimo para a fórmula do momento centrado de ordem 2 é definido quando c é igual à média aritmética. Neste caso temos a variância. Esta propriedade da variância é destacada por Régnier (2012) como uma propriedade fundamental. Esta propriedade pode ser facilmente demonstrada:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x} + \bar{x} - c)^2 =$$

Nota: ao somarmos e subtrairmos a média na expressão acima, o valor não se altera.

Em seguida:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - c)]^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(x_i - \bar{x})^2 + 2(\bar{x} - c)(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - c)^2] =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(x_i - \bar{x})^2 + (\bar{x} - c)^2 + 2(\bar{x} - c)(x_i - \bar{x})] =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(x_i-\bar{x})^2+(\bar{x}-c)^2]+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2(\bar{x}-c)\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=$$

Como a soma dos desvios em relação à média é nula, a última expressão é igual a 0. Logo temos que:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(x_i-\bar{x})^2+(\bar{x}-c)^2]$$

O segundo membro da expressão possui dois termos, sendo o primeiro a variância e é independente do valor c. O segundo termo está elevado ao quadrado. Logo ele só pode ser igual a zero ou ser um número positivo. Dessa forma, o menor valor dele é zero. Quando c é igual à média, o segundo termo é igual a zero. Assim, podemos afirmar que o menor valor para o momento de segunda ordem é quando os desvios são tomados em relação à média e neste caso temos a variância[38].

2.4.6. VARIÂNCIA[39]

Quando os desvios do momento de segunda ordem são tomados em relação à média, temos como resultado a variância que minimiza as flutuações (RÉGNIER, 2000a). Com base nessas características, apresentamos duas fórmulas para variância. A primeira é quando se trata da variância para a população de efetivos N. A segunda para a variância de uma amostra de efetivos n para indicar que se trata da amostra de Régnier (2007) em que o mesmo utiliza a abreviação de amostra em francês (enc = échantillon).

$$\boldsymbol{\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=p}n_k(x_k-\mu)^2=\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=p}n_kx_k^2\right)-\mu^2} \tag{64}$$

Fórmula 64: Variância sobre a população (RÉGNIER, 2007, p. 12)

[38] Demonstração adaptada da encontrada em Dehon, Droesbeke, Vermandele (2008, p. 114).
[39] Segundo Kendall e Stuart (1977, p. 44) o termo variância não foi usado antes de 1918, quando R. A. Fischer define a mesma em um artigo sobre genética. Esta afirmação é encontrada também em Dodge (2007a) em que o mesmo afirma que a variância como nós entendemos hoje em dia foi desenvolvida por Ronald Aylmer Fischer.

$$\sigma_{ech}^2 = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\sum_{\boldsymbol{k}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{p}} \boldsymbol{n_k}(\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{m})^{\mathbf{2}} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\sum_{\boldsymbol{k}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{p}} \boldsymbol{n_k x_k^2}\right) - \boldsymbol{m}^{\mathbf{2}} \quad (65)$$

Fórmula 65: Variância sobre a amostra (RÉGNIER, 2007, p. 12)

Podemos no lugar do efetivo de cada observação ter a frequência. Considerando a fórmula 1 para o cálculo da frequência que reproduzimos abaixo:

$$f_k = \frac{n_k}{efetivo\ total}$$

Podemos assim calcular a variância considerando as observações e as respectivas frequências. Isto pode ser feito tanto para amostra como para a população. Dessa forma, adaptando as duas fórmulas precedentes à fórmula da frequência, propomos a fórmula 66 e 67 para o cálculo da variância para população e amostra.

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{2}} = \sum_{\boldsymbol{k}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{p}} \boldsymbol{f_k}(\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{\mu})^{\mathbf{2}} = \left(\sum_{\boldsymbol{k}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{p}} \boldsymbol{f_k x_k^2}\right) - \boldsymbol{\mu}^2 \quad (66)$$

Fórmula 66: Variância sobre a população (adaptado de RÉGNIER, 2007, p. 12)

$$\sigma_{ech}^2 = \sum_{\boldsymbol{k}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{p}} \boldsymbol{f_k}(\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{m})^{\mathbf{2}} = \left(\sum_{\boldsymbol{k}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{p}} \boldsymbol{f_k x_k^2}\right) - \boldsymbol{m}^{\mathbf{2}} \quad (67)$$

Fórmula 67: Variância sobre a amostra (adaptado de RÉGNIER, 2007, p. 12)

Outra forma de calcular a variância, quando não se tem um número de efetivos por observação, é pela fórmula apresentada por Dehon, Droesbeke, Vermandele (2008). Eles utilizam o mesmo símbolo (s^2) utilizado por Kendall e Yule (1948) e por outros autores para o momento de segunda ordem na fórmula da variância, ou seja, significados diferentes para o mesmo significante, o que não deveria acontecer:

$$\boldsymbol{s}^{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} (\boldsymbol{x_i} - \overline{\boldsymbol{x}})^{\mathbf{2}} \quad (68)$$

Fórmula 68: Cálculo da variância (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008).

Podemos também, tomando como referência a fórmula 68, calcular a média em separado. Logo, obtemos a fórmula 69.

$$\boldsymbol{s^2} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} x_i^2\right) - \bar{x}^2 \tag{69}$$

Fórmula 69- Cálculo da variância.

Para o cálculo da variância de uma variável contínua, temos a fórmula abaixo para população (Régnier, 2007, p. 13).

$$\boldsymbol{\sigma^2} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{k=p}} \boldsymbol{n_k(c_k-\mu)^2} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{k=p}} \boldsymbol{n_k c_k^2}\right) - \boldsymbol{\mu^2} \tag{70}$$

Fórmula 70: Variância para população (RÉGNIER, 2007, p. 13), substituímos na fórmula V(x) por $\boldsymbol{\sigma^2}$.

Para o cálculo da variância de uma variável contínua, temos a fórmula abaixo para amostra (Régnier, 2007, p. 13).

$$\sigma_{ech}^2 = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{k=p}} \boldsymbol{n_k(c_k-m)^2} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{k=p}} \boldsymbol{n_k c_k^2}\right) - \boldsymbol{m^2} \tag{71}$$

Fórmula 71: Variância para amostra (RÉGNIER, 2007, p. 13), substituímos na fórmula V(x) por $\boldsymbol{\sigma^2}$.

Apresentamos a seguir algumas propriedades da variância.

PROPRIEDADE (var) 1. Tomando a fórmula do momento de segunda ordem, o desvio é mínimo, quando ele é tido em relação à média. Nesse caso temos a variância.

Esta propriedade é destacada por Régnier (2011a) como fundamental e foi demonstrada ao tratarmos do momento de segunda ordem.

PROPRIEDADE (var) 2. A variância não é influenciada pela mudança na unidade de origem (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008).

Nas tabelas 24 e 25 temos os salários das empresas D e E. O número de funcionários das duas empresas é o mesmo e os salários dos funcionários da empresa E foram obtidos acrescentando R$ 2.000,00 a cada salário da D. Ao comparar as duas tabelas, pode-se observar que a amplitude, a variância e o desvio padrão não se alteraram. A média e o coeficiente de variação mudaram. Pela propriedade da linearidade da média, já apresentada ao tratarmos da média, a diferença entre a primeira média e a segunda é igual ao que foi acrescentado, ou seja: $m_D + R\$\ 2.000{,}00 = m_E$.

Tabela 24 – Salários dos funcionários de uma empresa D.

Salário (em reais)[40] x_k	Efetivos n_k	Salário por classe $x_k n_k$	(reais) $(x_k - m)$	(reais^2) $n_k(x_k - m)^2$
700,00	9	6.300	-352,63	1.119.141,27
1000,00	4	4.000	-52,63	11.080,33[41]
1200,00	3	3.600	147,37	65.152, 35
1800,00	2	3.600	747,37	1.117.119,11
2.500,00	1	2.500	1447,37	2.094.875,35
Total	19	20.000		4.407.368,42

Amplitude = R$ 1.800,00; Média (m)= R$ 20.000/19 = R$1.052,63;

Variância ($\sigma^2 = \frac{4.407.368{,}42\ reais^2}{19} = 231.966{,}76\ reais^2$;

Desvio padrão (σ) = R$ 481,63; Amplitude = R$ 1800,00; Coeficiente de variação = 0,46

Fonte: tabela criada pelo autor da tese.

[40] Moeda atualmente em vigor no Brasil.
[41] No cálculo destes valores não foi feito um arredondamento, assim o valor usado no cálculo não foi -52,63 e sim 1000 – (20000/19) = - 52,63157895…

Tabela 25 – Salários dos funcionários de uma empresa E.

Salário (em reais)[42] x_k	Efetivos n_k	Salário por classe $x_j n_k$	(reais) $(x_k - m)$	$(reais^2)$ $n_k(x_k - m)^2$
2.700,00	9	24.300,00	-352,63	1.119.141,27
3.000,00	4	12.000,00	-52,63	11.080,33
3.200,00	3	9.600,00	147,37	65.152,35
3.800,00	2	7.600,00	747,37	1.117.119,11
4.500,00	1	4.500,00	1447,37	2.094.875,35
Total	19	58.000,00		4.407.368,42

Amplitude = R$ 1.800,00; Média (m) = R$ 58.000/19 = R$3.052,63;

Variância $(\sigma^2) = \frac{4.407.368{,}42\ reais^2}{19} = 231.966{,}76\ reais^2$;

Desvio padrão (σ) = R$ 481,63; Coeficiente de variação = 0,16

Fonte: tabela criada pelo autor da tese.

Esta propriedade pode ser útil para simplificar os cálculos da variância conforme apresentados por Dehon, Droesbeke, Vermandele (2008). Tomemos um exemplo apresentado por estes autores. Para o cálculo da série $\{x_i\}$={13.291; 13.296; 13.303; 13.292; 13.314; 13.307}, se subtrairmos 13.300 de todos os valores, teremos como resultado a nova série $\{u_i\} = \{-9;\ -4; 3;\ -8; 14; 7\}$. Na tabela 26, exemplificamos este procedimento.

[42] Moeda atualmente em vigor no Brasil.

Tabela 26 – Simplificando o cálculo da variância.

Medidas iniciais				$x_k - 13.300 = u_k$			
x_k	n_k	$(x_k - m)$	$(x_k - m)^2$	u_k	n_k	$(u_k - m)$	$(u_k - m)^2$
13291,00	1	-9,50	90,25	-9,00	1	-9,50	90,25
13292,00	1	-8,50	72,25	-8,00	1	-8,50	72,25
13296,00	1	-4,50	20,25	-4,00	1	-4,50	20,25
13303,00	1	2,50	6,25	3,00	1	2,50	6,25
13307,00	1	6,50	42,25	7,00	1	6,50	42,25
13314,00	1	13,50	182,25	14,00	1	13,50	182,25
79803,00	6		413,50	3,00	1		413,50
Amplitude = 23; média (m) = 13.300,50 Variância $(\sigma^2) = \frac{413,50}{6} = 59,07$ Desvio padrão $(\sigma) = 7,69$ CV = $\frac{\sigma}{m}$ = 0,00058				Amplitude = 23; média (m) = 0,50 Variância $(\sigma^2) = \frac{413,50}{6} = 59,07$ Desvio padrão $(\sigma) = 7,69$ CV = $\frac{\sigma}{m}$ = 15,37159[43]			

Fonte: tabela criada pelo autor da tese.

PROPRIEDADE (var) 3**.** A variância não é influenciada pela soma e subtração

A variância não sofre alteração, tanto para a soma como para a subtração, desde que seja somado ou subtraído o mesmo valor a cada observação. Como a operação é a mesma para todos os elementos do conjunto, o que temos é um deslocamento da posição do conjunto (CARVALHO, 2006).

PROPRIEDADE (var) 4**.** A variância é influenciada pela multiplicação e divisão

Na variância como os valores são elevados ao quadrado, se multiplicarmos ou dividirmos por um valor constante todas as observações, a variância será multiplicada ou dividida por este valor constante ao quadrado (CARVALHO, 2006). Ao tratarmos da média aritmética, apresentamos e demonstramos a propriedade 10 que trata da linearidade da média, ou seja, se somarmos, subtrairmos, multiplicarmos ou dividirmos as observações por um valor, o mesmo ocorrerá com a média. Tomemos a fórmula 64 da variância para população:

[43] Para poder comparar os coeficientes de variação utilizamos cinco casas decimais.

$$\sigma^2 = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{k=1}^{k=p} n_k(x_k - \mu)^2$$

Ao multiplicarmos todas as observações por um valor $\boldsymbol{a}$, teremos o valor da média também multiplicado por $\boldsymbol{a}$, o que leva ao valor da variância ser mulplicado por a^2:

$$\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{k=1}^{k=p} n_k(ax_k - \mathrm{a}\mu)^2 = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{k=1}^{k=p} n_k[\mathrm{a}^2(x_k - \mu)^2] = a^2\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=p} n_k(x_k - \mu)^2\right]$$

PROPRIEDADE (var) 5. A variância é influenciada por valores extremos.

Tal como a média, a variância é influenciada por valores extremos. Na tabela 26, temos uma comparação da idade dos funcionários de duas empresas. Na empresa 2 temos uma grande dispersão e pode-se observar isto na mudança do valor da variância que passa de 3,5 anos^2 para 258 anos^2.

PROPRIEDADE (var) 6**.** A variância jamais poderá ter valores negativos (MANN, 2006).

Trata-se de uma propriedade matemática simples e óbvia, uma vez que elevada ao quadrado, ela não poderá ter valores negativos.

OBSERVAÇÃO (var) 1. O seu valor pode ser igual à zero (MANN, 2006)

Quando não existe variação, a variância e o desvio padrão são iguais à zero. Isso pode ocorrer em uma das variáveis da pesquisa. Por exemplo, em uma pesquisa que se procura analisar o desempenho dos alunos de uma determinada classe em matemática, poderíamos ter todos os alunos com a mesma idade, neste caso não teríamos variação na idade, embora pudéssemos observar variação em outros elementos como na nota dos alunos.

OBSERVAÇÃO (var) 2**.** As unidades de medida da variância são sempre elevadas ao quadrado, embora em alguns casos não faça muito sentido. Por exemplo: a folha de pagamento de uma amostra de cinco empresas é de 230 milhões de reais ao quadrado (reais ao quadrado). O que é real ao quadrado? Ou euro ao quadrado? É preciso esclarecer este contexto aos alunos.

2.4.7. DESVIO QUADRÁTICO MÉDIO

O desvio quadrático médio corresponde à raiz quadrada do momento de segunda ordem, ou seja, corresponde a **s** na fórmula 54, ou seja,:

$s^2 = \frac{1}{N}\sum(\xi^2)$ onde $\xi = X - A$ (os desvios em relação a um valor A qualquer). (72)

Logo: $s = \sqrt[2]{\frac{1}{N}\sum(\xi^2)}$

Fórmula 72: Desvio quadrático médio adaptado de Kendall e Yule (1948).

Quando os desvios são medidos a partir da média, o desvio quadrático médio é mínimo. Nesse caso ele recebe o nome de desvio padrão. Assim podemos dizer que "o desvio padrão é o desvio quadrático médio de valor mínimo" (KENDALL; YULE, 1948, p. 167).

2.4.8. DESVIO PADRÃO[44]

Segundo Mann (2006) "o desvio padrão é a medida de dispersão mais utilizada". Este autor, contudo, não descreve a razão dela ser mais usada. Como tratamos anteriormente, o desvio é mínimo quando os desvios são tomados em relação à média e nesse caso temos o desvio padrão. O desvio padrão é a medida de dispersão que faz relação junto com a variância e com a média aritmética, utilizando-se desta ou destas nos cálculos e possuindo algumas propriedades comuns. Tal como a média, Kendall e Yule (1948) destacam que o desvio padrão é a medida de dispersão que é mais fácil tratar por métodos algébricos, sendo por isso "analogia com a média aritmética entre as medidas de locação" (p. 173).

Quanto maior o valor do desvio padrão maior a sua dispersão. Para calcular o desvio padrão é necessário calcular a raiz quadrada positiva da variância (KENDALL; STUART, 1977). Existem outros termos menos usados no lugar de desvio padrão (standard deviation em inglês ou écart-type em francês) que têm o mesmo significado, assim temos: "erro médio" (Gauss), "erro quadrático médio" (mean square error) e "erro da média quadrática" (error of mean square) (KENDALL; YULE,1948). Estes autores acrescentam que não se deve confundir o desvio padrão com o "erro padrão" que seria o "desvio padrão das distribuições

[44] Segundo Kendall e Stuart (1977, p.44, tradução nossa) foi K. Pearson "que usou pela primeira vez o termo 'desvio padrão' nos anos de 1890".

decorrentes de amostragens simples" (p.176). Observamos em Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) a fórmula para o cálculo do desvio padrão:

$$\mathbf{s} = \sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x_i} - \overline{\boldsymbol{x}})^{\mathbf{2}}} \tag{73}$$

Fórmula 73: Cálculo do desvio padrão (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008).

Podemos também, tomando como referência a fórmula 73, calcular a média em separado. Logo obtemos assim a fórmula 74.

$$\mathbf{s} = \sqrt{\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x_i^2}\right) - \overline{\boldsymbol{x}}^{\mathbf{2}}} \tag{74}$$

Fórmula 74 - Cálculo do desvio padrão (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008).

Contudo, esta fórmula não leva em conta os efetivos de cada observação e diferença de representação do cálculo para população e amostra, como podemos observar em Régnier (2007):

$$\sigma = \sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\sum_{\boldsymbol{k}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{p}}\boldsymbol{n_k}(\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{\mu})^{\mathbf{2}}} = \sqrt{\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\sum_{\boldsymbol{k}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{p}}\boldsymbol{n_k}\boldsymbol{x_k^2}\right) - \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{2}}} \tag{75}$$

Fórmula 75: Desvio padrão sobre a população[45] (RÉGNIER, 2007, p. 5; p.12)

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\sum_{\boldsymbol{k}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{p}}\boldsymbol{n_k}(\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{m})^{\mathbf{2}}} = \sqrt{\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\sum_{\boldsymbol{k}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{p}}\boldsymbol{n_k}\boldsymbol{x_k^2}\right) - \boldsymbol{m}^{\mathbf{2}}} \tag{76}$$

Fórmula 76: Desvio padrão sobre a amostra (RÉGNIER, 2007, p. 5; p.12)

Considerando a definição de frequência de Régnier (2007), apresentamos a fórmula do desvio padrão considerando as observações e a frequência.

[45] A segunda fórmula à direita foi adaptada da fórmula de variância em Régnier (2007, p.12)

$$\sigma = \sqrt{\sum_{k=1}^{k=p} \boldsymbol{f_k(x_k - \mu)^2}} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{k=p} \boldsymbol{f_k x_k^2}\right) - \boldsymbol{\mu^2}} \tag{77}$$

Fórmula 77: Desvio padrão sobre a população[46] (adaptado de RÉGNIER, 2007, p. 5; p.12)

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sum_{k=1}^{k=p} \boldsymbol{f_k(x_k - m)^2}} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{k=p} \boldsymbol{f_k x_k^2}\right) - \boldsymbol{m^2}} \tag{78}$$

Fórmula 78: Desvio padrão sobre a amostra (adaptado de RÉGNIER, 2007, p. 5; p.12)

Tomando por base Régnier (2007), apresentamos a fórmula do desvio da variável quantitativa contínua:

$$\sigma = \sqrt{\boldsymbol{\frac{1}{N}}\sum_{k=1}^{k=p} \boldsymbol{n_k(c_k - \mu)^2}} = \sqrt{\left(\boldsymbol{\frac{1}{N}}\sum_{k=1}^{k=p} \boldsymbol{n_k c_k^2}\right) - \boldsymbol{\mu^2}} \tag{79}$$

Fórmula 79: Desvio padrão sobre a população[47] (RÉGNIER, 2007, p. 5; p.12)

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\boldsymbol{\frac{1}{n}}\sum_{k=1}^{k=p} \boldsymbol{n_k(c_k - m)^2}} = \sqrt{\left(\boldsymbol{\frac{1}{n}}\sum_{k=1}^{k=p} \boldsymbol{n_k c_k^2}\right) - \boldsymbol{m^2}} \tag{80}$$

Fórmula 80: Desvio padrão sobre a amostra (RÉGNIER, 2007, p. 5; p.12)

2.4.8.1. O DESVIO PADRÃO E A DISPERSÃO

Para efeito de comparação em uma distribuição simétrica ou moderadamente simétrica, uma amplitude igual a seis vezes o desvio padrão, em geral, envolve 99% de todas as observações. Esta relação não é, contudo, adequada para um pequeno número de observações (KENDALL; YULE, 1948). Na tabela 27, apresentamos dois exemplos com um

[46] A segunda fórmula à direita foi adaptada da fórmula de variância em Régnier (2007, p.12)
[47] A segunda fórmula à direita foi adaptada da fórmula de variância em Régnier (2007, p.12)

pequeno número de observações. Nesta tabela comparamos duas empresas, empresa 1 e empresa 2. Na empresa 1, com apenas 4 observações e com pequena dispersão, com dois desvios padrões, temos 75% dos dados e com 4 desvios padrões, temos 100,0 % das observações. Na empresa 2, com apenas 8 observações e com valores extremos, com dois desvios padrões (1 acima e 1 abaixo da média) temos 87,5 % das observações. Na empresa 2, com 6 desvios padrões (3 acima e 3 abaixo da média) temos 100% das observações. A figura 25 ilustra as diferenças entre as empresas 1 e 2.

Tabela 27 – Média e medidas de dispersão.

Empresa 1						**Empresa 2**					
n_k	x (idade)	$\bar{x}$ (Média)	$x-\bar{x}$ (Desvio)	σ^2 (Variância)[48]		**N**	x (idade)	$\bar{x}$ (Média)	$x-\bar{x}$ (Desvio)	σ^2 (Variância)	
1	25	27	-2	$(-2)^2$	4	1	16	27	-11	$(-11)^2$	121
1	26	27	-1	$(-1)^2$	1	1	19	27	-8	$(-8)^2$	64
1	27	27	0	$(0)^2$	0	1	40	27	13	$(13)^2$	169
1	30	27	3	$(3)^2$	9	1	17	27	-10	$(-10)^2$	100
						1	65	27	38	$(38)^2$	1444
						1	18	27	-9	$(-9)^2$	81
						1	20	27	-7	$(-7)^2$	49
						1	21	27	-6	$(-6)^2$	36
4	108		0	14/4=3,5		8	216		0	2064/8=258	

Empresa 1

Média aritmética: $\bar{x}$ = 108/4=27 anos

Desvio padrão: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{3{,}5} = 1{,}87$ anos

Coeficiente de variação: CV

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\% = \frac{1{,}87}{27} = 6{,}93\%$$

Empresa 2

Média aritmética: $\bar{x}$ = 216/8=27 anos

Desvio padrão: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{258} = 16{,}06$ anos[49]

Coeficiente de variação: CV

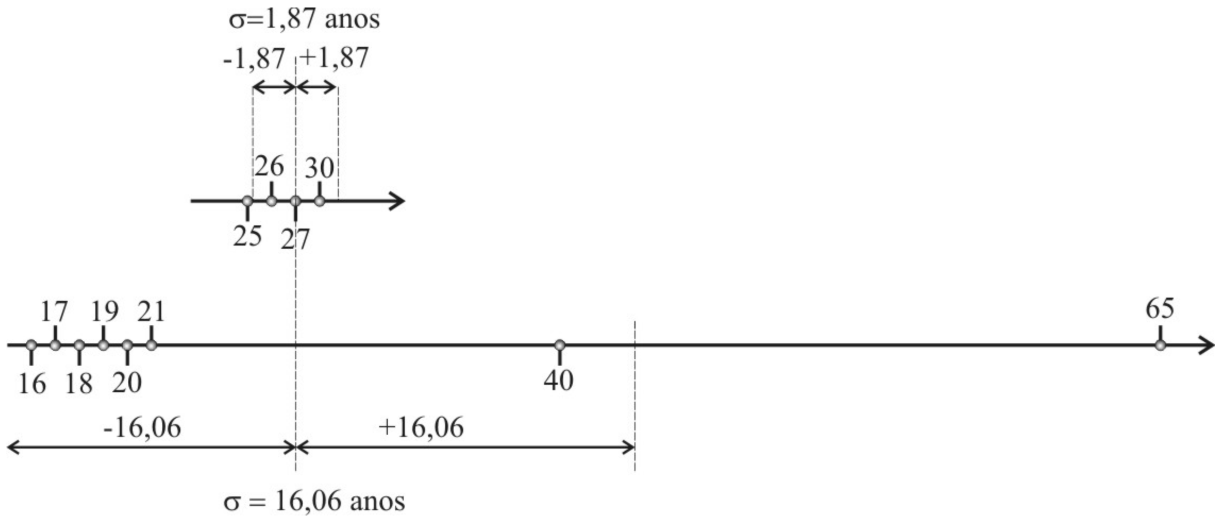
$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\% = \frac{16{,}06}{27} = 59{,}48\%$$

Fonte: tabela criada pelo autor da tese.

[48] Desvio padrão para população. Quando se trata de amostra temos s^2.

[49] Para amostra, temos uma mudança no valor da variância e consequentemente do desvio padrão. Em muitas planilhas considera-se para o cálculo o desvio padrão para amostra.

Figura 25 – Diagrama comparativo das empresas 1 e 2 utilizando o desvio padrão como elemento de análise.



Fonte: diagrama criado pelo autor da tese.

2.4.8.2. PROPRIEDADES DO DESVIO PADRÃO

Kendall e Yule (1948) apresentam algumas propriedades do desvio padrão que estão presentes na média:

PROPRIEDADE (dp) 1. É rigorosamente definido.

PROPRIEDADE (dp) 2**.** Baseia-se em todas as observações feitas.

PROPRIEDADE (dp) 3. É facilmente calculado.

PROPRIEDADE (dp) 4. Permite um tratamento algébrico e é menos afetada por flutuações da amostra.

Acrescentamos outras propriedades:

PROPRIEDADE (dp) 5. Não é influenciado pela mudança na unidade de origem. Esta propriedade foi apresentada ao tratarmos da variância.

PROPRIEDADE (dp) 6. É influenciado por valores extremos. Tal como a média aritmética, o desvio padrão é afetado por valores extremos.

PROPRIEDADE (dp) 7. O valor do desvio padrão não sofre alteração ao somarmos ou subtrairmos um valor constante a todas as observações.

PROPRIEDADE (dp) 8. Ao multiplicarmos ou dividirmos um valor constante às observações, o valor do desvio padrão também será multiplicado ou dividido por esta constante.

Ao multiplicarmos ou dividirmos um valor constante a todas as observações, o novo valor do desvio padrão será também multiplicado ou dividido por esta constante.

Tomemos a fórmula do desvio padrão para população:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{k=1}^{k=p} n_k(x_k - \mu)^2}$$

Ao multiplicarmos todas as observações por um valor $\boldsymbol{a}$ teremos o valor da média também multiplicado por $\boldsymbol{a}$, o que leva ao valor do desvio padrão ser mulplicado por $\boldsymbol{a}$:

$$\sqrt{\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{k=1}^{k=p} n_k(ax_k - \mathrm{a}\mu)^2} = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{k=1}^{k=p} n_k[\mathrm{a}^2(x_k - \mu)^2]} = \sqrt{a^2\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=p} n_k(x_k - \mu)^2\right]}$$

$$= a\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=p} n_k(x_k - \mu)^2}$$

PROPRIEDADE (dp) 9. Jamais poderá ter valores negativos (MANN, 2006).

Trata-se de uma propriedade matemática simples e de fácil observação.

PROPRIEDADE (dp) 10. Quanto maior o desvio padrão, maior a dispersão em torno da média. O inverso é válido. Quanto menor o desvio padrão, menor a dispersão em torno da média.

PROPRIEDADE (dp) 11.Quanto maior o desvio padrão, a média torna-se menos representativa de uma série.

OBSERVAÇÃO (dp) 1. O seu valor pode ser igual à zero (MANN, 2006)

Quando não existe variação, a variância e o desvio padrão são iguais à zero (já exemplificamos isto ao tratar desta propriedade na variância), embora não faça sentido trabalhar com dados que não possuem variação. Explicamos com mais detalhes esta propriedade quando tratamos da variância.

OBSERVAÇÃO (dp) 2. Caso o valor do desvio padrão seja nulo, não temos variação e todas as observações tem o mesmo valor.

Destacamos assim, que o desvio padrão pode ser nulo. Neste caso, não tem variação, o que não faz muito sentido na estatística.

OBSERVAÇÃO (dp) 3. Caso tenhamos duas séries com exatamente os mesmos valores, teremos a mesma média e o mesmo desvio padrão. Contudo, a recíproca não é válida. Duas séries com a mesma média e o mesmo desvio padrão não possuem obrigatoriamente as mesmas observações (PONCY; GUICHARD;RUSSIER, 2011).

OBSERVAÇÃO (dp) 4. O número de observações maiores em uma série do que em outra não indicam que temos um desvio padrão maior (PONCY; GUICHARD; RUSSIER, 2011).

OBSERVAÇÃO (dp) 5. Ao acrescentarmos um novo valor à série, o desvio padrão se altera. Se este valor for igual à média, teremos um valor do desvio padrão menor do que antes da inserção deste valor e, neste caso, o valor da média não sofre alteração.

OBSERVAÇÃO (dp) 6. Quanto mais próximo as observações de uma série estão da média, menor o desvio padrão. Dessa forma, se quisermos diminuir o valor do desvio padrão, é necessário modificar os valores da série de modo que fiquem mais próximos da média. Alterando um valor mais afastado da média por um mais próximo da média, a medida do desvio padrão diminui.

2.4.9. MEDIDAS ABSOLUTAS DE DISPERSÃO

Kendall e Yule (1948) esclarecem que as medidas de dispersão mais usadas são expressas em unidades da variável, o que torna impossível calcular medidas com unidades diferentes. Uma solução para isso é o emprego de medidas absolutas, ou seja, números abstratos e independentes das unidades originais de medidas. Para fazer a comparação, basta dividir por um componente com as mesmas dimensões. Estes autores apresentam três possibilidades:

$$\frac{Desvio\ médio}{Média\ aritmética} \qquad \frac{Desvio\ médio}{Moda} \qquad \frac{Desvio\ padrão}{Média\ aritmética}$$

Destas três possibilidades, o único que foi generalizado foi o coeficiente de variação que se obtém ao dividir o desvio padrão pela média aritmética.

2.4.10. COEFICIENTE DE VARIAÇÃO

O desvio padrão utiliza a mesma unidade dos dados. Quando se pretende comparar dados com unidades diferentes pode-se utilizar o coeficiente de variação. Novais e Coutinho (2009) destacam que quando o coeficiente de variação está acima de 50% temos uma dispersão muito grande e uma baixa representatividade da média. Quanto menor o coeficiente de variação, mais representativa será a média.

Destacamos que o coeficiente de variação, o desvio padrão e a variância se apoiam no valor da média e são influenciados por valores extremos. Apresentamos abaixo uma fórmula que propomos para coeficiente de variação.

Para população temos:

$$C.V. = \frac{\sigma}{\mu} \tag{81}$$

Fórmula 81: Fórmula para coeficiente de variação (C.V.) proposta com base nos símbolos utilizados por Régnier (2007) para desvio padrão e média.

Para amostra apresentamos:

$$C.V. = \frac{\sigma_{ech}}{m} \tag{82}$$

Fórmula 82: Fórmula para coeficiente de variação (C.V.) proposta com base nos símbolos utilizados por Régnier (2007) para desvio padrão e média.

Na tabela 27 que usamos ao tratar do desvio padrão, tomando como base as empresas 1 e 2, fazemos uma comparação entre as medidas de dispersão das duas empresas. Apesar de elas terem a mesma média aritmética, o desvio padrão e o coeficiente de variação são diferentes, indicando uma maior dispersão para os dados na empresa 2. Segundo Novaes e

Coutinho (2009, p.101) “um coeficiente de variação acima de 50% tem alto grau de dispersão e, portanto baixa representatividade da média na distribuição considerada”. Neste exemplo, a empresa com uma grande dispersão (empresa 2) apresenta um coeficiente de variação de 59,48%. Dessa forma, quanto menor o coeficiente de variação, mais a média será representativa dos dados e maior será sua concentração (idem). O diagrama da figura 25 ilustra bem esta propriedade para as duas empresas. Considerando que se queira comparar os salários da mesma empresa em épocas diferentes e em moedas diferentes para ver a dispersão dos dados. Nas tabelas 28 e 29, temos as empresas F atualmente e nos anos 80. Os salários estão com à moeda da época. Considerando que o número de funcionários não mudou, mas que os salários sofreram mudanças ao longo do tempo, será que a diferença entre as faixas salariais mudaram ou não? Existe uma maior dispersão entre as diferenças salariais ou ao contrário?

Tabela 28 – Salários dos funcionários de uma empresa F em 2012

Salário (em reais)[50] x_k	Efetivos n_k	Salário por classe $x_k n_k$	(reais) $(x_k - m)$	$(reais^2)$ $n_k(x_k - m)^2$
700,00	9	6.300,00	-868,42	6.787.396,12
1000,00	4	4.000,00	-568,42	1.292.409,97
2.000,00	3	6.000,00	431,58	558.781,16
4.000,00	2	8.000,00	2.431,58	11.825.152,35
5.500,00	1	5.500,00	3.931,58	15.457.313,02
Total	19	29.800,00		35.921.052,63

Amplitude = R$ 4.800,00; média (m)= R$ 29.800,00/19 = R$ 1.568,42;

Variância $(\sigma^2) = \frac{35.921.052{,}63\ reais^2}{19} = 1.890.581{,}72\ reais^2$;

Desvio padrão (σ) = R$ 1.374,98; Amplitude = R$ 4.800,00; C.V. = 0,88

Fonte: tabela criada pelo autor da tese.

[50] Moeda atualmente em vigor no Brasil.

Tabela 29 – Salários dos funcionários de uma empresa F em 1988[51]

Salário (em cruzeiros)[52] x_k	Efetivos n_k	Salário por classe $x_k n_k$	(reais) $(x_k - m)$	$(reais^2)$ $n_k(x_k - m)^2$
60.000,00	9	540.000,00	-34.736,84	10.859.833.795,01
100.000,00	4	360.000,00	-4.736,84	89.750.692,52
120.000,00	3	360.000,00	25.263,16	1.914.681.440,44
180.000,00	2	320.000,00	65.263,16	8.518.559.556,79
250.000,00	1	220.000,00	125.263,16	15.690.858.725,76
Total	19	1.800.000,00		37.073.684.210,53

Amplitude = R$ 1.800,00; média (m)= R$ 1.800.000/19 = Cz$ 94.736,84;

Variância $(\sigma^2) = \frac{37.073.684.210,53\ cz^2}{19} = 1.951.246.537,40\ cruzeiros^2$;

Desvio padrão (σ) = R$ 44.172,92; Amplitude = Cz$ 160.000,00; C.V. = 0,47

Fonte: tabela criada pelo autor da tese.

Ao comparar as duas tabelas, poderíamos a princípio comparar os desvios padrões observando que o desvio padrão da segunda tabela é bem maior do que na primeira. Contudo, estão em unidades diferentes e em anos diferentes. Não podemos assim utilizar o desvio padrão para comparar. Pelo coeficiente de variação, observamos que atualmente existe uma maior dispersão nos salários do que em 1988. Dessa forma, podemos utilizar o coeficiente de variação para estes casos. Tomando como referência Novaes e Coutinho (2009), podemos afirmar que em 2012 na empresa F temos uma dispersão uma grande dispersão, sendo esta dispersão bem maior do que da empresa em 1988.

2.4.11. INTERVALO INTERQUARTIL (INTERVALLE INTERQUARTILE EM FRANCÊS)

Quando utilizamos a média como medida de tendência central, ao tratar da dispersão, temos a variância e o desvio padrão como medidas de dispersão que utilizam a média para o cálculo. Estas medidas apresentam inúmeras vantagens que apresentamos. Quando temos

[51] Simulamos tendo por base o salário mínimo da época que valia Cz$ 40.225,00. Fonte: http://www.gazetadeitauna.com.br/valores_do_salario_minimo_desde_.htm.

[52] Moeda em vigor no Brasil em 1988. Em 1984 foram abolidos os centavos, assim não existiam centavos nesta moeda.

valores extremos e adotamos como medida de tendência central a mediana, temos como medida de dispersão correspondente o intervalo interquartil.

A mediana, em muitos casos, divide os dados em duas partes com o mesmo número de observações. Podemos dividir os dados em quatro partes (quartil). Assim teremos três medidas o primeiro quartil (Q1), o segundo quartil (Q2) ou mediana e o terceiro quartil (Q3). A mediana pode ser vista como o segundo quartil, pois ela divide os dados em duas partes iguais. No quadro 1, temos uma apresentação de Régnier (2000a) da mediana como segundo quartil. Com base neste quadro, podemos observar de forma simples a posição de Q1, Q2 (mediana) e Q3. Tomemos como exemplo o valor 20 que pode ser representado como sendo 4q (onde q=5). Neste caso, conforme o quadro 1, Q1 é o valor entre a posição q e q+1. Assim o que Q1 ocupa é a posição entre a quinta e a sexta posição. Se a observação na quinta posição for 18 e na sexta posição for o valor de 19, Q1 = 18,5. No caso da mediana, temos o valor entre 2q e 2q+1. Se tivermos o conjunto de observações {2; 5; 7; 8; 9; 11; 15; 20} que pode ser representado com N=4q, onde q=2, a mediana vai ocupar a posição entre a quarta (2q) e quinta posição (2q+1), ou seja, entre 8 e 9. Logo, a mediana é igual a 8,5. Podemos pensar em outros valores que podem se enquadrar em N=4q+1 e N=4q+2. Dessa forma, esta proposição de Régnier se revela bastante prática.

Quadro 1 – Determinação da posição dos quartis segundo Régnier (2000a).

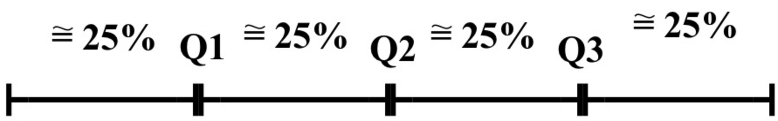
N=	Q1	Q2	Q3
N = 4q	Entre o valor de posição q e o de posição q+1	Entre o valor de posição 2q e o de posição 2q+1	Entre o valor de posição 3q e o de posição 3q+1
N = 4q+1	Entre o valor de posição q e o de posição q+1	O valor de posição 2q+1	Entre o valor de posição 3q+1 e o de posição 3q+2
N = 4q+2	O valor de posição q+1	Entre o valor de posição 2q+1 e o de posição 2q+2	O valor de posição 3q+2
N = 4q+3	O valor de posição q+1	O valor de posição 2q+2	O valor de posição 3q+3

Fonte: Régnier (2000, p. 13, tradução nossa).

Para representar os quartis, Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) utilizam para os símbolos: $x_{1/4}$ (correspondente a Q1, esta forma de representar usa ¼, pois é como tivesse aproximadamente ¼ dos valores ou 25% das observações), $x_{1/2}$ (corresponde a Q2 ou Md –

mediana, ½, pois divide os dados em duas partes iguais) e $x_{3/4}$ (o mesmo que Q3, pois os valores abaixo do mesmo correspondem a aproximadamente ¾ dos dados). Apesar de usar o símbolo ¼, ½ e 3/4, estes não correspondem sempre a uma divisão exata, o que pode induzir a uma concepção errônea dos quartis. Tomemos como exemplo determinar Q1, Q2 e Q3 de uma amostra com 7 observações: 1, 4, 5, 7, 8, 10, 7. Q1 é igual a 4 (posição q+1) e temos abaixo de Q1 uma observação (14,29 % dos dados) e acima 71,42%. Contudo, se tivermos 8 observações, como exemplo: 1, 4, 5, 7, 8, 10, 7, Q1 ocuparia a posição entre q e q1, ou seja, a posição neste exemplo de 2,5. Abaixo de Q1 teríamos duas observações e acima de Q1 6 observações. Neste caso, teríamos abaixo de Q1 ¼ dos valores e acima ¾. Na figura 26, trazemos uma imagem para representar a forma como os dados se distribuem em tornos dos quartis.

Figura 26 – Divisão dos dados em quatro partes.



Fonte: desenho realizado pelo autor da tese.

Destacamos que como já explicitamos ao tratar da mediana, não significa que os dados vão estar divididos exatamente nesta proporção, depende se o número de observação é par ou impar e se os dados estão agrupados ou não. Régnier (2007, p. 8) esclarece que o intervalo interquartil[53] $[Q_1;\ Q_3]$ "representa aproximadamente os 50% das respostas que enquadram a mediana Q_2". Sua amplitude, calculada pela diferença Q3-Q1, medida de dispersão em torno da mediana. Esta diferença é chamada por Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) como sendo o desvio interquartil. Podemos dizer assim que a medida do intervalo interquartil, chamada de desvio interquartil é uma medida de dispersão. Com base nesta informação apresentamos uma propriedade sobre o intervalo interquartil.

PROPRIEDADE [Q1;Q3]1. No intervalo interquartil temos aproximadamente 50% das observações de uma série (RÉGNIER, 2007).

PROPRIEDADE [Q1;Q3] 2. A medida do intervalo interquartil ou desvio interquartil não é influenciado por valores extremos.

[53] No texto original em francês "Intervalle interquartile".

OBSERVAÇÃO [Q1;Q3] 1. A medida do desvio interquartil depende dos valores dos quartis. Desta forma, o valor do desvio interquartil nem sempre é um número inteiro.

OBSERVAÇÃO [Q1;Q3] 2. Ao multiplicarmos os valores de todos os efetivos de uma série por um número natural, diferente de zero, o valor do desvio interquartil não se alterará, uma vez que a posição dos quartis não se alteram. O mesmo não podemos afimar para os valores das observações (PONCY; GUICHARD; RUSSIER, 2011).

Apresentamos baseando-se, nos símbolos utilizados por Régnier (2007), a fórmula para determinar o desvio interquartil:

$$[Q_1;\ Q_3] = Q_3 - Q_1 \tag{83}$$

Fórmula 83: Medida do intervalo interquartil.

2.4.12. AMPLITUDE SEMI-INTERQUARTIL OU DESVIO INTERQUARTIL

Kendall e Yule (1948) apresentam como medida de dispersão a "amplitude semi-interquartil" ou "desvio quartil". Para calcular a amplitude semi-interquartil subtrai-se o terceiro quartil do primeiro e divide-se por dois (fórmula 84).

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} \tag{84}$$

Fórmula 84: amplitude semi-interquartil ou desvio quartil (KENDALL; YULE, 1948).

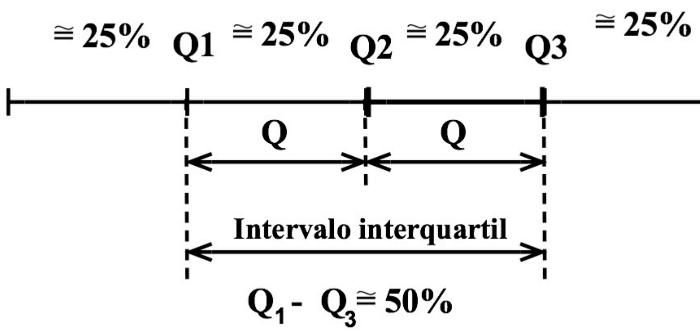
Tomando como referência o símbolo usado por Régnier (2007) para intervalo interquartil, sugerimos outra fórmula que deixa mais claro o significado:

$$\frac{[Q_1; Q_3]}{2} = \frac{Q_3 - Q_1}{2} \tag{85}$$

Fórmula 85: amplitude semi-interquartil ou desvio interquartil.

Considerando um desvio interquartil acima e abaixo da mediana, temos a mesma medida do intervalo interquartil que corresponde a aproximadamente 50% das observações (figura 27).

Figura 27 – Intervalo interquartil e desvio interquartil.



Fonte: desenho realizado pelo autor da tese.

Kendall e Yule (1948) esclarecem que esta medida de dispersão apresenta duas vantagens em relação ao desvio padrão: cálculo simples e significação clara e simples. Acrescentamos uma terceira: não é influenciada por valores extremos. Contudo, ela apresenta inúmeras desvantagens em relação ao desvio padrão. Ela não possui propriedades algébricas simples e possui um comportamento difícil de prever diante de flutuações da amostra. Essas grandes desvantagens, segundo estes autores, fazem com que essas medidas sejam pouco usadas e recomendadas apenas para situações simples.

2.4.13. RELAÇÃO EMPÍRICA ENTRE O INTERVALO INTERQUARTIL E O DESVIO PADRÃO

Kendall e Yule (1948) apresentam uma relação empírica entre a amplitude semi-interquartil e o desvio padrão. Nas distribuições simétricas ou moderadamente assimétricas, a amplitude semi-interquartil é geralmente cerca de dois terços do desvio padrão, que podemos representar por:

$$\frac{Q}{\sigma} \cong 2/3$$

Desta relação, estes autores estabelecem que um intervalo de 6 vezes o desvio padrão, corresponde a 9 vezes o intervalo interquartil e 7,5 vezes o desvio médio e que neste caso se espera encontrar para distribuições simétricas ou moderadamente simétricas, 99% das observações.

2.4.14. CONSIDERAÇÕES SOBRE O SABER CIENTÍFICO

Observamos das diversas bibliografias pesquisadas, diferenças nos símbolos usados. Essas diferenças podem ou não se tornarem um problema nos livros didáticos. Caso cada autor utilize símbolos diferentes, ao consultar livros diferentes, os estudantes podem sentir dificuldades, pois os significados atribuídos aos símbolos mudam. Logo, apresentamos neste capítulo, fórmulas que representam o mesmo algoritmo, mas como símbolos diferentes. O estudante poderia estudar em um livro de uma forma e depois não compreender uma atividade proposta pelo professor que utiliza outros símbolos. Acreditamos que deveria se padronizar os símbolos utilizados. Tomemos como exemplo a fórmula para calcular a mediana no centro do intervalo de uma variável contínua. Apresentamos usando o mesmo algoritmo três fórmulas usando símbolos diferentes (fórmulas 49, 50 e 51).

Na introdução deste capítulo, tratamos do intervalo e mostramos mudanças na representação dos símbolos dos intervalos. Na variação do símbolo de intervalo apresentada, podemos observar a influência da matemática, dos estatísticos e de uma importante instituição estatística brasileira (IBGE) na forma como a determinação do centro do intervalo pode ser transposto para os livros didáticos. Saber operar com intervalo pode ser também um elemento causador de obstáculo, como observa Régnier[54] em um levantamento feito durante vários anos em provas realizadas com alunos do Master 1 na Universidade de Lyon 2 na França. Este pesquisador observou um erro sistemático no cálculo do intervalo [1; 10[.

Em Kendall e Yule (1948) observamos algumas notas sobre mudanças no uso dos símbolos, em função dos instrumentos tecnológicos usados para sua grafia. Assim, estes destacam que alguns autores utilizam para representar o fatorial o símbolo $\underline{\lfloor n}$, contudo este uso vem sendo suplantado pelo símbolo n! Provavelmente pela facilidade de ser datilografado.

Outra convenção é quanto ao uso dos símbolos gregos e latinos. Em nota do tradutor do livro de Kendall e Yule (1948, p. 176), observamos que na tradução se utilizou o símbolo para somatório com letra grega maiúscula Σ no lugar de S (de sum) no original em inglês. Atualmente o uso da letra grega sigma é generalizado. Observamos também outra nota nesse livro sobre o emprego das letras gregas para símbolos de parâmetros dos universos, enquanto para estatística das amostras ou distribuições observadas o uso das letras gregas minúsculas. Assim eles destacam que muitos autores "usam ***s*** como símbolo do desvio padrão de uma

---

[54] Estudo ainda não publicado.

distribuição observada, embora seja talvez ainda o $\boldsymbol{\sigma}$ a notação mais frequente". Tomando como este exemplo, observamos que Régnier (2007) utiliza para média de amostra m e $\bar{x}$, para distribuição da população μ. Kendall e Yule (1948) utilizam M ou $\bar{X}$ para média sem distiguir se é população ou amostra. Spiegel (1993) utiliza também o símbolo $\bar{X}$ para média. Mann (2006), Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) utilizam para média da população μ como Régnier (2007) e para média da amostra $\bar{x}$.

Estas divergências vão além do próprio símbolo, indo também no significado. Assim podemos observar, ao tratarmos do histograma, que o significado de histograma não é o mesmo para os estatísticos.

Trataremos a seguir das pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem das medidas de tendência central e de dispersão.

3. REVISÃO DE LITERATURA DAS PESQUISAS SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM DAS MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL E DE DISPERSÃO

Tomando por base o saber científico, apresentamos neste capítulo algumas pesquisas que tratam sobre o ensino e a aprendizagem das medidas de tendência central e de dispersão.

3.1. PESQUISAS SOBRE AS MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

Apesar de não ser um assunto novo no currículo escolar, o que se observa em diversas pesquisas são problemas no entendimento desse conceito e no seu emprego.

Iniciamos esta apresentação com a pesquisa realizada na tese de doutorado de Cazorla (2002). Esta pesquisadora elabora um pré-teste e um pós-teste e aplica a alunos no início e no final do semestre de disciplinas de estatística oferecidas em diversos cursos superiores de uma universidade estadual do interior da Bahia no segundo semestre de 1999. Foram no total 814 alunos, assim distribuídos nos cursos: 15,8% de biologia, 6,4% de enfermagem, 7,9% de agronomia, 7,0 % de geografia, 6,4 % de veterinária, 23,1% de administração, 25,3% de economia e 6,1% de matemática. Destes, 69,7% no pré-teste, estavam vendo a disciplina estatística pela primeira vez na Universidade. São alunos que finalizaram o ensino médio, ou seja, que já tiveram uma formação na educação básica e estavam estudando na universidade. Alguns destes eram alunos de cursos como Matemática, Administração e Economia que exigem uma carga maior de conhecimento em matemática. Foram aplicados no início do curso de estatística. Uma das questões propostas foi: “o que é a média aritmética?”. Reproduzimos na tabela 30 os resultados desta questão apresentados por Cazorla (2002). O número de participantes no pré-teste e no pós-teste foi diferente. Sendo nos dois casos menor do que o total dos alunos selecionados para a pesquisa. Se somarmos os que não responderam com respostas consideradas como nada a ver, temos 45,1%, ou seja, quase 50% do total. Nas respostas consideradas, temos respostas tais como: meio termo, uma base, é o valor mais frequente (moda e não média aritmética) que consideramos inadequadas. Esses resultados indicam um problema grave com a formação na educação básica destes alunos. Temos também respostas que indicam pouco aprofundamento no conceito de média, como a resposta limitada ao algoritmo, com 41,7% das respostas, o que também indica um problema na formação.

Tabela 30 – Resultado da pesquisa realizada por Cazorla (2002) à questão: "o que é a média aritmética?".

O que é a média aritmética?	Pré-teste		Pós-teste	
	Sujeitos	%	Sujeitos	%
Conceitos ligados à definição de média aritmética				
Algoritmo: a soma dos valores dividido pelo número de observações	316	41,7	201,0	54,9
Ponto médio, mediana, valor central, ponto de concordância, meio termo, é uma medida de tendência central, uma base	66	8,7	34	9,3
É um valor que resume a forma de se chegar a um único resultado a partir de outros	13	1,7	6	1,6
Uma estimativa	6	0,8	3	0,8
É o valor mais frequente (moda)	5	0,7	1	0,3
Ponto de equilíbrio	4	0,5	4	1,1
Valores como parâmetros	3	0,4	0	0,0
É uma medida	3	0,4	0	0,0
Tendência	0	0,0	2	0,6
Total parcial	416	54,9	251	68,6
Nada a ver: porcentagem, média geométrica, apenas a soma de valores ...	111	14,7	58	15,8
Não respondeu	230	30,4	57	15,6
Total	757	100	366	100,00

Fonte : Cazorla (2002, p. 181).

Depois a esta questão, a pesquisadora propôs que os alunos dessem exemplos de média aritmética. Observou-se no pré-teste uma grande quantidade de questões sem respostas: 38,4%. Das questões com respostas, 58,8% foram de respostas numéricas ligadas ao algoritmo. Observou-se 2,6% de exemplos inadequados como porcentagem de aprovados, regra de três etc.

Foram aplicadas nesta pesquisa um teste com seis questões de resolução sobre média. A primeira questão destinava-se ao cálculo da média simples: "Paulo tirou as seguintes notas na disciplina Estatística: 7 na primeira prova, 6 na segunda e 8 na terceira. Se cada uma destas notas tivessem o mesmo peso, qual foi a nota média da disciplina? Mostre os cálculos" (Cazorla, 2002, p.272). Trata-se de uma questão de resolução simples e teve um acerto de 95,2% no pré-teste e 97,7% no pós-teste.

A segunda questão adaptada desta, atribuía pesos diferentes às notas: "Se a primeira prova tinha peso dois, a segunda tinha peso três e a terceira peso um, qual foi a nota média final que Paulo obteve?____mostre os cálculos" (Cazorla, 2002, p.272). Na tabela 31, reproduzimos os resultados.

Tabela 31 – Resultado a problemas sobre média ponderada aplicado por Cazorla (2002)

Nota	Descrição do procedimento	Pré-teste		Pós-teste	
		Sujeitos	%	Sujeitos	%
0	Totalmente errado	193	25,5	91	24,9
1	Colocou apenas os números em questão	43	5,7	17	4,6
2	Apenas somou os números ponderando-os	50	6,6	18	4,9
3	Aplicou a fórmula, mas não efetuou os cálculos	17	2,2	7	1,9
4	Errou apenas em cálculos	9	1,2	7	1,9
5	Totalmente correto	233	30,8	135	36,9
0	Não respondeu	212	28,0	91	24,9
	Total	757	100,0	366	100,0

Fonte : Cazorla (2002, p. 309).

Pelos resultados apresentados, observamos que somando totalmente errado mais os que não responderam, temos 53,5% no pré-teste e 49,8% no pós-teste, o que representa um número bastante elevando. Cazorla destaca que para a análise das respostas erradas, os sujeitos não conheciam o conceito de média ponderada. Cazorla (2002) apresenta como erros mais frequentes:

a. Obter a média simples desprezando os pesos. Consideramos neste caso que o aluno não percebe a importância dos pesos ou o que é média ponderada.
b. Multiplicar cada número pelo seu peso e dividir por três e depois somar. Neste caso, acredito que os alunos que o assim fizeram, perceberam o sentido do peso. Contudo cometeram um erro que pode ser resultante do não conhecimento do algoritmo. Outra possibilidade deste tipo de resposta poderia ser resultante de um erro do campo conceitual das estruturas multiplicativas e aditivas. Considerando como cada observação ordenada de 1 a n, temos as seguintes observações $o_{1,}\ o_2\,, \cdots, o_n$, ordenado cada peso respectivo à cada observação como sendo igual a $P_1, P_2, \cdots, P_n$, para este

caso temos: $\frac{(o_1 \times P_1)+(o_2 \times P_2)+(o_3 \times P_3)}{(P_1+P_2+P_3)} = \frac{(a \times P_1)}{(P_1+P_2+P_3)} + \frac{(b \times P_2)}{(P_1+P_2+P_3)} + \frac{(c \times P_3)}{(P_1+P_2+P_3)} \neq \frac{(a \times P_1)}{3} + \frac{(b \times P_2)}{3} + \frac{(c \times P_3)}{3}$. O não perceber que a terceira igualdade não é possível, poderia ter sido uma causa do erro. O resultado para este caso foi 13,3;

c. Dividir cada observação pelo seu peso, depois somar os valores obtidos e dividir por 3. Obtiveram como resultado 4,5. Neste caso, parece que eles não tinham noção clara do que era a ponderação, mas por efeito do contrato didático, usaram em seus cálculos os valores apresentados no enunciado;
d. Calcular a média simples dos pesos desprezando as observações. Eles obtiveram como resultado 2.

Outro problema observado por Cazorla, nesta questão, foi determinar um valor que não se encontra entre o máximo e mínimo das observações. Considerando que os valores observados são 6, 7 e 8, a média deveria estar entre 6 e 8. A resposta 13,3 (b), 4,5 (c) e 2 (d) não está entre o máximo e o mínimo, uma propriedade simples. Este tipo de resposta nos leva a considerar como importante destacar esta propriedade da média, embora como parece aparentemente óbvia, que não tínhamos observado nos livros pesquisados que usamos para tratar do savoir savant. Consideramos que a necessidade de enfatizá-la surge dos estudos na área da didática. Observamos outros autores (STRAUSS; BICHLER, 1988; BATANERO, 2000; GITIRANA et al, 2010; STELLA, 2003) que realizam pesquisas na área do ensino que tratam desta propriedade. Assim destacamos esta propriedade dando continuidade à numeração iniciada no capítulo que tratamos do savoir savant.

PROPRIEDADE (m) 13. A média é um valor que deve estar compreendido entre o valor máximo e o mínimo das observações

A terceira questão envolve o cálculo da média simples como a primeira: “A nota zero (0) foi adicionada ao conjunto de 5 notas (6, 7, 8, 9, 10) cuja média é 8. Qual a média do novo conjunto? _____ mostre os cálculos” (CAZORLA, 2002, p.272). O número de acertos desta questão foi alto: 79,5% no pré-teste e 78,7% no pós-teste. Cazorla (2002) destaca que o erro mais observado foi desconsiderar o novo valor (0) e calcular outra vez a média dos números envolvidos. Este mesmo erro observado com universitários por Cazorla foi identificado em uma pesquisa feita com crianças entre 8 e 14 anos realizada por Strauss e Bichler (1998, apud BATANERO, 2000). Acreditamos que este tipo de erro levou a Batanero (2000, p. 4, tradução nossa) propor uma propriedade para a média: “deve-se levar em conta os valores nulos para o cálculo da média”. Não consideramos como sendo uma propriedade a ser destacada da média, se o fosse poderíamos colocar outras propriedades, tais como: deve-se considerar os valores negativos no cálculo da média e etc. Contudo, como se trata de um tipo de erro observado em pesquisa, consideramos que deva ser uma observação importante a destacar nos livros didáticos. Portanto acrescentamos esta observação à numeração das observações feitas no capítulo do savoir savant:

OBSERVAÇÃO (m) 6. Deve-se no cálculo da média considerar todos os valores observados, inclusive o zero.

A quarta questão do teste realizado por Cazorla (2002) foi adaptada de um problema proposto inicialmente por Pollatsek, Lima e Well (1981). Observamos na questão original presente no artigo destes autores que o peso era dado em libras e a capacidade máxima do elevador não era mencionada, sendo solicitado apenas o peso médio das pessoas no elevador. Cazorla justifica a escolha dessa questão para verificar se os alunos faziam uma relação entre a média e o todo. Assim como tinha um conhecimento de média ponderada: “Um elevador com capacidade máxima de 700 quilos tem que transportar 10 pessoas, das quais quatro (4) são mulheres, com peso médio de 60 quilos e seis são homens com peso médio de 80 quilos. As pessoas poderão ser transportadas em uma única viagem? ( ) sim ( ) não. Por quê? _____ Calcule o peso médio das pessoas no elevador” (Cazorla, 2002, p.272). Considerando a resposta totalmente correta como a resposta que constava o cálculo do peso total e do peso médio, 37% dos alunos participantes do pré-teste e 36,9% do pós-teste responderam totalmente correto. Observou-se que 44,5 % no pré-teste e 42,1% no pós-teste limitaram-se a calcular o peso total. O erro mais frequente encontrado por Cazorla foi somar 60 com 80 e dividir por dois.

A quinta questão exigia a interpretação da média de uma variável discreta. “Interprete a seguinte afirmação: ‘O número médio de filhos de casais jovens é de 2,3’” (CAZORLA, 2002, p.272). Os resultados indicam um problema sério com a interpretação. A maior parte das respostas indicava uma interpretação errônea: 51,2% no pré-teste e 48,3% no pós-teste. Observamos também um número elevado de questões sem respostas: 21,0% no pré-teste e 24,3% no pós-teste. Apenas 2,5% no pré-teste e 3,0% no pós-teste fizeram uma interpretação adequada. Entre as questões erradas Cazorla (2002, p. 189) destaca algumas do tipo: “do total de todos os jovens, apenas 23 têm filhos", "os dados são insuficientes para tal afirmação", "a média é de dois, com probabilidade de 30% de ter o terceiro filho", "a cada três casais, os filhos são 2", "dentre as crianças (filhos) consultadas, 2,3% são filhos de casais jovens".

Esta questão pode levar a duas observações. A primeira trata-se da observação 3 que já apresentamos no capítulo que trata do savoir savant e que afirma que a média não corresponde necessariamente a um valor observado. Ela é apresentada por Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) como uma observação. Contudo, Batanero (2000) mostra como sendo uma propriedade da média. A segunda observação, decorrente dos resultados desta questão, indica que o valor da média pode não ser inteiro, embora o contexto dos dados seja. Chamaremos de observação 7.

OBSERVAÇÃO (m) 7. A média de uma variável quantitativa discreta pode ser um número não inteiro que não faz sentido no contexto dos dados.

Podemos encontrar em Batanero (2000, p. 4, tradução nossa) esta observação como uma propriedade da média "O valor obtido da média de números inteiros pode ser uma fração, que não tem sentido no contexto dos dados".

Os resultados desta pesquisa indicam a importância das pesquisas em educação para observar dificuldades nos alunos na compreensão de certos conceitos e de se pensar em como criar condições para os alunos superar estas dificuldades. Estes resultados devem ser considerados pelos autores dos livros didáticos, no sentido de aperfeiçoamento dos mesmos, para que estes possam propor atividades para serem realizadas pelos alunos que possibilitem aos aprendizes superar estas dificuldades.

Strauss e Bichler (1988) apresentam sete propriedades da média:

1) "A média está localizada entre os valores extremos" (p. 66, tradução nossa). Estes autores exemplificam informando que a idade de uma criança em uma sala de aula deve estar entre a idade da criança mais velha e a mais jovem. Apresentamos anteriormente como propriedade 11;
2) "A soma dos desvios em relação à média é igual à zero" (p. 66, tradução nossa). Propriedade apresentada por Kendall e Yule (1948) e nós a apresentamos como sendo a propriedade 2 da média;
3) "A média é influenciada pelos valores adicionados" (p. 66, tradução nossa). Ele exemplifica que a média de 0, 5 e 10 é 5, e se adicionamos 10 ao valor da média muda

para 6,25. Batanero (2000, p.4, tradução nossa) descreve esta propriedade como "o valor médio é influenciado pelo valor de cada um dos dados". Dessa forma, ao acrescentar, retirar ou mudar qualquer valor, o valor da média deve ser recalculado. Apresentamos a seguir como propriedade 13;

4) "A média não é necessariamente igual a um dos valores que foram somados" (p. 66, tradução nossa). Poderíamos dizer de uma outra maneira: a média não é necessariamente igual a um dos valores observados. Como exemplo, mostra-se que a média de 1 e 3 é 2. Esta propriedade é tratada por Dehon, Droesbke e Vermandele (2008) como uma observação. Apresentamos nesta tese como a observação 3.
5) "A média pode ser uma fração ainda que não corresponda à realidade física" (tradução nossa, página 66). Como exemplo, estes autores citam que a média de filhos por família nos Estados Unidos em 1980 foi 1,6. Tratamos nesta tese como observação 7.
6) "Quando calculamos a média, o valor zero se faz parte dos dados, deve ser levado em consideração" (tradução nossa, página 66). Esta propriedade é exemplificada: para o cálculo da média do número de horas que uma criança faz o trabalho escolar em casa durante a semana, deve ser considerado os dias que ela não o faz. Apresentamos como observação 6.
7) "O valor da média é representativo dos valores que são usados no cálculo da média" (tradução nossa, página 66). Estes autores acrescentam que se pode pensar esta propriedade em termos espaciais. Dessa forma, a média é o valor que está mais próximo de todos os valores utilizados no seu cálculo. Apresentamos a seguir na propriedade 14.

Essas propriedades são tratadas por outros pesquisadores como Batanero (2000). Consideramos algumas destas propriedades mais como uma observação do que uma propriedade e por isso apresentamos como observação. Por exemplo, deve-se levar em conta os valores nulos. Pode-se para o cálculo da média somar todas as observações e dividir pelo número de observações, se uma das observações é um valor nulo, esta também deve ser considerada como valor a ser somado e como número de observações para se dividir a soma das observações. Contudo, como se trata de uma dificuldade apresentada por alunos observadas em pesquisa, consideramos mais como uma observação que se deve estar atento o aluno e devem ser criadas situações pelo professor para que o aluno perceba esta observação. Considerando as observações e propriedades já indicadas, temos então duas propriedades apresentadas por Strauss e Bichler (1988) que não havíamos incluídas. Assim, dentro da ordem das propriedades apresentadas, consideraremos estas como sendo as propriedades 14 e 15:

PROPRIEDADE (m) 14. O valor da média é influenciado pelos valores de cada uma das observações.

PROPRIEDADE (m) 15. A média é representativa dos valores usados no cálculo da média.

Em relação a esta última propriedade, Pollatsek, Lima e Well (1981, p. 196, tradução nossa) realizam uma pesquisa na qual propõem entre outras a seguinte questão:

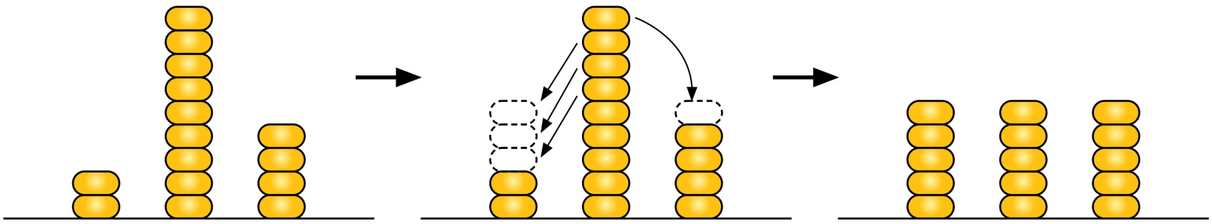
> Você sabe que a pontuação média verbal SAT da população de alunos do final do ensino médio de uma grande região escolar é 400. Você pega uma amostra com 5 estudantes do final do ensino médio. Os quatro primeiros estudantes, neste exemplo, têm as seguintes pontuações SAT: 380, 420, 600, 400. O que você espera da pontuação do quinto estudante?

Para estes autores, a resposta correta deveria ser 400 que corresponde à média da população. Nove alunos procuraram determinar o quinto valor considerando o valor cuja média dos cinco estudantes fosse igual a 400. Poderíamos assim representar esta tentativa: $\frac{380+420+600+400+x}{5} = 400 \Rightarrow x = 200.$

Um primeiro ponto que consideramos pertinente discutir é o resultado esperado por estes autores (400). Como a média é 400, se tivermos uma distribuição moderadamente simétrica e com pequena dispersão se espera que esta pontuação esteja próxima (e não igual) da média (400). Esta informação não é fornecida na questão. Contudo, do ponto de vista probabilístico, a pontuação do quinto estudante pode ser qualquer valor entre o valor mínimo e máximo das notas (não fornecido no problema). Assim, apesar da média ser representativa dos valores usados no cálculo da média, isto não significa que se selecionarmos ao acaso um valor de uma população, este tenda a ser a média. Dependendo da forma de distribuição dos dados, podemos ter uma maior probabilidade do quinto elemento ser a moda. Por exemplo, se pegarmos os salários de uma grande empresa, podemos ter a grande maioria dos trabalhadores de base com o mesmo salário (moda), contudo não podemos dizer que se tirarmos o salário de um trabalhador, este será o valor da moda. Podemos sim afirmar que existe uma maior probabilidade de ser o da moda. Outro problema neste resultado é que a média não corresponde necessariamente a um valor do conjunto das observações. Assim, embora a média seja 400, podemos não ter nenhum indivíduo com esta pontuação. Observamos ainda que apesar desta inconsistência, esta questão é aplicada em outras pesquisas, por outros pesquisadores.

Uma forma de explorar o conceito da média tendo em vista o ensino é apresentado por Walle (2009). Ele destaca duas formas de tratar a média. A primeira como ponto de equilíbrio (como já tratamos anteriormente e ordenamos esta propriedade, entre outras listadas, como propriedade 2) e a segunda considerando a média como **conceito nivelador**: a média corresponderia ao valor obtido se nivelássemos todas as observações. Tomemos como exemplo a média de 2, 4, 9 é igual a 5. Uma forma de representar é construir estes valores com base em um material concreto formado por barras de mesma medida, como ilustramos na figura 28, e depois tentarmos nivelar as barras. Considerando que a média está a uma mesma distância de todos os elementos, podemos imaginar esta ideia de nivelar as observações. Este exemplo da figura 28 foi inspirado em uma situação parecida que observamos em Walle (2009).

Figura 28 – Média como resultante do nivelamento de todas as observações.



Fonte: desenho elaborado pelo autor da tese.

Com base nesta propriedade, apresentamos mais uma propriedade da média.

PROPRIEDADE (m) 16. A média como conceito nivelador: representa o valor representativo de todas as observações levadas em consideração para o cálculo da média se elas fossem niveladas. Assim se considerarmos que um aluno obteve ao longo de quatro unidades a nota 7, considerando todas de mesmo peso, seria como se distribuíssemos o total de pontos nas quatro unidades de forma uniforme.

Existem inúmeros outros estudos sobre a média e em menor número sobre as outras medidas de tendência central. Sobre a dispersão, consideramos que esta é uma área ainda pouco investigada. Tendo em vista as limitações temporais e também a grande diversidade de propriedades e características já apresentadas ao tratar do savoir savant, o nosso estudo se concentrará mais na transposição do savoir savant do que na transposição das pesquisas em educação para o livro didático. Ainda assim, apresentaremos um pequeno resumo de outros estudos realizados em diferentes lugares sobre as MTCD.

Leon e Zawojewski (1990) realizaram uma pesquisa sobre quatro propriedades da média aritmética com 145 estudantes, dos quais 42 do quarto ano do ensino fundamental (fourth grade), 61 do oitavo ano do ensino fundamental (eighth grade) e 42 estudantes universitários dos Estados Unidos. Estas propriedades foram selecionadas de outras sete de uma pesquisa realizada em Israel. As propriedades levantadas foram: “Propriedade A: a média está localizada entre valores extremos”. “Propriedade B: a soma dos desvios é zero”; “Propriedade F: quando a média é calculada, o valor zero, se presente, deve ser levado em conta”; “Propriedade G: a média é representativa de todos os valores usados no cálculo” (p. 303, tradução nossa). Os resultados indicaram que as propriedades F e G apresentaram duas vezes mais dificuldades na sua compreensão do que as propriedades A e B.

Gitirana et al. (2010) aplicam um teste envolvendo 7 questões a 210 sujeitos de 6 escolas públicas no município de Moreno, Pernambuco (Brasil). Faziam parte 104 alunos do quinto ano do ensino fundamental, 75 alunos do último ano do ensino médio e 31 professores. Na tabela 32, reproduzimos os dados apresentados por estes autores que sintetizam os resultados.

Tabela 32 – Propriedades presentes nas questões propostas por Gitirana et al. (2010).

Propriedades presentes nas questões[55]	Questões	Alunos do 3^0 ano (%)	Alunos do 5^0 ano (%)	Professores (%)
A média é influenciada por cada um e por todos os valores.	1 5	4,0 9,3	7,7 11,5	64,5 48,4
A média considera todos os valores, inclusive os nulos.	2	1,3	4,8	54,8
A média não necessariamente coincide com um dos valores que a compõe.	3	5,3	3,8	61,3
A média é um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada.	4	0,0	0,0	45,2
A média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física.	6	0,0	0,0	19,4
A média está localizada entre os valores extremos (valor mínimo $\leq$ média $\leq$ valor máximo.	7	8,0	6,7	16,1

Fonte: Gitirana et al (2010, p. 113).

[55] Na tabela original usou-se o termo invariantes. Preferimos substituir por propriedades presentes nas questões.

Os resultados indicam que os alunos tiveram dificuldades em todas as questões. Os professores tiveram um desempenho bem superior aos alunos. Quanto às dificuldades dos professores, elas foram mais acentuadas nas questões 6 e 7.

Estes autores também apresentaram uma pesquisa sobre a média aritmética nos livros didáticos nos quatro anos finais do ensino fundamental. Para esta pesquisa foram selecionadas as 16 coleções dos livros didáticos aprovadas no PNLD de 2008. Ao todo foram levantadas 273 atividades ou explicações sobre a média aritmética. Eles observaram que 50% das coleções apresentaram a média aritmética apenas em um livro correspondente a um ano letivo, 31,25% abordaram em dois anos, 6,25% em três anos, 6,25% nos quatro anos e 6,25% não abordaram em nenhum dos anos. Também não observaram uma tendência em relação a um ano especifico, embora o 9º ano teve um percentual um pouco acima dos outros anos. Em relação à distribuição geral das atividades, observou-se que 35% das atividades concentravam-se no 9º ano, 19% no 8º ano, 26 % no 7º ano e 20% no 6º.

Nessa pesquisa procurou-se ver também se as atividades eram contextualizadas. Do total das questões analisadas, 92,3% eram contextualizadas.

Procurou-se também avaliar se estas questões apresentavam as 7 listadas:

1) “A média está localizada entre os valores extremos” (p.107);

2) “A soma dos desvios a partir da média é igual a zero” (p. 107);

3) “A média é influenciada por cada um e por todos os valores” (p.107);

4) “A média não precisa, necessariamente, coincidir com um dos valores” (p.107);

5) “A média pode ser um valor sem sentido no contexto real” (p.108);

6) “No cálculo da média, devem ser incluídos os valores nulos e os valores negativos” (p.108);

7) “A média é um valor representativo dos dados, ou seja, é o valor que está mais próximo de todos (aspecto espacial)” (p.108).

Nas análises feitas, Gitirana et al. (2010) observaram que das 16 coleções apenas 3 coleções fizeram em algum momento referência à propriedade 1 (1,1% do total das atividades analisadas). A propriedade 2 também foi observada em apenas uma coleção (0,7 % do total das atividades); A propriedade 3 foi identificada em 98,5% das atividades quando tomada de uma forma geral. Contudo quando se procurou ver o tratamento de forma mais enfático, este valor caía para 32,2% das questões. A propriedade 4 foi observada em 75% das atividades. Em 15% das atividades a média aparece como um valor que não tem sentido no contexto real (propriedade 5). Observou-se que 12,5% das atividades apresentadas incluíam valores nulos ou negativos (propriedade 6). Apenas 6% das atividades enfatizaram o aspecto representativo da média (propriedade 7).

Li e Shen (1992 apud CAZORLA, 2002) observaram que quando se trata de calcular a média de dados agrupados em intervalos de classe, os sujeitos ignoram as frequências dos intervalos, calculando como se fosse uma média simples.

Do ponto de vista da representação, Mokros e Russell (1995 apud BATANERO, 2000) classificaram de significados incorretos atribuídos à palavra média:

- Valor mais frequente – fazendo confusão com a palavra moda;
- Valor razoável – significado coloquial;
- Ponto médio – confusão com a mediana;
- Algoritmo – percepção da média apenas como algoritmo de cálculo.

Na pesquisa de doutorado de Merino (2003) realizada na Espanha, temos um estudo das medidas de posição central em estudantes secundários. Nessa pesquisa, foi feito estudo um piloto com estudantes do México e um comparativo com pesquisas similares feitas com estudantes na Espanha. Para seleção das questões a serem investigadas, a pesquisa fez uma revisão de 12 pesquisas realizadas entre 1992 e 2000, totalizando 59 itens. Destas, foram selecionados 16 itens para investigação nesta pesquisa.

Merino (2003) apresenta três campos de problemas associados à mediana:

1) Quando a média não é suficientemente representativa;
2) Encontrar um resumo estatístico de posição central para variáveis ordinais;
3) Para efetuar comparações de dois ou mais conjuntos de dados utilizando um gráfico de caixa.

No primeiro caso, indica se isto ocorre quando os dados são assimétricos, quando possuem valores atípicos ou apresenta várias modas.

No segundo caso, temos as variáveis qualitativas ordinais. Destacamos ainda que para este tipo de variável pode-se utilizar a moda. Contudo, esta autora considera que como a mediana leva em conta a ordenação, esta é mais completa. Apesar deste aspecto destacado pela tese de Merino, consideramos que dependem dos objetivos da pesquisa e o que se quer destacar com estas medidas.

No terceiro caso, trata-se da representação usando diagrama de caixa. Neste tipo de representação se utiliza a mediana, mas também o máximo, o mínimo, Q1 e Q3 e os valores atípicos.

Em relação à moda, Merino (2003) apresenta dois campos de problemas:

1) "Obter o valor representativo de um conjunto de dados, o mais frequente deles, em situações nas quais o que interessa fundamentalmente é o valor dominante do conjunto" (p. 47, tradução nossa);
2) "Encontrar o valor representativo de dados qualitativos" (p. 47, tradução nossa).

   No primeiro caso, temos os objetivos da pesquisa em que se interessa em analisar o valor dominante. No segundo caso, temos a limitação quando tratamos de variáveis qualitativas nominais.

A pesquisa de doutorado de Merino (2003) foi realizado um estudo piloto com alunos do ensino secundário obrigatório (ESO) na cidade de Granada na Espanha. Na metodologia consta que o estudo foi aplicado com 24 alunos do 1º ESO e 29 do 4º ESO, contudo as tabelas indicam o contrário, ou seja 29 alunos do 1º ESO e 24 do 4º ESO. A estrutura da educação básica na Espanha é diferente do Brasil, assim não se pode comparar diretamente. A duração do ESO é de quatro anos e corresponde aproximadamente à idade dos alunos dos três anos finais do ensino fundamental e o primeiro ano do ensino médio no Brasil. Temos assim o 1º, 2º, 3º e 4º, no qual o 4º ano é o último ano que corresponderia ao primeiro ano do ensino médio no Brasil. No quadro 2, apresentamos uma questão que envolve a média, a moda e a mediana. Na metodologia, se indica que ele foi aplicado a 29 alunos do quarto ano da ESO.

Quadro 2. Questão aplicada por Merino (2003).

El siguiente conjunto de datos muestra las edades en que contrajeron matrimonio las mujeres en una muestra de 100 mujeres,

edad	*frecuencia*
15-19	*4*
20-24	*38*
25-29	*28*
30-34	*20*
35-39	*8*
40-44	*1*
45-49	*1*

¿Cuál es la media, mediana y moda de la edad de estas mujeres? Haz los cálculos que necesites en este mismo cuestionario.

Fonte: Merino (2003, p. 161).

Apresentamos a tabela 33 extraída de Merino (2003). Reproduzimos exatamente como está na tese. Destacamos que não foi indicado o número de “não respostas” à questão, contudo o percentual de “não respostas” foi elevado. Pela descrição na metodologia o número para o 4º ESO é de 29, e não 24 como indicando entre parêntese. O percentual em parênteses foi calculado considerando n=29. Refizemos a tabela incluindo as não respostas e refazendo o calculo do percentual para n=24.

Tabela 33. Tabela com as respostas tal como apresentadas em Merino (2003)

	4º ESO (n=24)	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto
Cálculo de media con datos agrupados (AM3)	3 (10.3)	5 (17.2)
Cálculo de moda con datos agrupados (AMO3)	5 (17.2)	4 (13.8)
Cálculo de mediana datos agrupados (AME5)	1 (3.4)	2 (6.8)

Fonte: Merino (2003, p. 161).

Tabela 34. Ajustes nos dados da tabela 33.

	4º ESO (n=24)					
Elementos usados	Correto		Incorreto		Não respostas	
	N	%	N	%	N	%
Cálculo da média com dados agrupados	3	12,5	5	20,8	16	66,7
Cálculo da moda com dados agrupados	5	20,8	4	16,7	15	62,5
Cálculo da mediana com dados agrupados	1	4,2	2	8,3	21	87,5

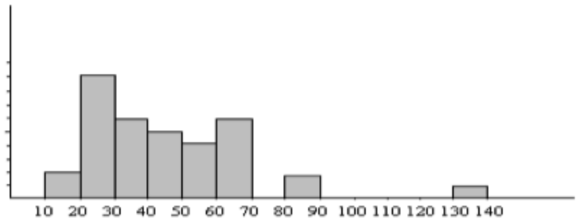
Fonte: adaptado de Merino (2003, p.161, tradução e adaptação nossa).

Na tabela 34, pode-se observar que o número de “não respostas” foi muito maior para o cálculo da mediana com dados agrupados, indicando possivelmente uma maior dificuldade com esse tipo de cálculo. Observamos também que para a mediana, o número de respostas incorretas foi o dobro do número de respostas corretas. A moda e a média apresentaram um número maior de respostas, também um número maior de respostas corretas e incorretas. Comparando a moda com a média, aparentemente o que apresentou menor dificuldade foi a moda, com maior número de respostas corretas e menor número de erros em relação à média. Isto pode-se justificar pela maior simplicidade do cálculo desta.

Como exemplos de erros, tivemos para a média a indicação da resposta o intervalo, por exemplo: a média é entre 30-40. Foi observado também este tipo de erro no cálculo da média e moda. Outra questão investigada por Merino está indicada no quadro 3.

Quadro 3. Questão proposta por Merino (2003).

Pedro piensa que en el siguiente gráfico, la mediana te dice que una mayoría de estudiantes gasta alrededor de 47 euros cada semana en comida.



Gasto semanal en comida de un grupo de estudiantes
media = 45.3 euros

Si____ No ____
Razona la Respuesta

Fonte: Merino (2003, p. 162).

Na tabela 35, apresentamos os resultados para esta questão. O número de respostas corretas foi muito baixo para os três itens. Destes o melhor resultado foi para a definição da mediana como o valor que divide a população em partes iguais. Foram observados também erros como confusão entre a mediana e a moda, com o uso da definição da moda. Como também considerar que a distribuição é simétrica no cálculo.

Tabela 35. Respostas à questão do quadro 4.

Elementos usados	4º ESO (n=24)					
	Correto		Incorreto		Não indicado[56]	
	N	%	N	%	N	%
Cálculo gráfico da mediana	2	8,3	14	58,3	8	33,3
Definição da mediana, ideia de centro	3	12,5	5	20,8	21	62,5
Definição da mediana como valor que divide a população em partes iguais	5	20,8	2	8,3	17	70,8
Confusão entre mediana e moda, uso da definição da moda			9	37,5		
Coincidência de parâmetros em distribuições simétricas			3	12,5		

Fonte: adaptado de Merino (2003, p.163, tradução e adaptação nossa). Obs.: os percentuais foram corrigidos.

Nesta pesquisa, procurou-se observar se os alunos percebiam que a média é influenciada por valores extremos, enquanto que a moda e mediana não são. Assim, com base na questão do quadro 3, foi apresentado uma outra questão indicada no quadro 4.

[56] Neste caso podemos ter não resposta ou não utilizado.

Quadro 4. Questão proposta por Merino (2003).

Joana pensa que, no gráfico anterior, o alto valor de 133 euros deveria ser tirado do conjunto de dados antes de calcular a média, a mediana e a moda. Sim____ Não_____ Razão da resposta.

Fonte: Merino (2003, p.163, tradução nossa).

Na tabela 36, apresentamos as respostas indicadas pela autora. Esta apresenta um grande número de erros e os acertos se limitam a justificar a média. A pesquisadora considerou que o índice alto de erros deve ter sido resultante da dificuldade de tratar com valores extremos em um conjunto de dados e também de reconhecer isto no cálculo da média, moda e mediana. Em nossa pesquisa vamos avaliar se os livros aborda estas propriedades destas medidas de tendência central.

Tabela 36. Tabela apresentada por Merino (2003, p. 164)

	4º ESO (n=24)	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto
Media menos resistente a valores atípicos (E4)	3 (12)	14 (56)
La media tiene en cuenta todos los datos (N3)	3 (12)	18 (72)

Fonte: Merino (2003, p.164).

Em estudo realizado por Mayén et al (2007) com 125 estudantes do magistério (com idade entre 17 e 18 anos) no México, procurou-se avaliar o desempenho em questões que envolviam a média, a mediana e a moda. No total foram aplicados um teste com nove itens. Tal como em Batanero (2000), os alunos conseguiram resolver questões simples envolvendo o cálculo da média aritmética, mas apresentaram dificuldades no cálculo da média ponderada. Além das questões com média ponderada, as questões com mediana eram as que os alunos tiveram maior dificuldades.

Alguns dos resultados dessas pesquisas apresentadas, indicam erros, dificuldades e limitações em relação à média, mediana e moda. Esses problemas justificam a nossa pesquisa que procura investigar as limitações nos livros didáticos e programas. Essas limitações podem ser de diferentes naturezas. Podem ser, por exemplo, atividades pouco exploradas ou não exploradas que pouco contribuem para a construção do conceito das medidas de tendência central e de dispersão. Também exploramos as praxeologias apresentadas nos livros e programas selecionados e suas limitações. As pesquisas apresentadas neste capítulo, junto com o que foi levantado nos capítulos anteriores, servirão de base para a metodologia proposta no volume dois desta tese.

Com relação às medidas de dispersão, não encontramos trabalhos publicados envolvendo dificuldades dos estudantes com estas medidas. Existe uma pesquisa em andamento, do professor Jean-Claude Régnier, sobre um tipo de erro recorrente no cálculo do desvio padrão com alunos do ensino superior na França. Como ainda não foi publicada, não vamos fazer a divulgação. Também não observamos pesquisas publicadas que envolvem o ensino e/ou a aprendizagem das medidas de tendência central junto com as medidas de dispersão como o presente estudo.

No próximo capítulo trataremos de uma das teorias que utilizamos em nossa tese e que deu suporte para parte da nossa metodologia, análises e conclusões. Trata-se da teoria antropológica do didático.

4. A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO E AS MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL E DE DISPERSÃO

Para analisar as medidas de tendência central e de dispersão nos livros didáticos vamos utilizar como um dos suportes teóricos a teoria antropológica do didático (TAD). Almouloud (2007, p.111) destaca que a TAD proporcionou “uma evolução no conceito de transposição didática, inserindo a didática no campo da antropologia”. O termo “antropológico” é justificado por Chevallard (1999) uma vez que a TAD se preocupa com o estudo das atividades matemáticas, sendo essas atividades humanas desenvolvidas em instituições humanas. Destacamos que nessa teoria, o saber é uma forma específica de organização do conhecimento. A TAD procura investigar os diferentes problemas que se criam entre os diferentes objetos do saber a ensinar. No caso das medidas de tendência central e de dispersão, no capítulo que tratamos da exploração desse saber científico, observamos que não existem um consenso entre os estatísticos sobre muitos elementos. Por exemplo, o conceito de histograma apresentado por Dodge (2007a) não é o mesmo que o apresentado por Régnier (1998b). Régnier (1998b) indica falhas na forma como é apresentado o conceito de histograma por muitos estatísticos. Assim, podemos observar dentro do saber científico a existência de divergências. Temos também formas diferentes de representação dos objetos da estatística e da matemática, como por exemplo a representação de intervalo. Como tratado no capítulo 2, observamos em Régnier (2011a) uma forma que é diferente da apresentada por Kendall e Yule (1948) e também pelo IBGE. Temos diferentes significantes para o mesmo objeto matemático que é utilizado ao tratarmos das medidas de tendência central e de dispersão de variáveis estatística quantitativas contínuas. Um conceito trazido da TAD que vamos utilizar para discutir estas diferenças é o de Instituição (representado na TAD por I). Chevallard (2009, p.2, tradução nossa) define instituição como sendo:

> [...] um dispositivo social “total”, que pode certamente não ter uma extensão muito reduzida em um espaço social (existem as micro-instituições), mas que permite – e impõe – aos seus sujeitos, queremos dizer todas as pessoas x que vêm a ocupar as diferentes posições p oferecidas em I, e coloca em jogo as maneiras de fazer e de pensar próprios – isto quer dizer praxeologias.

Assim como exemplo de instituições citadas temos o IBGE, que apresenta normas e padrões para as pessoas que a utilizam. Como instituições podemos também ter pessoas cuja importância do seu trabalho norteia um grupo de indivíduos que seguem suas orientações. No caso da estatística, temos estatísticos que pela importância de suas obras, servem como referência e são seguidos. Utilizamos alguns destes como referência ao tratarmos das MTCD. Dessa forma, estas instituições vão nortear os autores dos livros didáticos que utilizam os seus textos como referência. Logo, dentro desta perspectiva, ao tratar da transposição didática, devemos ter em conta que existem diferentes instituições intervindo neste processo. Assim torna-se importante distinguir o papel das instituições no Brasil e na França. Ao comparar os livros didáticos do Brasil com a França podemos observar diferenças que de certa forma podem ser internas no mesmo país, como também de país para país.

Dentro da TAD um elemento importante é o de Praxeologia que iremos nos deter a seguir.

4.1. PRAXEOLOGIA

Para Chevallard e Bosch (1999, p.83, tradução nossa) “o saber matemático, como uma forma particular de conhecimento é, portanto, fruto de uma ação humana institucional”. Para analisar o processo de produção, transposição, ensino e utilização do saber, de uma forma geral e das práticas matemáticas, em particular, ele desenvolve as noções de tarefa (representado por t), tipo de tarefa (representado por T), técnica (representado pela letra grega minúscula tau, τ), tecnologia (representado pela letra grega minúscula teta, θ) e teoria (representado pela letra grega teta maiúsculo, Θ). Ele baseia-se em três postulados:

- Toda prática institucional pode ser analisada sob diferentes pontos de vistas e de diferentes formas, em um sistema de tarefas relativamente bem delimitadas, destacando-se o fluxo da prática;
- O cumprimento de toda tarefa decorre do desenvolvimento de uma técnica;
- [...] para poder existir em uma instituição, uma técnica deve ser compreensível, legível e justificada [...] essa necessidade ecológica implica a existência de um discurso descritivo e justificativo das tarefas e técnicas que chamaremos de tecnologia da técnica. O postulado anunciado implica também que toda tecnologia tem necessidade de uma justificativa que chamamos de teoria da técnica e que constitui o fundamento último (CHEVALLARD; BOSCH, 1999, p.84-86).

A praxeologia é um conceito central na TAD (CHEVALLARD, 2011). E estes quatro elementos básicos da TAD devem ser considerados no seu sentido dentro da TAD. Apresentaremos a seguir um detalhamento destes elementos.

4.1.1. GÊNERO DE TAREFA, TIPO DE TAREFA, SUBTIPO DE TAREFA E TAREFA.

O termo tipo de tarefa (representado por t) é normalmente associado a um verbo. Na pesquisa em TAD podem-se estudar objetos que em uma dada sociedade não existe um verbo e cabe ao pesquisador explicitar este tipo de tarefa que é objeto de sua pesquisa (CHEVALLARD, 2011). Quando utilizamos apenas um verbo, como subir, não temos uma tarefa (ou um tipo de tarefa), temos um gênero de tarefas (CHEVALLARD, 2009). Uma tarefa pode revelar um tipo de tarefa, neste caso, podemos representar, algumas vezes, como $t \in T$. Para exemplificar estas diferenças, considere o gênero de tarefa “determinar”, um tipo de tarefa “determinar a média aritmética” e uma tarefa “determinar a média aritmética de 2, 5 e 7”. Encontramos em Chevallard (1998 e 1999) a menção a outra categoria chamada subtipo de tarefa (sous-type de taches). Nos dois artigos a descrição é bastante sucinta. Vamos encontrar na tese de Araújo (2009) o desenvolvimento desta ideia com uma classificação aplicada ao estudo das funções de segundo grau, utilizando inclusive uma simbologia que não tínhamos observado em Chevallard. E incorporamos a descrição dos subtipos de tarefas em nossa pesquisa. No quadro 5, exemplificamos esses elementos tomando como referência Chevallard (2009) e um exemplo que propomos sobre as medidas de tendência central e dispersão .

Quadro 5 – Gênero de tarefa, tipo de tarefa, subtipo de tarefa e tarefa.

	Rep.	**Exemplo extraído de Chevallard (2009)**	**Exemplo baseado em nossa pesquisa**
Gênero	---	Dividir	Determinar
Tipo de tarefa	T	Dividir um inteiro por outro	Determinar a média aritmética de dados não ordenados ou ordenados da população ou amostra, apresentados ou não em uma tabela.
Subtipo de tarefa	t_1	----	Determinar a média usando uma fórmula do tipo: $M = \overline{X} = \frac{1}{N}(X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n) = \frac{1}{N}\sum(X)$
Tarefa	t	Dividir 509 por 15	t1:Determinar a média aritmética das alturas de três alunos: 1,60 m, 1,55 m e 1,56 m. t2: determinar a média das alturas de três indivíduos: 1,48 m, 1,50 m, 1,55 m.

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Partindo da ideia que para realizar uma tarefa é necessário uma maneira de fazê-la, Chevallard (1998) acrescenta um segundo elemento na praxeologia: a técnica.

4.1.2. TÉCNICA

Chevallard (2009, p.225) esclarece que em uma praxeologia relativa a T, existe “uma maneira de cumprir, de realizar as tarefas $t \in T$: uma tal maneira de fazer, τ, dar-se o nome de técnica (du grego tekhnê, saber-fazer”). Uma técnica poderia responder a questões do tipo: como escovar os dentes? Como resolver uma equação do segundo grau? Como determinar a média aritmética? Como determinar a moda? Existindo mais de uma maneira de fazer poderíamos pensar em qual seria a melhor forma de fazer? Qual a melhor forma de determinar a mediana? Neste caso, se procuraria entre as técnicas a mais eficiente. Chevallard (1998) destaca que em alguns casos uma técnica não consegue dar conta de todas as tarefas relativas a um tipo de tarefa. Existindo desta forma uma técnica que é superior a outra, ou seja, que pode ser utilizada para resolver um número maior de tarefas relativas a um tipo de tarefa. O surgimento de técnicas superiores conduzem a uma evolução das praxeologias. Podemos ainda utilizar na realização de uma tarefa, no lugar de uma técnica, um conjunto de pequenas técnicas que são reconhecidas em uma dada instituição com a exclusão de técnicas alternativas (CHEVALLARD, 1999). Algumas técnicas utilizadas em uma instituição podem não ser usadas em outras. Em uma aula de matemática, por exemplo, o professor pode utilizar uma ou um conjunto de técnicas para resolver um tipo de problema e considerar as técnicas alternativas desenvolvidas pelos alunos como alternativas possíveis, ou como artificiais, contestáveis, inaceitáveis dentro da organização praxeológica da instituição de ensino da qual faz parte. Ao analisar uma técnica deve-se analisar algumas questões como: ela pode ser aplicada a outras tarefas ou é limitada? Ela é mais econômica (mais simples e eficiente)? Ela possui limitações?

Chevallard (1999, p.225) esclarece que uma técnica "não é necessariamente de natureza algorítmica ou quase algorítmica", sendo algorítmica em apenas alguns casos. Este pesquisador esclarece que em matemática, algumas técnicas não são algorítmicas, mas existe uma tendência à algoritmização. Bessa de Menezes (2010) reflete, em seu estudo, que um dado problema pode ter mais de uma técnica ou pode usar uma técnica principal e uma subtécnica. Para calcular a área de um retângulo de lados (x-3cm) e (x-5cm) pode-se utilizar como técnica a fórmula da área do retângulo e como subtécnica a fórmula de Bháskara (BESSA DE MENEZES, 2010). O termo subtécnica não é empregado por Chevallard (1996, 1998, 1999, 2003, 2009, 2011).

Um conjunto formado por um tipo de tarefa T e uma técnica τ formam um bloco chamado prático-técnico representado por $[T/\tau]$ relacionado ao saber-fazer.

4.1.3. TECNOLOGIA

Uma técnica precisa de uma justificativa. Na TAD esta justificativa é chamada de tecnologia e é representada por θ. Chevallard (1999, p.226, tradução nossa) esclarece que a tecnologia corresponde a "um discurso racional – o logos – sobre uma técnica – a tekhnê - τ, discurso que tem como objetivo primeiro justificar "racionalmente" a técnica τ, em assegurar que ela permita cumprir bem as tarefas do tipo T [..]". A tecnologia de uma instituição, ou seja, a justificativa das técnicas utilizadas para resolver determinadas tarefas T desta, pode ser diferente de outra instituição. Pode ainda uma tecnologia em uma instituição ser considerada por outra pouco racional. Essas diferenças são importantes, sobretudo quando vamos comparar livros didáticos diferentes que podem trazer técnicas diferentes. Para cada autor, a técnica apresentada é a mais adequada, havendo assim divergências. Por outro lado, podemos ter um conjunto de livros que usam a mesma técnica.

Chevallard (1999) destaca três observações sobre a tecnologia:

- Nas instituições uma técnica é acompanhada de vestígios de tecnologia e em alguns casos a tecnologia é integrada à técnica. Este pesquisador exemplifica através da aritmética elementar na qual um pequeno discurso tem uma dupla função. Ao mesmo tempo em que possibilita encontrar o resultado (função técnica) justifica o resultado pretendido (função tecnológica): se alguém diz que "se 8 pirulitos custam 10 F[57], 24 pirulitos são três vezes 8 pirulitos, custam 3 vezes mais, são 3 vezes 10 francos" (p.227). Em uma dada instituição pode existir uma técnica consagrada, apenas reconhecida e empregada pela instituição. Este fato pode fazer que a mesma seja empregada sem uma justificação, como sendo a melhor forma de fazer tal tipo de tarefa.
- A segunda função da tecnologia é de justificar a técnica. É tornar clara as razões que conduzem a utilizar tal técnica. Explicar porque esta técnica é composta de tais procedimentos. Na matemática a função de justificação é tradicionalmente ocupada pela exigência da demonstração.
- A terceira função da tecnologia é a produção de técnicas. Esta função é, atualmente, mais associada ao termo tecnologia. Existem tecnologias que são potenciais, pois não estão associadas a alguma técnica. Existem também as tecnologias que são associadas a poucas técnicas e neste caso são subexploradas. A tecnologia pode modificar uma técnica para que esta possa ser aplicada a um número maior de tarefas ou criar uma nova técnica mais aprimorada.

---

[57] Francos, moeda corrente na França, antes da unificação das moedas na Europa com o euro.

4.1.4. TEORIA

Toda tecnologia possui afirmações mais ou menos explícitas que podem exigir sua justificação. Esta justificação é chamada de teoria. Para Chevallard (1999, p.227) a teoria "trata-se de um nível mais elevado de justificação-explicitação-produção". Ela é representada na TAD por Θ. Da mesma forma que a tecnologia justifica a técnica, a teoria vem a justificar a tecnologia. Contudo, poderíamos pensar numa teoria que justifica outra teoria prolongando-se nesta regressão ao infinito. Contudo, Chevallard (1999) justifica que estes três níveis já explicitados (técnica, tecnologia e teoria) são suficientes, em geral, para dar conta das atividades de uma organização praxeológica.

4.1.5. OS BLOCOS PRÁTICO-TÉCNICO E TECNOLÓGICO-TEÓRICO

O termo praxeologia vem de dois termos gregos: práxis (prática) e logos (razão). Esse termo vem da ideia de que toda prática humana em uma instituição é acompanhada de um discurso que o justifica. A praxeologia é dividida em dois blocos. O primeiro, chamado de bloco prático-técnico e formado pelos tipos de tarefas e técnicas que correspondem à prática (práxis), ao saber-fazer (savoir-faire), sendo representado por $\Pi=[T/\tau]$. O segundo bloco, chamado de bloco tecnológico-teórico é formado pelas tecnologias (θ) e as teorias (Θ) e representado por $\Lambda=[\theta/\Theta]$ e está associado ao saber (logos). Em vista disso, podemos dizer que uma praxeologia P é um conjunto formado por quatro elementos $P = [T/\tau/\theta/\Theta]$ (CHEVALLARD, 2009). No quadro 6, procuramos exemplificar o bloco prático-técnico e o bloco tecnológico.

Quadro 6 – Praxeologia: Bloco prático-técnico e bloco tecnológico.

Bloco	**Elemento**	**Rep.**	**Descrição**	**Exemplo**
Bloco prático-técnico $[T/\tau]$ Saber-fazer (práxis)	Gênero	---	Pode ser representado por um verbo de ação.	Determinar
	Tipo de tarefa	T	Agrupa um conjunto de tarefas do mesmo tipo, como atravessar uma rua, resolver uma equação do segundo grau.	Determinar a média aritmética de dados não ordenados ou de dados ordenados da população ou da amostra.
	Subtipo de tarefa	t_1	Um tipo de tarefa pode abrigar diferentes subtipos de tarefas.	Determinar a média usando uma fórmula do tipo. $M = \overline{X} = \frac{1}{N}(X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n) = \frac{1}{N}\sum(X)$
	Tarefa	t	Resolver uma atividade específica, como atravessar a Avenida Paulista.	t1 - Calcular a média aritmética de um conjunto de observações (dados não ordenados): 5; 4; 7; 6. t2 – calcular a média aritmética de um conjunto de observações de dados ordenados: 4; 5; 6; 7.
	Técnica	τ	Utilizada para resolver uma tarefa.	Somar todas as observações (independente de estarem ou não ordenadas, de ser população ou amostra, soma-se). Dividir a soma das observações pelo total de observações e obtêm-se a média
Bloco tecnológico [T/τ] Saber (logos)	Tecnologia	θ	Empregada para justificar uma técnica. Em matemática se utiliza tradicionalmente a demonstração.	Para obter uma distribuição uniforme, soma-se todos os valores e se divide ao meio. Isto também faz com que a média esteja espacialmente no centro de equilíbrio dos conjuntos dos dados.
	Teoria	Θ	Toda tecnologia precisa de uma justificativa que seria a teoria.	Esta tarefa se apoia na teoria estatística, mas precisamente em um dos seus ramos que indicam que podemos condensar ao extremo através de um número os dados. Kendall e Yule (1948, p. 27) abordam este ramo que trata da estatística como resumo e descrição.

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Outro aspecto que consideramos importante destacar é a transposição das praxeologias.

4.1.6. TRANSPOSIÇÃO DAS PRAXEOLOGIAS

Será que as atividades humanas poderiam ser regidas por praxeologias ideais? De forma a resolver todas as tarefas de uma dada instituição de forma eficiente, segura e de fácil compreensão? Chevallard (1999) responde que não e coloca a questão natural do surgimento de novos problemas e de mudanças constantes nas instituições. Ele destaca ainda para o envelhecimento das praxeologias junto com a perda de crédito dos seus componentes teóricos, ao mesmo tempo que novas tecnologias emergem colocando em suspeita as antigas práticas. Como exemplo, Chevallard destaca as mudanças na aritmética escolar que até meados do século XX mantêm sobre o nome de teoria das razões e proporções, uma praxeologia matemática para tratar de forma eficiente problemas de proporcionalidade direta e inversa. Como exemplo (CHEVALLARD, 1999, p.230, tradução nossa) temos o problema “se 8 pirulitos custam 10 francos, e se quero conhecer o preço, x francos, de 3 pirulitos, dizemos que ‘x está para 3 como 10 está para 8′, isto se traduz pela proporção representada classicamente x:3::10:8[58]”. Nesta proporção, podemos afirmar que o produto dos meios é igual ao produto dos extremos representado por $x = \frac{10 \times 3}{8} = ...$. Chevallard (1999) destaca que com a reforma da matemática moderna nos anos 70 muitos elementos teóricos e tecnológicos da matemática “clássica” passaram a ser considerados obsoletos. Chevallard esclarece que:

> a teoria das razões e proporções, não são eliminadas ao mesmo tempo das técnicas elementares que, de fato, não serão substituídas, ou não serão imediatamente substituídas, por das praxeologias mais complexas, pouco viáveis nos níveis iniciais do ensino fundamental. Assim, logo que disponível a noção de função, e mais particularmente a noção de função linear, assim como as noções usais a este respeito, podemos retomar o problema dos 3 pirulitos nestes termos: f estando linear, se f(8)=10, então $f(3) = f\left(\frac{3}{8} \times 8\right) = \frac{3}{8} \times f(8) = \frac{3}{8} \times 10 = ...$ (1999, p.230, tradução nossa)

[58] Atualmente, a moeda francesa é o euro, adotada pelos países membros da comunidade europeia. O texto original foi criado antes da conversão para o euro quando a moeda francesa era o franco.

Diante da necessidade de resolver tarefas rotineiras, muitas tarefas problemáticas aparecem sendo necessário o surgimento de novas praxeologias. Algumas vezes, existem alguns membros de uma instituição I1 que conhecem uma praxeologia de uma instituição I2 e a consideram como necessárias a um melhor funcionamento de I1. Pode-se sugerir a introdução destas praxeologias em I1. Cada instituição possui uma organização própria, desta forma uma praxeologia $\mathcal{P}_i$ de I_2 (Instituição 2) passa por um processo de transposição para se tornar uma praxeologia $\mathcal{P}_j$ de I_1. Neste processo, faz-se necessário adaptar-se, modificar-se para se adequar às condições impostas pela ecologia de I, de modo a levar a construção da praxeologia $\mathcal{P}_j \in I_1$ ($\mathcal{P}_j \neq \mathcal{P}_I$). Chevallard (1999) destaca que esta transposição não significa uma degradação, no sentido, por exemplo, de tornar inferior o bloco tecnológico teórico das organizações praxeológicas transpostas. Em uma instituição de ensino, por exemplo, essa transposição pode ser uma ocasião de melhorar, de retrabalhar, simplificar e de precisar certos elementos, por exemplo. Logo, o processo de transposição enriquece o mundo praxeológico socialmente disponível na medida em que se "cria uma nova praxeologia adaptada a estas condições institucionais inéditas" (CHEVALLARD, 1999, p. 231, tradução nossa).

Chevallard (1999, p.232, tradução nossa) destaca que uma "penúria praxeológica pode se traduzir por uma falta de técnicas. Como melhor cumprir as tarefas do tipo T?" Para resolver esta questão faz-se necessário desenvolver uma técnicaτ adequada a resolver as tarefas do tipo T, considerando T$\in\tau$. Para tal, faz-se necessário desenvolver uma praxeologia pontual [T/τ/θ/Θ]. Essa praxeologia pontual pode ser resultante de um processo de transposição de uma praxeologia existente. Destacamos que este processo pode ocorrer em uma instituição de ensino de matemática, de física ou outra disciplina. Pode ocorrer em uma instituição responsável pela produção dos saberes como, por exemplo, no desenvolvimento de novos processos industriais, alguns destes transpostos de outros países e adaptados às instituições produtoras nacionais.

No caso dos livros didáticos, a pesquisa no processo de transposição didática pode indicar algumas praxeologias mais eficientes do que outras. Isto pode levar a um autor de um livro didático adotar uma determinada praxeologia pontual usada por outro autor de livro didático. Esta transposição pode se dar em um mesmo país ou ainda entre países diferentes. Tomemos como exemplo o cálculo da média aritmética. Em Kendall e Yule (1948) podemos observar uma técnica de calcular a média (fórmula 2):

$$M = \overline{X} = \frac{1}{N}(X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n) = \frac{1}{N}\sum(X)$$

Para pequenas quantidades, a técnica indicada nesta fórmula é bastante eficiente. Contudo, se temos um número elevado de observações, estas devem estar representadas em uma tabela com os efetivos e o número dos efetivos. Neste caso, esta técnica é pouco econômica. Para este caso podemos utilizar a fórmula (RÉGNIER, 2000):

$$\bar{x} = m = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=p} n_k x_k$$

Do ponto de vista da transposição das praxeologias, podemos formular a seguinte questão: Será que esta técnica, mais econômica é apresentada nos livros didáticos? Foi aceita pelas instituições nas quais o autor do livro didático está vinculado?

Outro aspecto apresentado por Chevallard (2002b) é a codeterminação didática, que consideramos pertinente tratar.

4.1.7. CODETERMINAÇÃO DIDÁTICA

Na figura 29, apresentamos a estrutura da codeterminação didática que traduzimos de Chevallard (2002b, p.10). Cada nível "concorre para determinar a ecologia das organizações matemáticas e das organizações didáticas através do apoio que cada nível oferece e as limitações que eles impõem" (CHEVALLARD, 2002b, p.10, tradução nossa). Para tanto, faz-se necessário analisar as características de cada nível tentando observar a relação que o mesmo tem com os demais, sua importância e a forma como o mesmo é influenciado e influencia os outros níveis.

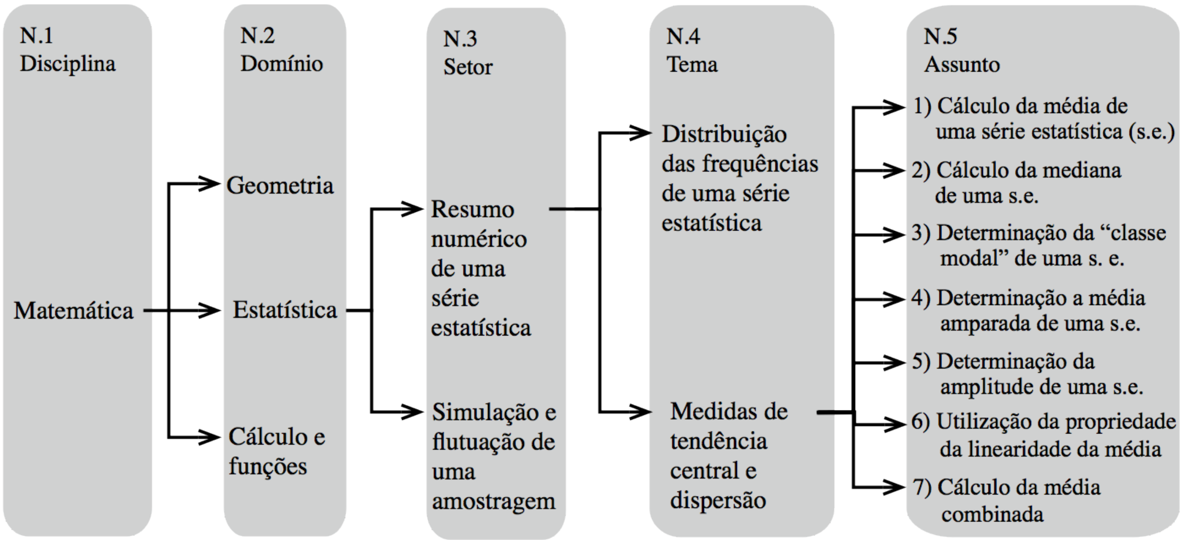
Figura 29 – Níveis de codeterminação didática

Fonte: Chevallard (2002b, p.10, tradução nossa).

Na figura 30, apresentamos um exemplo dos cinco primeiros níveis de codeterminação. Os exemplos que usamos para desenhar essa figura foram apresentados por Chevallard (2002b). Ele se apoia no programa em vigor, na época, para o seconde (primeiro ano do ensino médio geral na França) implantado no ano escolar 1999-2000. Quando estivermos tratando do programa atual na França, apresentaremos os níveis do programa atualmente em vigor.

Ao tratar de um tema de estudo, dificilmente ele se limita a uma organização pontual $[T/\tau/\theta/\Theta]$ apoiada em apenas um tipo de tarefa T. Em geral, um tema de estudo se divide em assuntos com tarefas específicas. Assim, um tema de estudo apresenta uma organização local, compostas de i tipos de tarefas T_i, cada uma pode ter uma maneira de fazer. Desta forma temos i maneiras de fazer as técnicas τ_i. Esta organização local possui características próprias das instituições de ensino a ela vinculadas. Portanto, podemos representar esta organização local por $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]_{i\in I}$ que representa a organização a que o professor pretende implantar em sala de aula. Chevallard (2002, p. 2, tradução nossa) esclarece que cabe ao aluno reconstruir estas organizações locais “com seus colegas de estudo sobre a direção do professor (ou na falta deste, por conta própria), as organizações pontuais sobre as quais o seu domínio será avaliado”. O aluno é avaliado sobre que assuntos ele consegue responder às atividades apresentadas pelo professor, ou seja, que tipo de tarefas que estão associadas a uma organização local ele vai dar conta. No exemplo apresentado na figura 30, um aluno pode resolver tipos de tarefas relativos ao assunto 1 (Cálculo da média de uma série estatística), e apresentar dificuldades na resolução de tarefas relativas ao assunto 2 (cálculo da mediana de uma série estatística).

Figura 30 – Exemplo dos níveis de codeterminação para a classe seconde (França)[59]



Fonte: desenho do autor da tese baseado no texto de Chevallard (2002b), tradução e adaptação do autor da tese.

O professor pode sentir necessidade de explorar em um nível superior, o nível do setor. Este está ligado a uma teoria, que comporta j tecnologias, cada qual que dá conta a i técnicas associadas a i tarefas. Este conjunto forma uma organização praxeológica regional $[T_{ji}/\tau_{ji}/\theta_j/\Theta]$. Por sua vez, podemos pensar em um nível superior, o domínio do estudo (estatística, geometria etc) que se apoia em k teorias Θ_k, que forma uma organização praxeológica global $[T_{jik}/\tau_{jik}/\theta_{jk}/\Theta_k]$[60]. O conjunto destes domínios está organizado em torno de uma disciplina, que no nosso estudo é a matemática.

[59] Alguns termos da figura 30 foram simplificados para adequar a figura que desenhamos. Assim, por exemplo, o item 7 no texto de Chevallard era: "calcular a media de uma série a partir da media de subgrupos" (calcul de la moyenne d'une série à partir des moyennes de sous-groupes), que correspoderia a calcular a media aritmética combinada.

[60] Como temos i tarefas, para cada tarefa eu tenho uma técnica, ou seja, o mesmo i. Uma tecnologia pode abrigar várias técnicas. Desta forma, eu tenho j tecnologias e $j \times i$ técnicas e tarefas. Uma teoria abriga várias tecnologias. Desta forma, para um número k de teorias, temos $k \times j$ tecnologias e $k \times j \times i$ técnicas e tarefas.

Chevallard (2002b) afirma que normalmente o professor se detém nos níveis de maior especificidade: os assuntos[61] e os temas. Quando ele planeja suas aulas, ele o faz em cima destes. Salvo certas situações em que o professor pode informar que a avaliação da atividade sobre a propriedade da linearidade da média está junto das notas dadas à estatística. Esta estrutura geral poderia aparecer em uma aula inaugural na qual fossem apresentados os domínios e setores e os temas e assuntos subordinados. Contudo, este autor esclarece que não faz sentido e na prática isto não acontece. Isto faz com que a estatística seja apresentada no decorrer dos estudos como um conjunto de temas e assuntos enfileirados. Isto ocorre também nos outros domínios como a geometria, o cálculo e funções. Chevallard (2002b, p.3) acrescenta que desta maneira, ao contrário do movimento de desconstrução-reconstrução das obras "[...] só se reconstrói os fragmentos de um quebra-cabeça que nunca será reconstruído no seu conjunto". Observamos, contudo que propostas atuais na área da didática da estatística (ANDRADE; RÉGNIER, 2009b) orientam para uma mudança nesta prática sugerindo para o ensino em torno de projetos.

O nível 1 é o da disciplina, ele possui certas particularidades. No caso da matemática, por exemplo, Chevallard esclarece que houve pouca evolução durante o século XX conduzindo a matemática a ser uma "um monumento que se visite, não uma obra que se reconstrói" (2002b, p. 10). A ideia de uma obra que se visite pode ser observada em uma aula em que as principais noções são apresentadas aos alunos: apresentam-se as técnicas e as tecnologias que permitem resolver certos tipos de problemas. Depois cabe ao aluno visitar esta obra e reproduzi-la na resolução de questões similares. Em uma posição contrária, temos Brousseau (1986, 1997) que propõe nas situações adidáticas, nas quais são propostas desafios no jogo didático, nas quais as obras possam ser desenvolvidas pelos alunos acompanhadas pelo trabalho do professor que tem um papel importante de regulador e na institucionalização destas. Outro aspecto da disciplina apresentado por Chevallard (2002b) são regras próprias da matemática muito fortes, como só se pode manipular na sala de aula apenas símbolos e não coisas como uma balança para comparar o volume de um cone e de um cilindro.

O nível da pedagogia possui características que devem ser observadas não apenas no ensino de matemática, mas de todas as disciplinas. Contudo, ainda dentro deste nível, podem existir restrições a algumas disciplinas que não são impostas a outras. Chevallard (2002b, p.12) esclarece que "as limitações pedagógicas tomam forma no conjunto de meios de estudo imposto e alocado a todo estudo escolar, com algumas exceções escolares que convêm

[61] No original Sujet. Este termo pode ser traduzido como sujeito, assunto, tema, objeto. Consideramos mais adequado a palavra assunto.

negociar com a autoridade "pedagógica". Para exemplificar estas limitações, tomemos um exemplo apresentado por este mesmo autor. Em uma conferência intitulada "os exercícios práticos da matemática no ensino secundário", realizada em 1904 em um museu pedagógico na França, Émile Borel (1871-1956) propôs a criação de um laboratório de matemática. Neste laboratório, deveria ter uma balança de feira, alguns recipientes e outros elementos que possibilitassem a realização durante a aula de matemática de experimentos concretos. Esta proposta foi relançada quase um século depois pela Comissão Kahanne. Trata-se nesta proposta da criação de um meio didático (o laboratório) proposto para outras disciplinas (como química, física) e pouco utilizado no nível da matemática[62] o que necessitaria de uma negociação no nível pedagógico. Para Chevallard (2002b), as coisas acontecem em cada nível de determinação como se fossem legítimos cada nível e como se atuasse quase que isolado em cada nível. Na prática isto não ocorre, ao contrário, muitas mudanças em um nível só se justificam pelos efeitos, ainda que não explícitos, em outros níveis da hierarquia didática. A proposta do laboratório de matemática tem um forte efeito sobre a matemática e nos demais níveis abaixo dessa disciplina, conduzindo a mudanças na forma como os temas e assuntos sejam apresentados pelos professores. Consideramos que propostas como estas podem não se concretizar se não houver uma aceitação dos professores que atuam nos níveis de maior especificidade (temas e assuntos).

Chevallard esclarece que o nível pedagógico funciona como um nível de fronteira entre os níveis superiores e inferiores. O nível de baixo faz pouca intervenção no nível pedagógico, cabendo por outro lado seguir as regras impostas pelos "[...] especialistas de pedagogia que propõem a lei sem se preocupar muito com os decretos de sua aplicação [...]" cabendo aos professores cuja "[...] legítima liberdade pedagógica só adquirida sobre a condição de respeitar o conjunto das obrigações pedagógicas [...]" (CHEVALLARD, 2002b, p. 13, tradução nossa). Essas limitações restringem à "liberdade" pedagógica do professor. Consideramos que se deve levar em conta também que as propostas pedagógicas que refletem, muitas vezes, estudos realizados por especialistas, educadores, professores que atuam na noosfera e têm como proposta o aperfeiçoamento do ensino. Outras vezes, contudo, existe um forte componente político motivado pela necessidade de apresentar "avanços" nos outros níveis aos eleitores.

[62] Queremos destacar, contudo, que esta ideia não é tão nova. Existem inúmeras propostas de laboratórios de matemática que não são antigas como a proposta de Émile Borel, mas também não tão novas como as propostas pela Comissão Kahane.

O nível -1 é o da escola que propõe obrigações e oferece pontos de apoios e é representado pela instituição escolar. Por lei, tem-se na França a obrigatoriedade de frequentar a escola nos períodos de aula, salvo exceções que precisam ser comprovadas sobre o risco de prisão para os pais. O período de férias escolares e dos horários a cumprir são também definidos. Este nível comporta um corpo de especialistas. Também são definidos que disciplinas devem existir. A escola tem um papel fundamental na difusão do conhecimento na sociedade, oferecendo uma economia e uma ecologia. Esse processo não tem comparação em uma sociedade sem escola. A forma de "se instruir na própria escola privilegia de maneira tão radical a fragmentação disciplinar do estudo. Esta escolha cria um mercado das disciplinas escolares onde as lutas de conquistas e reconquistas, as rivalidades [...] esmagam toda codisciplinaridade" (CHEVALLARD, 2002b, p. 13). Dessa forma, cada disciplina deve valorizar suas especificidades, aquilo que a valoriza neste mercado das disciplinas escolares. Chevallard (2002b) exemplifica esta segregação levando à matemática caminhar em um campo próprio, o da dedução, se afastando do das ciências experimentais (química, biologia, física), reinando sobre objetos "seguros".

O nível da sociedade, tal como nos outros, possui suas características próprias, suas limitações e impõe obrigações. O que deve ser tratado na escola, como deve ser tratado nas escolas, que limitações podem ser impostas (como em sociedades não democráticas que pode criar uma censura a certas posturas). Este nível pode valorizar uma formação escolar baseada na leitura das obras ou ainda na formação de competências.

4.1.8. ANÁLISE DE UM DETERMINADO TEMA EM MATEMÁTICA

Dado um tema como as medidas de tendência central e de dispersão que chamaremos de ξ, para estudar a forma como este tema é abordado na sala de aula, Chevallard (1999) esclarece que se deve estudar tanto a realidade matemática ou organização matemática (OM) como a organização didática (OD). A organização matemática diz respeito à forma como pode-se realizar o estudo do tema ξ devendo-se considerar a realidade matemática referente a este tema. Trata-se da praxeologia matemática ou organização matemática deste tema que chamaremos de OMξ. A organização didática diz respeito ao caminho que segue no estudo deste tema. Chamaremos a organização didática de ODξ. Consideramos que este estudo não trata da sala de aula, mas é direcionado aos livros didáticos e aos documentos oficiais (programas) e nos limitaremos ao estudo da organização matemática. Como a pesquisa não se encerra com a tese, mas faz parte de um percurso definido pelo pesquisador, pretenderemos estudar a organização didática.

4.1.9. ANÁLISE DE UMA ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA

Na análise da organização matemática, Chevallard (1999) propõe uma análise praxeológica apoiada nas tarefas, técnicas, tecnologias e teorias. Chevallard (1999) apresenta quatro níveis de organização matemática (OM):

- Organização matemática pontual
  - Uma praxeologia é dita pontual quando “ela é relativa a um único tipo de tarefa, T” (p.228, tradução nossa). Ela é representada por [T/τ/θ/Θ].
- Organização matemática local
  - Quando uma praxeologia é “centrada sobre uma tecnologia θ” (p.229, tradução nossa), ela é chamada de organização praxeológica local. Ela é representada por $[T_i / \tau_{ij} / \theta / \Theta]$, ou seja, uma teoria θ que justifica j tecnologias que por sua vez possibilita a resolução de i tarefas.
- Organização matemática regional
  - Quando temos uma organização praxeológica que se “forma em torno de uma teoria Θ” (p.229, tradução nossa) ela é chamada de organização praxeológica regional. Ela é representada por [Tij/τij/θj/Θ], em que temos j tecnologias.
  - Uma organização praxeológica formada “pela agregação de várias organizações regionais correspondentes a várias teorias Θ_k” (p.229, tradução nossa) é chamada de organização global. Ela é representada por $[T_i / \tau_{ij} / \theta_j / \Theta_k]$, onde k corresponde ao número de organizações regionais.

Na passagem de uma organização pontual (centrada em um tipo de tarefa) para uma organização local (centrada em uma tecnologia) coloca-se em evidência a tecnologia que vai justificar as técnicas utilizadas para resolver os diferentes tipos de tarefas desta organização local.

Na mudança de uma organização local (centrada em uma tecnologia) para uma organização regional (centrada em uma teoria), põe-se em destaque a teoria que vai justificar as diferentes tecnologias utilizadas.

Chevallard (1999) esclarece que um tema de estudo em matemática pode corresponder a diferentes organizações praxeológicas. Um tema de estudo como o Teorema de Tales é geralmente associado a uma tecnologia θ. Neste caso, este tema permite produzir e justificar técnicas relativas a diversos tipos de tarefas. Por outro lado, um tema de estudo como resolução de equações se exprime mais frequentemente relacionado a um tipo de tarefa. Esta pesquisa centra-se sobre o tema de estudo medidas de tendência central e de dispersão. E a nossa análise nos livros didáticos é voltada para análise das organizações pontuais centradas em torno desta, como, por exemplo, na determinação do desvio padrão.

Na parte dois desta tese, apresentada no volume 2, apresentaremos na metodologia um levantamento das organizações praxeológicas pontuais sobre as medidas de tendência central e de dispersão que utilizamos na análise dos livros didáticos e programas. Também utilizaremos o conceito de instituição, os níveis de codeterminação e outros elementos apresentados neste capítulo na análise dos livros didáticos e programas.

No próximo capítulo, trataremos de outra teoria que utilizamos para embasar a metodologia de investigação proposta, as nossas análises e conclusões. Trata-se da teoria dos campos conceituais (VERGNAUD, 1996).

5. A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS E OS CONCEITOS DAS MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL E DE DISPERSÃO NOS LIVROS DIDÁTICOS

Ao tratar da forma como se aborda nos livros didáticos as medidas de tendência central e de dispersão (MTCD), consideramos a importância de uma apresentação que não se limite à memorização de fórmulas, definições e teoremas, mas que possibilite o desenvolvimento do conceito das MTDC. Para tratar do ensino de um conceito, tomamos como referência a teoria dos campos conceituais.

A noção de campo conceitual foi desenvolvida por Gérard Vergnaud (1996) e é referendada por muitos estudiosos da Educação Matemática. Essa teoria se desenvolve no ensino da matemática, no estudo das estruturas das operações que envolvem adição, subtração (chamadas de estruturas aditivas) e operações de multiplicação e divisão (estruturas multiplicativas). Ela embora pensada no âmbito da matemática, pode ser aplicada em outras áreas do conhecimento. Falar em campo conceitual implica dizer que um conceito não pode ser compreendido isoladamente. Todo conceito existe fazendo parte de uma trama, de uma rede, de uma tessitura, de um conjunto de conceitos que dão suporte à compreensão do conceito que se deseja estudar. As medidas de tendência central e de dispersão são compostas por vários conceitos, tais como: o conceito de média aritmética, de moda, de desvio, de desvio padrão etc. Ao tratar do ensino das medidas de tendência central e de dispersão (MTCD) que conceitos são necessários para a compreensão dos conceitos que envolvem as MTCD? Além dos conceitos que fazem parte destas medidas, temos também outros conceitos da estatística ou ainda da matemática que são necessários para a compreensão destes conceitos, como é o conceito de adição e multiplicação. Para exemplificar a relação e a importância das estruturas aditivas e multiplicativas na compreensão dos conceitos de MTCD, apresentamos uma breve introdução através de duas propriedades.

Estruturas aditivas e multiplicativas

Ao resolver uma questão qualquer que envolva medidas de tendência central ou dispersão, utilizaremos operações como somar, dividir, em alguns casos multiplicar e subtrair. Também poderemos empregar propriedades das estruturas aditivas e multiplicativas.

Tomemos como exemplo, uma maneira de calcular a média aritmética representada pela fórmula:

$$m = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K=p} n_K x_k$$

Outro modo de representar esta fórmula é:

$$m = \frac{1}{n}[(n_1x_1) + (n_2x_2) + \cdots (n_px_p)]$$

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição teremos:

$$m = \frac{1}{n}(n_1x_1) + \frac{1}{n}(n_2x_2) + \cdots + \frac{1}{n}(n_px_p)$$

Podemos assim representar pela fórmula:

$$m = \sum_{k=1}^{k=p} \frac{1}{n}(n_kx_k)$$

Aplicando a propriedade associativa em relação à multiplicação, podemos também apresentar de outra maneira a fórmula:

$$m = \frac{1}{n}(n_1x_1) + \frac{1}{n}(n_2x_2) + \cdots + \frac{1}{n}(n_kx_k) = \left(\frac{n_1}{n}\right)x_1 + \left(\frac{n_2}{n}\right)x_2 + \cdots + \left(\frac{n_p}{n}\right)x_p$$

Assim podemos indicar em outra ordem os procedimentos de cálculo, o que não altera os resultados:

$$m = \sum_{k=1}^{k=p} \left(\frac{n_k}{n}\right)x_k$$

Observamos nestes dois exemplos o emprego correto das propriedades associativas e distributivas. Contudo Batanero[63] (2000, p.7, tradução nossa) destaca uma pesquisa na qual "Mevarech (1983) observa que inclusive os estudantes universitários pensam que a média tem a propriedade associativa e quando eles têm que achar a média de um conjunto grande de números, o dividem em partes achando primeiro a média de cada parte e depois repartindo o resultado obtido". Batanero esclarece que para se comprovar que esta propriedade não é correta, pode-se pegar três números diferentes. Calcula-se a média dos dois primeiros e depois calcula-se a média do resultado com o terceiro número.

Para tratar do que foi exposto, primeiro consideramos pertinente exemplificar a propriedade associativa da adição:

[63] Não tivemos acesso à publicação original, contudo as informações indicadas atendem ao nosso objetivo que se limita a discutir o aspecto destacado pela autora que tem a ver com a importância das operações ligadas ao cálculo da média.

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\right)+\frac{d}{b}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{b}+\frac{d}{b}\right)$$

Ou da multiplicação:

$$a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$$

Para exemplificar o que foi apresentado por Batanero, consideramos o procedimento para obter a média de 4, 6 e 11:

$$m=\frac{4+6+11}{3}=7$$

Ao dividirmos em partes temos um resultado inadequado:

$m=\frac{4+6}{2}=5$ e em seguida $m=\frac{5+11}{2}=8$

Dessa forma, não podemos jamais considerar esta igualdade, mas sim como segue:

$$\frac{a+b+c}{3}\neq\frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)+c}{2}$$

O que podemos fazer usando de forma adequada as operações de divisão e soma é

$$\frac{a+b+c}{3}=\frac{a+b}{3}+\frac{c}{3}$$

Pois se temos o mesmo denominador, podemos somar os numeradores. Podemos ainda aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição:

$$\frac{1}{3}\ (a+b+c)=\frac{1}{3}(a+b)+\frac{1}{3}c=\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c$$

É muito comum, no cálculo mental, o uso da propriedade associativa da multiplicação, assim no lugar de calcular 4 x 80, se calcula (4 x 8) x 10. Temos a ideia de dividir em partes para simplificar o cálculo, mas o procedimento citado por Batanero não é falho porque os alunos utilizam a propriedade associativa para calcular a média. Ele é falho porque os alunos utilizaram inadequadamente esta propriedade, realizando operações que não têm base matemática. O procedimento citado, utilizado pelos aprendizes, não se apoia nas propriedades relacionadas às estruturas multiplicativas ou aditivas. Assim, este procedimento usado pelos alunos, citados na pesquisa, é inadequado e resultante de uma deficiência em um conhecimento (ligados ao campo conceitual das estruturas aditivas e multiplicativas) que por sua vez faz parte dos campos conceituais das medidas de tendência central e de dispersão.

Além das estruturas aditivas e multiplicativas, existem outros conceitos também importantes como os que tratamos na introdução do capítulo das MTDC, que listamos abaixo:

- Frequência e efetivos;
- Variável e classe;

- Intervalo;
- Diagrama de coluna e do histograma;
- Unidades de medidas
- Somatório;

Além destes conceitos, existem outros ligados às MTCD. Na nossa pesquisa investigaremos que conceitos os programas e os livros didáticos colocam em estreita conexão com as MTCD.

Na educação escolar, temos de um lado a necessidade de ensinar conceitos de natureza científica a um aluno que vem para escola com uma experiência do seu cotidiano, no sentido de Vygotski (1985). Por outro lado, se faz necessário interligar estes conhecimentos com outros conhecimentos ligados ao mundo do trabalho, a outras disciplinas ensinadas na escola e a responder questões que podem estar relacionadas a suas próprias necessidades diárias, como por exemplo: Qual a probabilidade de pegar uma doença sexualmente transmissível através do sexo sem camisinha? Qual a média salarial dos moradores do meu bairro? Qual a moda da altura dos alunos do primeiro ano do ensino médio? Assim a estatística abre um leque de possibilidades na educação escolar como:

- Responder a problemas do cotidiano através de questões de pesquisas que devem ser adequadamente orientadas pelo professor, de modo a proporcionar desenvolvimento do espírito científico;
- Utilização no mundo profissional;
- Natureza interdisciplinar que pode ser usada para responder a questões de outras disciplinas, como por exemplo: biologia, história, geografia[64].

Ao tratar das MTDC, o livro didático limita-se a uma apresentação dos procedimentos de cálculo destes? Caso contrário, ele faz uma abordagem que procura relacionar a sua aplicação em determinados contextos? Caso afirmativo, em que contextos? Esta questão será investigada nos livros didáticos. Na medida em que o livro explora as MTDC em diferentes contextos, ele torna mais rico o seu aprendizado e o desenvolvimento deste conceito pelo aluno. Este aspecto é destacado por Pais (2001) ao tratar da teoria dos campos conceituais. Ele destaca o papel para aprendizagem escolar das situações vividas na escola e o papel dos conhecimentos anteriores dos alunos nas novas adaptações que são feitas a cada nova situação proposta na escola.

---

[64] Em sua tese de doutorado, Coutanson (2010) faz uma investigação das características da estatística nos livros didáticos da escola primária na França. Neste estudo, ele faz um levantamento das questões presentes nos livros que envolvem outras disciplinas.

Acioly-Régnier e Monin (2009) destacam a noção de Campo Conceitual “como um espaço de problemas ou de situações-problema cujo tratamento implica conceitos e procedimentos de vários tipos em estreita conexão”. Muitas das situações propostas na escola para o ensino de um conceito são trazidas pelos livros didáticos, através de questões de natureza teórica e prática que são elaboradas para serem utilizadas pelos professores e alunos em situações na sala de aula e fora dela.

Ao tratar da teoria dos campos conceituais, Vergnaud (1990, p.135, tradução nossa) esclarece que: “Um conceito não pode ser reduzido à sua definição, ao menos quando nosso interesse é à sua aprendizagem e o seu ensino. É através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire seu senso para a criança”. Ao tratar das MTCD, que tipo de problemas ou questões são propostas pelos livros didáticos? Quais os contextos em que estas questões aparecem?

Para Vergnaud (1990, p.145, tradução nossa) um conceito é formado por três elementos que estão interligados:

- S: “um conjunto de situações que dão sentido ao conceito (a referência)”;
- I: “um conjunto de invariantes sobre os quais repousa a operacionalidade dos esquemas (o significado)”;
- S: “um conjunto de formas verbais e não verbais que permite representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (o significante)”.

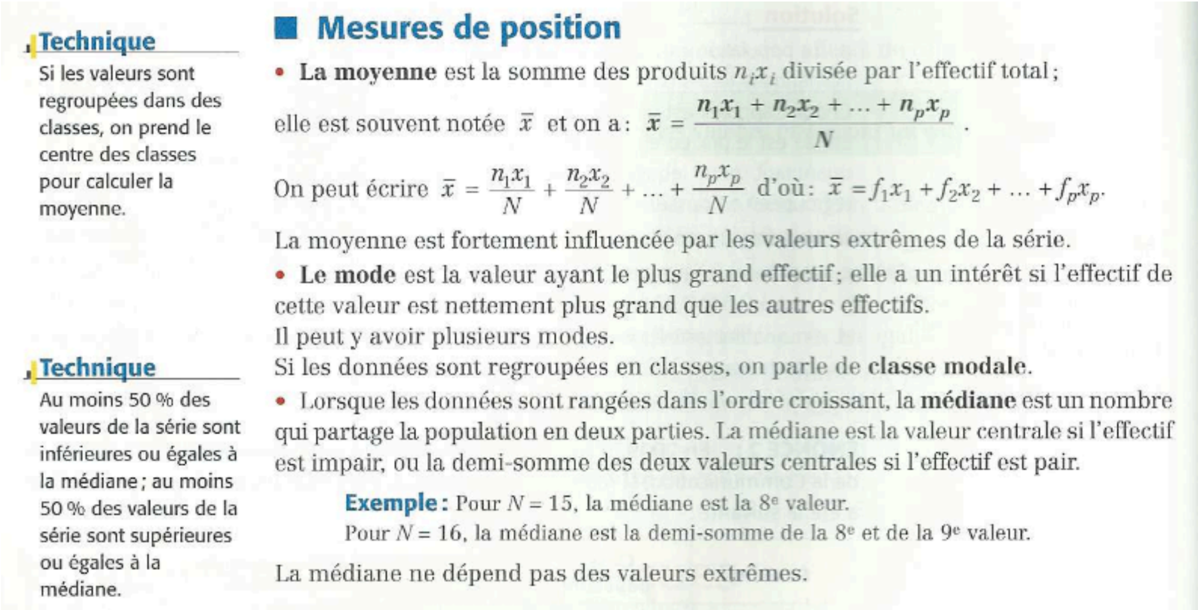
Estes três elementos não podem ser tomados isolados, mas em conjunto. Eles dependem do sujeito. Assim, o significado dado às situações, bem como as representações associadas a estas, depende do sujeito. A escola, contudo, pode criar situações diversificadas de modo a ampliar o nível de conceptualização dos alunos.

Vergnaud (1990, p. 150, tradução nossa) esclarece que o significado dado às situações é o que é o habitual dos psicólogos, “os processos cognitivos e as respostas do sujeito são funções das situações aos quais ele se confronta”. Nesse sentido, este autor destaca dois pontos centrais: a variedade e a história. Um campo conceitual é formado por uma grande variedade de situações que geram de forma sistemática as classes possíveis. Os conhecimentos dos alunos se desenvolvem através das situações em que ele se depara, sobretudo, às primeiras situações suscetíveis de dar sentido aos conceitos e aos procedimentos que vão ser ensinados.

Ao analisar o livro didático, estamos considerando que a nossa análise possui limitantes de não prever o livro didático nas situações de uso, que podem ser na sala de aula, na forma como o professor se apropria deste. Contudo, podemos pensar em uma estrutura de uso do livro que durante esse processo, se apresenta como elemento de construção do conceito em diversas situações: situações de leitura pelo aluno de uma descrição das propriedades do conceito no livro, situações de leitura pelo aluno de um problema resolvido no livro, situações nas quais o aluno resolve questões propostas pelo livro, situações nas quais o professor resolve no quadro problemas apresentados no livro, etc. Como o livro apresenta o conceito estudado? Na figura 31, temos um trecho extraído de um livro do primeiro ano do ensino médio na França em que ele apresenta a média aritmética. Podemos observar que neste livro, temos a apresentação de uma propriedade "a média é influenciada por valores extremos", sem, contudo aprofundar. Temos também uma descrição da média como algoritmo "a média é a soma dos produtos n_1x_1 dividido pelo efetivo total" e apresentação de três fórmulas para a média. Esta apresentação é bastante limitada e vem a reforçar o que afirma Marques, Guimarães e Gitirana (2011, p. 727) "O conceito de média, como diversos outros conceitos da Matemática e da Estatística, são abordados com foco em seu procedimento, em vez de valorizar o entendimento de seus significados e propriedades importantes para o conceito".

Podemos observar que este tipo de apresentação (na figura 31) privilegia a relação bipolar significante-significado dos três polos propostos por Vergnaud para a conceptualização do real. Essa maneira de conceber a conceptualização deixa de lado as relações importantes entre o conjunto de situações que dão sentido ao conceito e ao significado (ACIOLY-RÉGNIER, 2011; FRADE, ACIOLY-RÉGNIER, JUN, 2013).

Figura 31 – Apresentação da média em um livro do primeiro ano do ensino médio na França (seconde) – Fr_C1 (p. 134).



Technique

Si les valeurs sont regroupées dans des classes, on prend le centre des classes pour calculer la moyenne.

Technique

Au moins 50 % des valeurs de la série sont inférieures ou égales à la médiane ; au moins 50 % des valeurs de la série sont supérieures ou égales à la médiane.

Mesures de position

• **La moyenne** est la somme des produits $n_i x_i$ divisée par l'effectif total ;

elle est souvent notée $\bar{x}$ et on a : $\bar{x} = \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_px_p}{N}$.

On peut écrire $\bar{x} = \dfrac{n_1x_1}{N} + \dfrac{n_2x_2}{N} + \ldots + \dfrac{n_px_p}{N}$ d'où : $\bar{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_px_p$.

La moyenne est fortement influencée par les valeurs extrêmes de la série.

• **Le mode** est la valeur ayant le plus grand effectif ; elle a un intérêt si l'effectif de cette valeur est nettement plus grand que les autres effectifs.

Il peut y avoir plusieurs modes.

Si les données sont regroupées en classes, on parle de **classe modale**.

• Lorsque les données sont rangées dans l'ordre croissant, la **médiane** est un nombre qui partage la population en deux parties. La médiane est la valeur centrale si l'effectif est impair, ou la demi-somme des deux valeurs centrales si l'effectif est pair.

Exemple : Pour $N = 15$, la médiane est la 8e valeur.
Pour $N = 16$, la médiane est la demi-somme de la 8e et de la 9e valeur.

La médiane ne dépend pas des valeurs extrêmes.

Fonte: Gauthier, Poncy (2009a, p. 134)

Podemos observar também no exemplo da figura 31 o uso prioritário de conhecimentos predicativos em detrimento de conhecimentos operatórios no sentido de Vergnaud (SAMURÇAY; VERGNAUD, 2012). Estes pesquisadores destacam que a forma predicativa é a melhor conhecida e identificada pelos professores. Esta pode ser observada em diversos elementos como (p.56, tradução nossa) "nos textos dos livros didáticos, os teoremas matemáticos, as leis da física ou da química, os capítulos do livro de história e as descrições e explicações do livro de geografia", na fala do professor. Neste tipo de conhecimento são dados aos objetos do pensamento, propriedades e relações com outros objetos do pensamento. Às vezes, o conhecimento predicativo pode ser visto através de símbolos afastando-se da linguagem natural, como em um quadro com os horários de uma estação de trem, uma fórmula de cálculo usada em Física (SAMURÇAY; VERGNAUD, 2012). Apesar disso, eles tratam de conteúdos do conhecimento e procuram comunicá-los, ainda que os mesmos não sejam facilmente compreendidos pelos estudantes. Assim, como destaca Samurçay e Vergnaud (2012, p. 56, tradução nossa) eles são assim "instrumentos culturais, que cristalizam os conhecimentos e práticas sociais e que demandam serem apropriados pelos aprendizes".

Por outro lado, a forma operatória de conhecimento é a que possibilita agir e ter sucesso nesta ação. Ele não é necessariamente explícito, nem facilmente formulável. Muitas vezes ele é implícito e às vezes inconsciente, uma vez que "sua função é possibilitar fazer e concluir, não de comunicar e de explicar" (SAMURÇAY; VERGNAUD, 2012, tradução nossa). Esta forma como estes autores apresentam estes dois tipos de conhecimentos deixam bem clara a diferença entre eles. No livro didático podemos observar o conhecimento predicativo como em uma aula do professor. Este conhecimento aparece nos textos que tratam sobre o assunto. Também podemos observá-lo em uma questão proposta para o aluno resolver. Na medida em que o aluno tenta resolver esta questão, temos o uso do conhecimento operatório. Esta forma, no nosso entendimento, se diferencia da solução do problema apresentado no livro. Uma vez que na solução, o autor tem como objetivo comunicar o conhecimento através da solução do problema. Tomemos como exemplo a questão e a solução proposta na figura 32. Nesta questão temos no enunciado 2, os dados referentes aos salários mensais dos empregados de uma pequena empresa. Solicita-se, entre outras coisas, o cálculo da moda, da média e da mediana. Para obter a moda, o autor não apresenta o procedimento, contudo na solução do item a, temos uma tabela onde pode-se observar o valor do efetivo por salário. Ao mesmo tempo, na página anterior, temos a informação de que a moda é o valor com maior efetivo. Assim bastaria o aluno olhar na tabela o salário com maior efetivo. Dessa forma, o resultado serve para o aluno confirmar se entendeu o que é moda. Para o cálculo da média, temos a indicação de como calculá-la. Temos na solução o emprego da fórmula já apresentada com a indicação de como deve ser feito o cálculo. No cálculo da mediana temos também a indicação do método que deve ser usado para obter a mediana. Dessa forma, consideramos o enunciado, assim como, a sua solução como um conhecimento predicativo.

Figura 32 – Apresentação de um enunciado com a sua solução em um livro do primeiro ano do ensino médio na França (seconde) – Fr_C1.1[A].

ÉNONCÉ 2 : Voici la répartition des salaires mensuels en euros des employés d'une petite entreprise : 1 650 ; 1 650 ; 1 200 ; 2 100 ; 3 500 ; 1 650 ; 1 200 ; 2 100 ; 2 400 ; 2 100 ; 1 650 ; 2 100 ; 1 650 ; 2 400 ; 2 100 ; 1 650 ; 2 400 ; 2 400 ; 3 500 ; 1 650 ; 1 200.

a. Construire un tableau donnant les salaires, les effectifs et les effectifs cumulés.

b. Déterminer le mode de cette série et le salaire moyen d'un employé.

c. Déterminer la médiane de cette série. Quelle est la signification de ce nombre ?

d. Déterminer le premier quartile de cette série, puis l'interpréter.

Solution

a. Avec ces données on construit le tableau :

Salaires	1 200	1 650	2 100	2 400	3 500
Effectifs	3	7	5	4	2
Effectifs cumulés	3	10	15	19	21

b. Le mode est 1 650.
L'effectif total est 21, et :

$$\frac{1200 \times 3 + 1650 \times 7 + 2100 \times 5 + 2400 \times 4 + 3500 \times 2}{21} \approx 2011{,}9.$$

Le salaire moyen est donc environ égal à 2 011,90 euros.

MÉTHODE

Pour déterminer la médiane, ranger les données dans l'ordre croissant puis utiliser les effectifs cumulés croissants.

c. N est impair donc la médiane est la valeur centrale, c'est-à-dire ici la 11[e] valeur ; la médiane est donc 2 100. Il y a au moins 50 % des employés pour lesquels le salaire mensuel est inférieur ou égal à 2 100 euros.

d. $\frac{N}{4} = 5{,}25$, donc le premier quartile est la 6[e] valeur ; le tableau des effectifs cumulés croissants montre que la 6[e] valeur est égale à 1 650 euros : $Q_1 = 1\,650$. Il y a au moins 25 % des employés pour lesquels le salaire mensuel est inférieur ou égal à 1 650 euros.

Fonte: Gauthier, Poncy (2009a, p. 135)

No livro didático, temos trechos que tratam de descrever o tema estudado, como por exemplo "o que é média?", usos, aplicações, etc. Temos também questões resolvidas, exercícios propostos. Todos estes elementos podem ser utilizados pelo professor e pelo aluno (na sala de aula e fora dela, mas sempre em situações escolares) para o estudo das MTCD.

Um elemento destacado por Vergnaud (1990) é o esquema. Ele distingue duas classes de situações nas quais podemos nos deparar. Na primeira, o sujeito dispõe no momento do desenvolvimento dessa situação, das competências necessárias ao desenvolvimento desta. No segundo caso, ele não dispõe de imediato de todas as competências necessárias ao desenvolvimento dela. Neste caso, é necessário um tempo no qual ocorrem hesitações, reflexões e exploração, tentativas abortadas. Isto pode conduzir no final ao sucesso ou eventualmente ao fracasso. A forma de utilizar o esquema não é a mesma para os dois casos. No primeiro caso temos para uma mesma classe de situações uma conduta automatizada, que se utiliza um esquema único. No segundo caso, temos diversos esquemas que são desenvolvidos e entram em competência. Os esquemas devem ser acomodados, descombinados e recombinados com o objetivo de se chegar à solução. Neste processo, temos as descobertas. Assim em função das situações temos maneiras diferentes de se explorar os esquemas. Vergnaud (1996, p. 158) esclarece que "os esquemas são objetos do mesmo tipo lógico dos algoritmos: falta-lhes eventualmente a efetividade, isto é, a propriedade de chegar-se ao fim com segurança num número finito de passos". Vergnaud (1990). Assim situações diferentes podem ampliar os esquemas dos alunos. Ao mesmo tempo um número de situações repetitivas e reduzidas podem não contribuir para ampliação dos esquemas dos alunos. Assim, ao analisar os livros didáticos, procuraremos observar a variedade de técnicas, de propriedades, de ferramentas apresentadas nas situações propostas pelo livro. Situações que vão desde a leitura de um texto a apresentação de atividades a serem resolvidas. A ordem de apresentação das atividades também é importante. O livro procura apresentar um texto, depois exemplos resolvidos e propostos. Ou ele procura apresentar atividades iniciais nos quais os alunos tentaram mobilizar os seus antigos esquemas procurando a solução do mesmo. Refletindo sobre que esquemas podem ser mobilizados para solução das atividades.

Consideramos que a forma como as MTCD são apresentadas nos livros didáticos, os problemas propostos nestes para os alunos, podem estimular a reflexão do aprendiz sobre o conceito. Os LD podem apresentar problemas que envolvem maneiras diferentes de aplicação deste conceito, assim como, pode também ser limitada há alguns usos. Logo, consideramos que a forma como os problemas são apresentados nos livros didáticos podem contribuir para ampliar estes conceitos ou ainda apresentá-los de uma forma mais limitada. Tomando como exemplo a média aritmética, podemos ter uma apresentação limitada deste conceito no livro ao algoritmo mais comum: somar todos os termos e dividir pelo total de elementos. Quando restrita a isto, temos uma abordagem limitante do conceito. Por outro lado, podemos ter situações propostas no livro que podem levar ao aluno a perceber a média como ponto de equilíbrio (propriedade 3, nesta tese), como o valor que minimiza o quadrado dos desvios (propriedade 6). Assim é através das tarefas propostas nos livros que podemos criar situações, tendo em vista a ampliação do conceito de média.

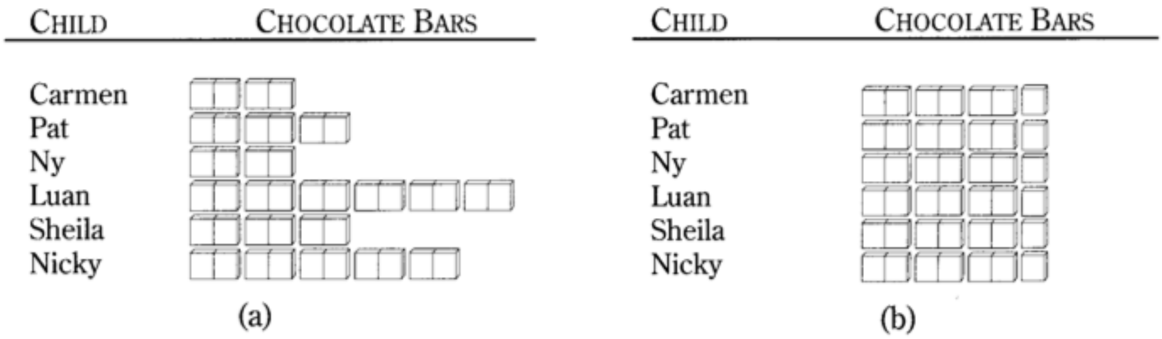
Apresentamos nesta tese duas propriedades da média:

- Propriedade 3: a média como ponto de equilíbrio;
- Propriedade 6: A média como conceito nivelador: representa o valor representativo de todas as observações levadas em consideração para o cálculo da média, se elas forem niveladas.

Para discutir estas duas formas de explorar o conceito de média, Uccellini (1996) apresenta uma descrição interessante. Inicialmente ele coloca que se perguntarmos a um aluno dos Estados Unidos no middle school (equivalente aos três últimos anos do ensino fundamental) o que representa a média de 2, 8, 4, 6 , 3 e 5, eles provavelmente dirão 5. Contudo, se questionarmos a estes mesmos estudantes o que representa 5 em relação a estes 6 números dados, eles normalmente se reportarão ao algoritmo do que a uma destas duas formas de abordar o conceito de média.

Um questionamento inicial que se pode fazer sobre a média como conceito nivelador, é como explorar este conceito se tivermos como resultado um número não inteiro. Uccellini (1996, p. 114, tradução nossa) apresenta um exemplo com barras de chocolate: "seis crianças contaram o número de barras de chocolates que ganharam na feira da escola. Elas ganharam 2, 3, 3, 6, 3 e 5 barras, respectivamente. Qual é a média de barras de chocolate que elas ganharam?". A solução seria 3 ½. Usando para representar cada barra 2 cubos com uma união, os estudantes determinariam um meio para obter uma distribuição uniforme quebrando as três barras que sobraram ao meio e redistribuindo-as. Na letra a da figura 33, temos a situação inicial e na letra b a situação final com a distribuição uniforme.

Figura 33 – Distribuição uniforme das barras de chocolate para determinar a média.

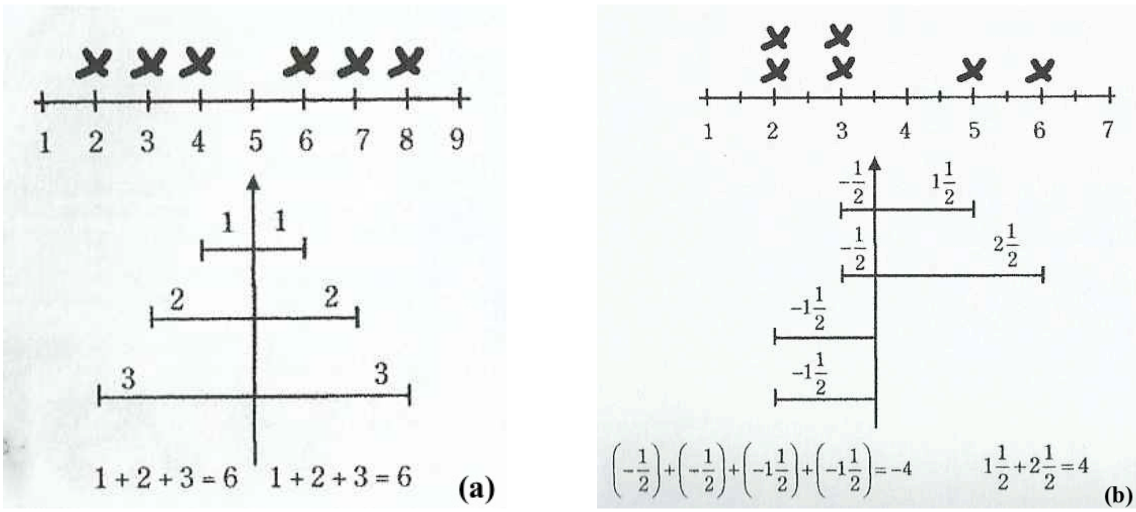


Fonte: Uccellini (1996, p.114)

Contudo, um problema que pode surgir é quando não se trata de objetos que podem ser fisicamente quebrados, como as pessoas. Uccellini (1996, p. 114, tradução nossa) propõe então a questão: "Perguntou-se a seis crianças qual o número de irmãos e irmãs eles tinham, e em seguida foram coletados os seguintes dados das crianças: 2, 1, 0, 3, 6, 1. Qual é o número médio de irmãos e irmãs destas crianças?". Este autor propõe conduzir os estudantes a discutir as diferenças entre os dois problemas. No primeiro caso, objetos que podiam ser fisicamente divididos e no segundo caso os que não. Espera-se que eles percebam que 2 1/6 é a solução, mesmo que não se possa fisicamente dividir os irmãos. Esta forma de apresentar poderia levar a uma melhor compreensão da quinta questão apresentada por Cazorla (2002) em uma pesquisa realizada com alunos de graduação. Essa questão já foi tratada nessa tese anteriormente (ao tratar das pesquisas sobre as MTCD) e gerou um número de erros muito elevados e respostas que revelavam uma total falta de compreensão de que a média de variáveis discretas pode ser um número não inteiro.

Uccellini (1996) apresenta também uma forma de desenvolver o conceito de média como ponto de equilíbrio. Considerando uma linha graduada horizontal onde se marcaria através de x o valor das observações (figura 34) pelo valor da média, traça-se uma linha vertical. A soma dos valores à esquerda e à direita da média possuem a mesma medida. Na figura 34a, apresentamos a média de 2, 3, 4, 6, 7 e 8 que corresponde a 5. Na figura 34b, apresentamos a média do exemplo da barra de chocolate determinada em função dos valores 2, 3, 2, 6, 3 e 5. Além de explorar a propriedade da média como ponto de equilíbrio (propriedade 3), nesta questão pode-se explorar a propriedade 4 (a média como o valor que está mais próximo de todos os valores).

Figura 34 – A média como ponto de equilíbrio.



Fonte: Uccellini (1996, p.115)

Este dois exemplos indicam soluções no ensino da média que poderiam auxiliar na resolução de problemas detectados por pesquisadores sobre a aprendizagem da média, como exemplificamos através da pesquisa de Cazorla (2002) com alunos universitários e como foi observado por Uccellini (1996) em estudantes da educação básica nos Estados Unidos. Como os livros didáticos exploram o ensino do conceito de média? Eles procuram apresentar um ensino baseado no desenvolvimento do conceito ou não? Caso contrário, poderíamos chegar a conclusão de que os alunos apresentam deficiências na aprendizagem destes conceitos, em parte, porque os livros apresentam-nos de forma limitada. O que seria um obstáculo de origem didática trazida pelo livro didático.

Ao apresentar uma questão, o livro didático pode enfatizar mais o procedimento de resolução do problema, se o aluno emprega corretamente a técnica, se obtêm a média aritmética, se ele aprendeu o que é média. Assim teríamos uma questão do tipo: calcule a média, o aluno deveria para resolver este problema, utilizar as técnicas adequadas que se apoiam por sua vez em tecnologias e estas em teorias (se adotarmos os termos da TAD, já explicitados). Então se o aluno desenvolveu corretamente a questão e ele obteve a média ele está indo bem. Se pensarmos do ponto de vista do conceito, teríamos que observar as situações que dão sentido ao conceito. Neste exemplo, desenvolvido por Uccellini (1996), as questões propostas estão em uma situação que visa a construção do conceito de média tendo em vistas algumas propriedades. Pensa-se também em como levar o aluno a superar certos obstáculos à aprendizagem, como perceber que pessoas (em função dos procedimentos de cálculo) podem ser representadas por números não inteiros. Dificuldade esta apresentada por alunos da graduação na Bahia (CAZORLA, 2002).

Destacamos, contudo, que não depende apenas do livro, ou ainda das situações propostas pelo professor, mas também da forma como cada aluno vai interiorizar estas situações. Do significado atribuído pelo aluno ao conceito. Apesar disso, consideramos que podemos, ainda que com estas limitações, analisar as tarefas propostas pelo livro e a forma como elas podem vir a contribuir com a ampliação do conceito das MTCD. A forma como elas podem aproximar o significado dado ao conceito pelo aluno, do significado aceito pelos estatísticos.

São nas situações que os alunos desenvolvem o conceito. Elas também servem para ampliar o conjunto de signos verbais e não verbais associados ao conceito. Ao tratar das medidas de tendência central e de dispersão, observamos diferentes formas de representar este conceito. O significante “efetivo” usado por Régnier (2007), Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) tem o mesmo significado de frequência absoluta para Dodge (2007a). Assim significantes diferentes para o mesmo significado usado por autores diferentes. Já os significantes “frequência relativa” e “frequência absoluta” têm significados diferentes para Dodge. Apesar disso, em alguns trechos do seu livro, este autor apresenta o termo “frequência” sem fazer a distinção de que tipo de frequência ele está tratando. O que leva, nestes casos, a dúvidas do leitor sobre o significado atribuído pelo autor ao significante. Assim, consideramos relevante observar os significantes utilizados pelos autores nos livros didáticos e investigar se eles mudam de país para país (Brasil e França), de autor para autor e se existem significados diferentes para o mesmo significante, o que poderia gerar problemas na aprendizagem. Consideramos que possíveis divergências podem criar barreiras para o desenvolvimento desse conceito pelos alunos.

As questões aqui discutidas serão retomadas na segunda parte desta tese, na criação das categorias de análise, quando faremos uma relação entre os pontos destacados na teoria dos campos conceituais, já abordadas neste capítulo, e uma proposta de análise dos livros e programas apoiada nesta teoria.

No próximo capítulo, trataremos do ensino médio no Brasil e na França abordando os programas e os livros didáticos. Essa apresentação servirá para indicarmos as delimitações e justificativas das escolhas utilizadas na amostra definida nesta pesquisa. Trataremos de quais documentos oficiais no Brasil e na França abordam o ensino, dando ênfase ao ensino das medidas de tendência central e de dispersão.

6. O ENSINO MÉDIO NO BRASIL E NA FRANÇA

Para tratar do ensino médio, apresentaremos inicialmente uma breve introdução à educação básica e focaremos em seguida o ensino médio. Esta apresentação, ainda que sintética, visa introduzir alguns características gerais da educação nestes dois países, para em seguida destacar os elementos que foram selecionados para análise. Depois nos deteremos no programa francês e nos documentos oficiais do Brasil que delineiam alguns aspectos da forma como as medidas de tendência central e de dispersão deverão ser apresentadas no ensino médio no Brasil e na França.

6.1. A EDUCAÇÃO BÁSICA NO BRASIL

No Brasil alguns documentos oficiais tomam forma de lei e outros como orientações. Ao tratarmos da Educação Básica tomaremos como referências os documentos:

- A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB);
- O Plano Nacional da Educação (PNE);
- Os Parâmetros Curriculares Nacionais+Ensino Médio (PCN+EM)
- As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM)

O termo Educação Básica aparece na LDB e designa a educação no Brasil que vai da educação infantil ao ensino médio. Utilizaremos o mesmo termo para designar o equivalente na França. O artigo 23 da LDB (BRASIL, 2010, p.20) esclarece que a educação básica:

> [...] poderá organizar-se em séries anuais, períodos semestrais, ciclos, alternância regular de períodos de estudos, grupos não seriados, com base na idade, na competência e em outros critérios, ou por forma diversa de organização, sempre que o interesse do processo de aprendizagem assim o recomendar.

Dessa forma, não existe um critério único de divisão. Podendo, por exemplo, o ensino fundamental ser organizado em ciclo ou apenas em séries anuais.

6.1.1. LEI DE DIRETRIZES E BASES DA EDUCAÇÃO NACIONAL (LEI Nº 9.394, DE 20 DE DEZEMBRO DE 1996)

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) foi criada em 20 de dezembro de 1996 sofrendo ajustes ao longo do tempo. O parágrafo 2º do art. 4º sofreu mudanças na redação pela lei n. 12061 de 2009. Nele, o ensino médio que teria progressiva gratuidade, passar a ser universal e gratuito.

O artigo 24 da LDB estabelece uma carga horária da Educação Básica de no mínimo 800 horas. Este artigo também estabelece o mínimo de 200 dias letivos.

No que diz respeito ao currículo, o Art. 26 da LDB trata dos currículos do ensino fundamental e médio e esclarece que eles devem "[...] ter uma base nacional comum, a ser completada, em cada sistema de ensino e estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e da clientela" (BRASIL, 2010, p.23). No parágrafo primeiro, esclarece-se que esta base comum deve incluir, entre outras coisas, o estudo de língua portuguesa e matemática. Essas indicações reforçam o papel dos documentos nacionais nas orientações curriculares para as escolas. Quanto ao papel do ensino médio, esse documento destaca a preparação para estudos posteriores, para o trabalho, desenvolver autonomia na aprendizagem, o desenvolvimento como pessoa humana e o conhecimento dos "fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos" (p. 29). Quanto à duração do ensino médio, ele deve ter no mínimo 3 anos (art. 35). O artigo 36 trata do currículo, mas não trata especificamente de Matemática, mas traz orientações que norteiam o papel das disciplinas no sentido de favorecer "a educação tecnológica básica, a compreensão do significado das Ciências, das Letras e das Artes; o processo histórico de transformação da sociedade e da cultura" destacando ainda o exercício da cidadania (inciso 1º do art.36). Destacamos que dentro dessas orientações, a educação estatística tem um papel relevante, tanto no exercício da cidadania como na educação tecnológica. Apesar disso, são orientações muito gerais que não permitem uma análise da organização matemática das medidas de tendência central e de dispersão, como também da organização didática proposta por Chevallard (1999).

A LDB divide a educação básica em educação infantil, ensino fundamental e ensino médio. A educação infantil é tratada pelo artigo 29. Este artigo estabelece que a educação infantil pode ser realizada em creches ou equivalentes para crianças de até 3 anos e pré-escolas para crianças entre 4 e 6 anos. O ensino fundamental (artigo 32) deve ser iniciado aos

6 anos. O tempo de duração do ensino fundamental foi ampliado da redação inicial da LDB de 8 para 9 anos (Lei n. 11.274, de 2006).

Quando trata de uma maneira geral no ensino médio, o Art. 35 estabelece o mínimo de 3 anos. A LDB organiza o ensino médio em algumas categorias:

- Ensino médio
- Educação profissional técnica de nível médio – pode ser realizada junto com o ensino médio ou após a sua conclusão e voltada para o exercício de profissões técnicas de nível médio técnico (seção IV-A e capítulo III da LDB).
- Educação de jovens e adultos (EJA) – constitui outra modalidade do ensino fundamental e médio com características próprias e duração diferenciada para aqueles que não puderam fazer o estudo na idade regular (seção 5 da LDB).
- Educação profissional e tecnológica – abrange diversos níveis: formação inicial e continuada ou qualificação profissional; profissional de nível médio, educação profissional tecnológica de graduação e pós-graduação.

A nossa pesquisa se restringe ao ensino médio regular.

6.1.2. PNE – PLANO NACIONAL DE EDUCAÇÃO

Apesar de antiga a ideia de um Plano Nacional de Educação[65], apenas em 1962[66] é criado o primeiro PNE. A ideia de um plano nacional de 10 anos aparece na LDB em 1996. E em 2000 é aprovado o Plano Nacional de Educação com duração prevista de 10 anos. Em maio de 2011 tramita no congresso nacional um projeto para um novo Plano Nacional de Educação em atendimento à LDB por mais 10 anos.

O projeto de lei do PNE de 2000-2010 (BRASIL, 2001, s.n.), observamos como diretrizes para o ensino médio:

> Preparando jovens e adultos para os desafios da modernidade, o ensino médio deverá permitir aquisição de competências relacionadas ao pleno exercício da cidadania e da inserção produtiva: auto-aprendizagem; percepção da dinâmica social e capacidade para nela intervir; compreensão dos processos produtivos; capacidade

[65] Segundo o PNE (BRASIL, 2001) já estava previsto no artigo 150, acrescentado à Constituição em 1934 que a União elaborasse um Plano Nacional de Educação.
[66] O PNE de 1962 sofreu uma revisão em 1965 e em 1966 (BRASIL, 2001).

> de observar, interpretar e tomar decisões; domínio de aptidões básicas de linguagens, comunicação, abstração; habilidades para incorporar valores éticos de solidariedade, cooperação e respeito às individualidades.

O PNE de 2011-2020 está em tramitação no Congresso Nacional e o projeto propõe 20 metas. Observamos que o PNE 2000-2010 como o 2011-2020 (em tramitação) não trata especificamente de um programa para o ensino médio, nem algo que possa ser utilizado dentro dos objetivos propostos por esta pesquisa.

6.1.3. PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) respondem à demanda do Plano Decenal de Educação, em acordo com a constituição de 1988, que coloca a necessidade e obrigação do estado de "elaborar parâmetros claros no campo curricular capazes de orientar as ações educativas do ensino obrigatório" (BRASIL, 2000a, p.15). Os Parâmetros Curriculares são organizados com orientações de primeira à quarta série e orientações da quinta à oitava série (criado antes da mudança de 8 para 9 anos no ensino fundamental). Para o ensino médio temos os Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio (PCNEM). Este documento é composto de um volume geral com as bases legais (BRASIL 2000b) e de três volumes divididos por área. A matemática é contemplada no volume que trata das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (BRASIL 2000c). Este documento foi aprofundado em um novo volume lançado em 2002: os Parâmetros Curriculares+Ensino Médio (BRASIL, 2002). Em nossa pesquisa, nos deteremos nesta versão mais recente e aprofundada dos Parâmetros Curriculares+Ensino Médio (PCN+EM), no volume que trata das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (BRASIL, 2002).

6.1.4. ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA O ENSINO MÉDIO

Em 2006 são lançadas as Orientações Curriculares para o ensino médio (OCEM). Este documento propõe aprofundar algumas questões apresentadas nos PCN+EM, como observamos nesse documento (BRASIL, 2006, p. 8):

> A demanda era pela retomada da discussão dos Parâmetros Curriculares Nacionais do ensino médio, não só no sentido de aprofundar a compreensão sobre pontos que mereciam esclarecimentos, como também, de apontar e desenvolver indicativos que pudessem oferecer alternativas didático-pedagógicas para a organização do trabalho pedagógico, a fim de atender às necessidades e às expectativas das escolas e dos professores na estruturação do currículo para o ensino médio.

No caso da estatística, observamos um aprofundamento nas questões sobre a forma de ensiná-la que reflete uma tendência, mais atual, e que discutimos no capítulo sobre a didática da estatística. Dessa forma, este documento será utilizado nesta pesquisa na análise do programa brasileiro.

6.2. A EDUCAÇÃO BÁSICA NA FRANÇA

Na França, o Ministério da Educação Nacional (Ministère de l'Éducation Nationale) estabelece de forma detalhada o currículo de cada disciplina e fornece diretrizes para o ensino, sem obrigar os professores a adotarem um método específico. Cabe também ao Ministério da Educação Nacional fornecer o estatuto e o regulamento das escolas e a cota de funcionários. Ele também realiza exames e prêmios nacionais de qualificação e emite diplomas como o baccalauréau (EURYDIC, 2009).

Para facilitar a política e administração do Ministério da Educação Nacional, ele tem uma estrutura externa administrativa dividida em zonas administrativas (Académies). Estas zonas possibilitam a aplicação regional das políticas públicas. Elas são dirigidas por um reitor que atua em nome do Ministério da Educação Nacional. A França é dividida em 30 academias. Cada academia está associada a uma região[67], com exceção para as regiões de Île de France (que comporta Paris), Provence-Alpes-Costa e Ródano-Alpes. Estas academias também estão incluídas nos departamentos ultramarinos[68], embora estes não sejam regidos por um reitor, mas por um vice-reitor. Cada região na França é dividida em departamentos que possuem um responsável da educação nacional subordinados ao reitor da região administrativa. No nível dos estabelecimentos de ensino que são organizados segundo o nível de escolaridade em escolas primárias (écoles primaires), colégios (collèges), e liceus (lycées), temos a gerência dos diretores de escolas e chefes de estabelecimentos.

---

[67] A França possui 21 regiões na região continental, uma na Ilha de Córsega e quatro regiões fora da Europa.
[68] São as regiões que estão fora da Europa: Guiana Francesa, Guadalupe, Martinica e Reunião.

Na França, a maioria dos alunos estuda em escolas públicas gratuitas. Em número reduzido, as escolas privadas podem assinar um contrato com o estado em que este assume a responsabilidade pelos custos com professores e em alguns casos com os custos da instituição (EURYDIC, 2009).

A educação obrigatória na França[69] inicia-se aos 6 anos (Lei de 28 março de 1882), dos 13 aos 14 anos passa a ser obrigatório em 9 de agosto de 1936 e até os 16 anos a partir de 6 de janeiro de 1959. Embora não seja obrigatório em 2009, 11,6% das crianças de 2 anos e quase a totalidade das crianças de 3 a 5 anos estavam no maternal[70]. A escola maternal é dividida em Petite Section (pequena seção), Moyenne Section (média seção) e Grande Section (grande seção). Após a escola maternal, temos a escola elementar que corresponde aos anos iniciais do ensino fundamental no Brasil (primeiro ao quinto ano). Esta é dividida em: curso preparatório (equivale ao primeiro ano do ensino fundamental), curso elementar dividido em dois anos CE1 e CE2 (equivale ao segundo e terceiro ano do ensino fundamental). Depois temos o cours moyen (curso médio) dividido em curso médio 1 e 2 (CM2 e CM1). Este curso corresponde aos dois últimos anos da escola elementar que corresponde no Brasil ao quarto e quinto ano do ensino fundamental. Os quatro últimos anos do ensino fundamental na França são chamados de colégio (collège). O ensino médio na França é chamado de Lycée. Os documentos oficiais franceses são agrupados em quatro tipos:

- Boletim Oficial da Educação Nacional
- Jornal Oficial (JO)
- O código da educação
- O Jornal Oficial da União Europeia.

O Boletim Oficial do Ministério da Educação Nacional é usado para publicar textos regulamentares (decretos, portarias, circulares etc) tendo em vista implementar as medidas ministeriais.

O Jornal Oficial (JO) é diário e corresponde ao diário oficial. Ele publica leis, decretos, regulamentos, portarias, declarações oficiais, publicações legais, contratos públicos, declaração de criação de associações.

O código da educação trata dos textos regulamentares relativos aos princípios gerais da educação e da administração da educação. Na parte legislativa, ele trata dos grandes princípios da educação, da administração da educação, da organização do ensino escolar, dos

[69] Fonte: fonte: http://www.education.gouv.fr/cid162/les-grands-principes.html
[70] Fonte: http://www.education.gouv.fr/cid166/l-ecole-maternelle.html

estabelecimentos de ensino escolar, da via escolar, da via universitária e das pessoas da educação.

Em nossa pesquisa nos detemos no Boletim Oficial que apresenta o programa francês atual. Como será detalhado mais a frente, a nossa pesquisa centrou-se no ensino médio Geral, Série Científica. Dessa forma, o programa que foi analisado é desta série. Contudo, como o ensino médio tem um tronco comum no primeiro ano do ensino médio, o programa do primeiro ano analisado é o mesmo para a Série Literária e para Série Econômica e Social. O ensino médio Francês está passando por uma reforma e temos novos programas que foram implantados. Para o primeiro ano do ensino médio (seconde) do novo currículo, temos o B.O. n.30 de julho de 2009 que apresentou o novo programa de Matemática. Este programa foi atendido pelos livros didáticos de matemática e pelas escolas para o ano letivo 2010-2011. O novo programa de Matemática para o segundo ano do ensino médio (Classe première do cycle terminal) da série científica é apresentada no Boletim Oficial n. 9 de 30 de setembro de 2010. Este programa foi implantado no ano letivo 2011-2012 que se iniciou em setembro de 2011. O último ano do ensino médio da série científica (classe terminale do cycle terminal) continuou utilizando o programa antigo que foi apresentado no Boletim Oficial n.4 de 30 de agosto de 2001. O novo programa que entrou em vigor no ano letivo de 2012-2013 está disponível na página do Ministério da Educação Nacional da França, assim como uma parte do programa nos livros didáticos.

6.3. COMPARAÇÃO GERAL ENTRE OS DOIS SISTEMAS

No quadro 7, apresentamos uma comparação mais geral da Educação Básica no Brasil e na França. Observamos na Educação Básica da França a organização de ciclos. Nos PCN (BRASIL, 1998) observamos a divisão em ciclos no ensino fundamental. Na proposta atual do ensino fundamental de nove anos, não foi apresentada a divisão em ciclos. Dessa forma, não agrupamos quando apresentamos a organização no Brasil em ciclos. Alguns termos utilizados na França já foram utilizados no Brasil, como escola secundária, escola primária, liceu e maternal.

Quadro 7 – Comparação entre a Educação Básica no Brasil e na França.

<table>
<tr><td colspan="3">BRASIL</td><td colspan="4">FRANÇA</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">Ensino médio</td><td>3ª série</td><td>Terminale</td><td rowspan="2">Le cycle terminal</td><td rowspan="3">Lycée</td><td rowspan="7">Secondaire</td></tr>
<tr><td>2ª série</td><td>Première</td></tr>
<tr><td>1ª série</td><td>Seconde</td><td>Le cycle de détermination</td></tr>
<tr><td rowspan="9">Ensino fundamental</td><td rowspan="4">Anos finais</td><td>9º ano</td><td>Troisième</td><td>Cycle d'orientation</td><td rowspan="4">Collège</td></tr>
<tr><td>8º ano</td><td>Quatrième</td><td rowspan="2">Cycle central</td></tr>
<tr><td>7º ano</td><td>Cinquième</td></tr>
<tr><td>6º ano</td><td>Sixième</td><td>Cycle d'adaptation</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Anos iniciais</td><td>5º ano</td><td>Cours moyen 2ème anne CM2</td><td rowspan="3">Cycle 3 : cycle des approfondissements</td><td colspan="2" rowspan="5">École élémentaire</td></tr>
<tr><td>4º ano</td><td>Cours moyen 1ère anne CM1</td></tr>
<tr><td>3º ano</td><td>Cours élémentaire 2ème anne CE2</td></tr>
<tr><td>2º ano</td><td>Cours élémentaire 1ère anne CE1</td><td rowspan="3">Cycle 2 : cycle des apprentissages fondamentaux</td></tr>
<tr><td>1º ano</td><td>Cours préparatoire CP</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Educação infantil</td><td colspan="2">Pré-escola</td><td>Grande section</td><td colspan="2" rowspan="3">École maternelle</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">Creche ou equivalente.</td><td>Moyenne section</td><td rowspan="2">Cycle 1 : cycle d'apprentissages premiers</td></tr>
<tr><td>Petite section</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
</table>

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

O ensino médio na França (Lycée) possui uma estrutura mais diversificada do que no Brasil. Por esta razão, apresentamos a seguir estas características e, em função destas, apresentaremos que “Lycée” pretendemos investigar nos livros didáticos e nos programas.

6.4. O ENSINO MÉDIO NA FRANÇA – (LYCÉE)

Atualmente, o ensino médio na França está passando por uma reforma que vem sendo implantada iniciando no ano escolar 2009-2010 para o primeiro ano do liceu, no ano escolar 2010-2011 para o segundo ano e no ano escolar 2011-2012 para o terceiro ano.

O último ano do ensino fundamental na França (Troisième) faz parte do ciclo de orientação. Neste ano, o aluno deve escolher entre duas vias a trilhar no ensino médio: a via profissional e a via tecnológica e geral.

6.4.1. A VIA PROFISSIONAL

Na via profissional, 40% a 60% do tempo são empregados nos ensinos tecnológico e profissional. No lugar de aulas em classe, estas são dadas em ateliês, em laboratórios ou em um canteiro de obras. As disciplinas mais gerais como francês, matemática, história, geografia, ciências e inglês também são vistas. O objetivo desta via é dar uma formação profissional para o ingresso direto no mercado de trabalho. Existem vários caminhos a seguir na via profissional, cada um prepara para realizar a prova de um baccalauréau profissional específico.

Alguns dos objetivos do lycée profissional na França são semelhantes aos observados no Brasil, em cursos técnicos de nível médio, oferecidos pelos Institutos Federais de Educação. Estes possibilitam concluir o ensino médio e ao mesmo tempo se capacitar para o mercado de trabalho através de um curso técnico-profissionalizante. Contudo, não impossibilita o aluno de tentar o vestibular para ingressar em uma universidade.

Entre os cursos oferecidos no liceu profissional, temos:

- Baccalauréat profissional: curso de três anos, dividido em 75 especialidades diferentes. Ele prioriza a inserção profissional.
- Certificado de aptidão profissional (C.A.P.): curso com dois anos, oferece cerca de 200 especialidades diferentes.
- Breves estudos profissionais (B.E.P.): tinha uma duração de dois anos. Com a reforma no liceu, os cursos oferecidos passaram a integrar o baccalauréat profissional. Quatro cursos de dois anos foram mantidos na entrada de 2009 (primeiro ano após a reforma):

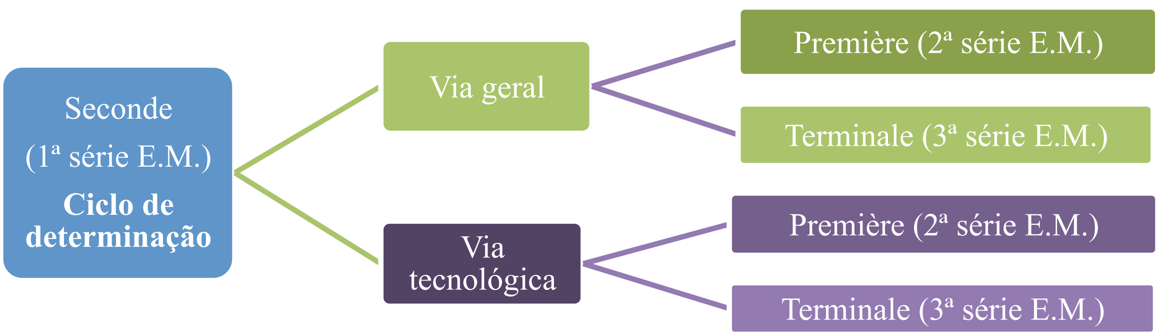
carreira sanitária e social; condução e serviço de transporte rodoviário; profissão de restauração e de hotelaria; oculista óptico.

Em função da profissão que se deseje seguir, deve-se procurar um liceu que ofereça o curso específico. Alguns liceus agrupam vários cursos relacionados a um tema, como o liceu do automóvel Émile Béjuit que fica na Região Rhône-Alpes e oferece vários cursos diferentes, como preparação para o C.A.P. de pintura de carroceria de automóveis, o BAC. Profissional em carroceria ou o post bac. Profissional de técnico em carroceria rápida. Além de outros cursos sobre outras especialidades ligadas a automóveis. Existem ainda os liceus de profissões (lycée des métiers) que oferecem uma formação variada e prepara o estudante para diversos diplomas profissionais.

6.4.2. VIA DE ENSINO GERAL E TECNOLÓGICA

Esta via possui um tronco comum, o primeiro ano do ensino médio (seconde), chamada de ciclo de determinação. Neste ano, o aluno deverá escolher entre a via geral e a via tecnológica (figura 35) e dentro da via qual percurso seguir.

Figura 35 – Via de ensino geral e tecnológica.



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

6.4.2.1. Via tecnológica do lycée

A via tecnológica prepara o aluno aos estudos superiores tecnológicos em dois anos ou mais. Ele prepara o aluno para sete baccalauréat:

- Ciência e tecnologia industrial (S.T.I.). Esta série deve ser modificada pela nova série chamada STI2D que será organizada em quatro especialidades: inovação tecnológica e eco-design; sistema de informação e digital; energia e meio ambiente, arquitetura e construção;
- Ciência e tecnologia da gestão (S.T.G.);
- Ciência e tecnologia da saúde e social (S.T.2.S.);
- Ciência e tecnologia de laboratório (S.T.L.). Com a mudança no lycée, esta série comporá duas especialidades: biotecnologia e ciências aplicadas em laboratório;
- Técnica da música e da dança (T.M.D.);
- Hotelaria;
- Ciência e tecnologia da agronomia e da vida (STAV);
- Ciências e tecnologia do design e das artes aplicadas (STD2A). Antes, esta série fazia parte da STI.

6.4.2.2. via geral do lycée

A via geral do lycée prepara os alunos para o Baccalauréat[71] geral e consequentemente aos estudos superiores, principalmente para a universidade ou classe preparatória. A via geral do lycée é de dois anos e corresponde ao ciclo terminal formado pelas classes "terminale" e "seconde". O ciclo terminal possui três séries, cada uma encaminha a um baccalauréat específico.

Série Econômica e Social (E.S.)

Esta série tem como especialidades: as Ciências Sociais e Políticas, a Matemática, a Economia Aprofundada (antes da reforma do lycée tínhamos como especialidades as Ciências Econômicas e Sociais, Matemática e Línguas Vivas). No segundo ano do ensino médio, a

---

[71] O Baccalauréat foi criado em 1808 e é um diploma que tem uma dupla particularidade: documentar o final do ensino médio e abrir o acesso ao ensino superior. O baccalauréaut é nacional e é o primeiro diploma de nível superior. Ele não tem um caráter provisório como um exame para entrar na Universidade. Como diploma ele é único para as áreas às quais se prestou. Tal como um diploma universitário, não faz sentido fazer novamente, como não faz sentido um engenheiro formado fazer novamente o curso de engenharia. Assim ele é para toda a vida e pode dar acesso a diferentes cursos nas áreas às quais ele foi prestado. Caso se queira mudar de área do curso, é que se faz necessário fazer um novo bacalauréaut ou outro diploma equivalente como o DAEU (Diplome d'accès aux études universitaires).

carga horária semanal de Matemática é de 3 horas e no último ano do ensino médio é de 4 horas (currículo antigo a ser mudado).

Série Literária (L)

Com esta série, o aluno tem como especialidade: as artes, artes do circo, língua e cultura da antiguidade (grego ou latim), linguagem viva 3, linguagem viva 1 ou 2 aprofundamento, matemática, direito e questões do mundo contemporâneo (antes da reforma tínhamos as letras clássicas, letras e línguas, letras e artes e letras e matemática). No segundo ano do ensino médio existe uma disciplina obrigatória para ser escolhida, que pode ser Matemática com carga horária de 3 horas ou outra disciplina de uma lista. No último ano do ensino médio a disciplina matemática é também opcional.

Série Científica (S)

Tem como especialidades: a matemática, físico-química, ciências da vida e da terra (SVT), informação e ciência digital (na grade anterior tínhamos matemática, físico-química, ciência da vida e da terra, ciência da engenharia). No segundo ano do ensino médio, a carga horária semanal de Matemática é de 4 horas. No último ano do ensino médio, a carga horária de Matemática é de 6 horas (currículo antigo a ser mudado).

6.4.3. COMPARANDO AS VIAS

Na tabela 37, temos os alunos inscritos no baccalauréat nos anos de 2010, 2011 e 2012 agrupados em baccalauréat geral, tecnológico e profissional. Em torno de 50% dos alunos concorreu nos três anos concorreram aos exames do baccalauréat geral, o que indica fortemente a preferência por esta via que melhor prepara para o curso superior e que se assemelha ao ensino médio no Brasil. Em segundo lugar, temos os candidatos aos diversos baccalauréat da via profissional e por último os candidatos à via profissional. Em relação aos candidatos inscritos no baccalauréat de 2010, observamos uma pequena mudança. A via geral apresentou uma redução de 53,22% para 50,18% (de 2010 para 2011) e para 47,57% (em 2012). A via tecnológica sofreu uma redução ao longo dos três anos levantados, passando do segundo para o terceiro lugar. A via profissional foi a que cresceu passando do terceiro lugar com 20,43% para o segundo lugar com 31,29%.

Tabela 37 – Candidatos ao baccalauréat de 2010, 2011 e 2012 agrupados nas vias geral, tecnológica e profissional.

	Candidatos inscritos no baccalauréat					
	2010		2011		2012	
	Nº	%	Nº	%	Nº	%
Via geral	327.785	53,22	328.467	50,18	334.464	47,57
Via tecnológica	162.250	26,34	154.379	23,59	148.622	21,14
Via profissional	125.854	20,43	171.702	26,23	219.973	31,29
Total	615.889	100,00	654.548	100,00	703059	100,00

Fonte: Ministère de l'éducation nationale de la jeunesse et de la vie associative – France.
Disponível em: http://www.education.gouv.fr/cid56542/baccalaureat-2011.html#Les_chiffres clés du baccalauréat 2011.

Na tabela 38, apresentamos dados sobre os alunos inscritos no baccalauréat nos anos de 2010, 2011 e 2012 agrupados nas Séries Econômica e Social, Científica e Literária. A Série Científica permanece nos três anos como a mais procurada com mais de 50 % dos candidatos. A Série Econômica e Social fica em segundo lugar nos dois anos e a Série Literária é a que tem uma menor procura.

Tabela 38 – Candidatos inscritos nos baccalauréat de 2010, 2011 e 2012 agrupados nas séries científica, econômica e literária.

	Candidatos inscritos no baccalauréat					
	2010		2011		2012	
	Nº	%	Nº	%		
Série Científica	167.228	51,02	165.478	50,38	168.665	50,43
Série Econômica e Social	104.957	32,02	106.314	32,37	110.502	33,04
Série Literária	55.600	16,96	56.675	17,25	55.297	16,53
Total	327.785	100,00	328.467	100,00	334.464	100

Fonte: Ministère de l'éducation nationale, de la jeunesse et de la vie associative – France.
Disponível em: http://www.education.gouv.fr/cid52071/baccalaureat-2010.html#Les modalités de l'examen des baccalauréats général et technologique> e <http://www.education.gouv.fr/cid56542/baccalaureat-2011.html#Les_chiffres clés du baccalauréat 2011>.

Em nosso estudo, vamos focar as escolas regulares no Brasil que correspondem à via geral. Dentro da via geral na Série Literária, a Matemática é opcional. Na Série Científica e na Série Econômica e Social, a Matemática é uma disciplina regular. A Série Científica possui uma carga horária maior de Matemática e é a mais procurada. Por essas razões optamos por analisar o programa (FRANCE, 1999, 2000, 2001, 2009a, 2010a) e os livros didáticos da Série Científica. O Ministério da Educação Nacional da França publica documentos suplementares chamados de “Ressources” (FRANCE, 2009b, 2012) que iremos utilizar para complementar a análise dos programas franceses.

CONCLUSÃO DA PRIMEIRA PARTE

Neste primeiro volume, apresentamos não apenas a fundamentação teórica, mas uma investigação para dar suporte a nossa pesquisa. Esta investigação permitiu observar diferenças entre as instituições de transposição de cada país, como também, mostrar que no processo de transposição didática para o programa e para o livro, o papel dos agentes e a influência destes mudam. Também neste primeiro volume, fizemos uma investigação longa sobre o saber científico, procurando muitas vezes desenvolver demonstrações ou se apoiar em demonstrações existentes, levantar propriedades apresentadas por pesquisadores conhecidos na área da estatística. Também apresentamos algumas pesquisas na área de educação sobre as medidas de tendência central e de dispersão, organizando estas pesquisas no sentido de levantar propriedades e observações que deveriam ser levadas em consideração, tendo em vista de serem supridas nos livros didáticos.

Além de tratar do fenômeno da transposição didática que nos apoiamos nesta pesquisa, apresentamos nesta parte duas teorias que tiveram um papel relevante em nossa investigação: a teoria antropológica do didático e a teoria dos campos conceituais. A teoria antropológica do didático acrescenta um aporte teórico importante para a análise da transposição didática e que vem a fundamentar as observações que fizemos no campo da transposição didática. Também utilizamos para análise, os níveis de codeterminação didática e as praxeologias. A apresentação desta teoria, nesta parte, servirá de base para a metodologia da construção e tratamento dos dados.

A teoria dos campos conceituais foi apresentada neste primeiro volume e dá suporte para a análise dos programas e livros. Esta teoria fornece um estrutura robusta que nos permite construir diversas ferramentas de análises no segundo volume desta tese. Quando pensamos nas situações que dão sentido ao conceito podemos também pensar que as técnicas utilizadas, as tecnologias e teorias podem fazer parte destas situações. Contudo, devido às particularidades de cada teoria, tratamos como aspectos diferentes de uma análise maior sobre as limitações nos programas e livros didáticos que norteiam a presente pesquisa.

Apresentamos no final deste volume uma breve exposição da estrutura da educação básica na França e no Brasil, suas diferenças e uma apresentação um pouco mais detalhada do ensino médio. Também tratamos das leis e programas nos dois países relativos à educação básica, especificando as diferenças de cada uma, as que tratam das MTCD e as que são orientações mais gerais como a LDB no Brasil. Assim, procuramos detalhar estas informações para servir de base para as escolhas realizadas na metodologia referentes aos programas e livros didáticos.